Лекции по линейной алгебре.

А.И. Козко.

26 апреля 2022 г.

Оглавление

Введение.

Данный курс читается автором на химическом факультете МГУ имени Ломоносова.

Посвящается началу священной сессии!!! Наслаждайтесь!!!!!!!!

Глава 1

Комплексные числа

1.1 Основные понятия

1.1.1 Определение комплексного числа

Как нам известно уравнение $x^2 + 1 = 0$, не имеет действительных корней. Наша цель — расширить понятие числа так, чтобы стало возможным решить любое алгебраическое уравнение. Для этого введём понятие комплексного числа. Прежде всего, определим мнимую единицу число i.

Определение 1.1.1. Пусть элемент i такой, что справедливо равенство

$$i^2 = i \cdot i = -1.$$

Элемент i будем называть *мнимой единицей*. Рассмотрим множество

$$\mathbb{C} := \{a + bi,\ \ a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Множество $\mathbb{C}$ будем называть множеством *комплексных чисел*, а элементы вида $a+bi$, a, $b \in \mathbb{R}$ *комплексными числами*. Для комплексного числа $z = a+bi$, a будем называть *действительной частью комплексного числа* z, и обозначать $a = \mathrm{Re}z$. А b будем называть *мнимой частью комплексного числа* z, и обозначать $b = \mathrm{Im}z$.

Из свойств операций в поле $\mathbb{R}$ и соотношения $i^2 = -1$ вытекают равенства

$$\begin{aligned}
&(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i,\\
&(a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 i^2) + (a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot a_2)i =\\
&= (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot a_2)i.
\end{aligned}$$

Определение 1.1.2. *Нулём* во множестве комплексных чисел назовём элемент $0 := 0 + 0 \cdot i$. Для которого, для любых a, $b \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$(a + bi) + 0 = a + bi.$$

Единицей во множестве комплексных чисел назовём элемент $1 := 1 + 0 \cdot i$. Для которого справедливо

$$(a + bi) \cdot 1 = 1 \cdot (a + bi) = a + bi.$$

Решаем уравнение $(a + bi) + (x + yi) = 0$, где x, y — неизвестные. Находим

$$-(a + bi) = (-a) + (-b)i.$$

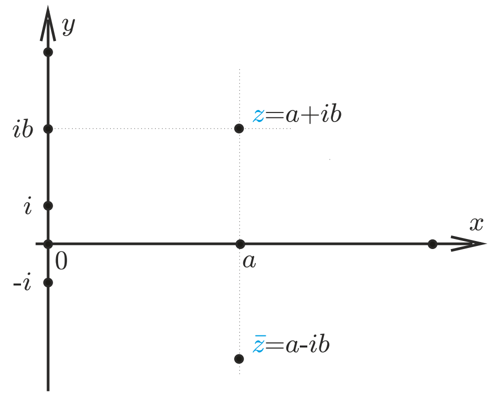


Рис. 1.1:

Пусть $a^2+b^2 \neq 0$. Тогда, аналогично решая уравнение $(a+bi)\cdot(x+yi)=1$, где x, y — неизвестные. Приходим к системе

$$\begin{cases} a \cdot x - b \cdot y = 1, \\ a \cdot y + b \cdot x = 0. \end{cases}$$

Откуда находим $x = a/(a^2+b^2)$, $y = -b/(a^2+b^2)$, т.е.

$$(a+bi)^{-1} := \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{bi}{a^2+b^2}. \tag{1.1.1}$$

Докажем единственность представления $a+bi$, где a, $b \in \mathbb{R}$. Действительно, из равенства $a_1+b_1i = a_2+b_2i$ получаем $a_1-a_2=(b_2-b_1)i$. После возведения в квадрат приходим к равенству

$$(a_1-a_2)^2 = -(b_2-b_1)^2 \Longleftrightarrow a_1=a_2,\ b_1=b_2,$$

что и требовалось доказать.

Определение 1.1.3. По комплексному числу $z := a+bi$ определим комлексное число

$$\bar{z} := a - bi,$$

которое в дальнейшем будем называть *комплексно-сопряжённым* к $z := a+bi$. *Модулем* комплексного числа $z := a+bi$, называется число $\sqrt{a^2+b^2}$, оно обозначается

$$|z| := \sqrt{a^2+b^2}.$$

Заметим, что в новых обозначениях равенство (1.1.1) можно записать в виде

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Пример 1.1.1. Найти i^{-1}. Пусть $z=i$. Тогда $\bar{z}=-i$, $|z|=1$. Откуда $i^{-1}=-i$.

Пример 1.1.2. Найти $(1+i)^{-1}$. Пусть $z=1+i$. Тогда $\bar{z}=1-i$, $|z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$. Откуда

$$(1+i)^{-1} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}.$$

1.1.2 Тригонометрическая форма комплексного числа. Формула Эйлера

Определение 1.1.4. *Аргументом* комплексного числа $z := a+bi$ назовём угол, образуемый между соответствующим вектором (см. рис. 1.2) и положительным направлением оси абсцисс. Аргумент определён с точностью до прибавления числа, кратного 2π и обозначается $\operatorname{Arg} z$. Аргумент числа 0 не определён. Среди значений аргумента числа $z \neq 0$ существует одно и только одно, заключённое между $-\pi$ и π (включая последнее значение). Оно называется *главным значением аргумента* и обозначается $\arg z$. Итак,

$$-\pi < \arg z \leqslant \pi, \quad \operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

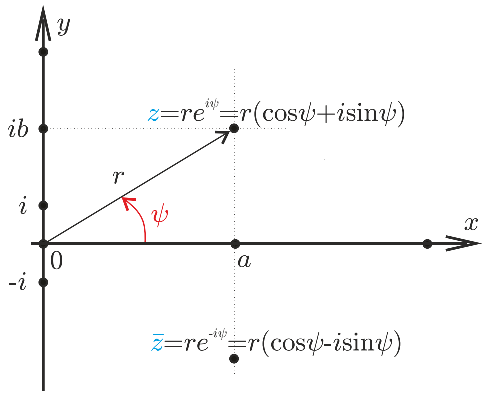


Рис. 1.2:

Так как, для $z = a + bi$ очевидно (см. рис. 1.2),

$$a = r\cos\psi, \quad b = r\sin\psi,$$

то

$$z = a + bi = r(\cos\psi + i\sin\psi).$$

Мы получили выражение комплекного числа в полярных координатах, или иначе *тригонометрическую форму* комплексного числа.

Функция e^z, формула Эйлера

Для функции e^x в курсе математического анализа мы доказали формулу

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

справедливую при любом $x \in \mathbb{R}$. Но поскольку ряд справа сходится во всей комплексной области $\mathbb{C}$, формулу

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

возьмём в качестве определения функции e^z в комплексной области. Пусть $y \in \mathbb{R}$. Тогда справедливо

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \dots + \frac{(iy)^{2n}}{2n!} + \frac{(iy)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \\ &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n y^{2n}}{2n!} + \dots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots\right) = \\ &= \cos y + i\sin y. \end{aligned}$$

Полученная формула

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y.$$

носит название *формулы Эйлера*. Используя произведение рядов (в смысле Коши) можно получить равенство $e^x \cdot e^{iy} = e^{x+iy}$. Действительно,

$$\begin{aligned} e^x e^{iy} &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots\right) \cdot \left(1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \dots + \frac{(iy)^n}{n!} + \dots\right) = \\ &= 1 + (x+iy) + \frac{(x+iy)^2}{2!} + \frac{(x+iy)^3}{3!} + \frac{(x+iy)^4}{4!} + \dots + \frac{(x+iy)^n}{n!} + \dots = e^{x+iy}. \end{aligned}$$

На деталях мы пока не останавливаемся. В частности, нами доказана формула

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y). \tag{1.1.2}$$

Докажем некоторые свойства функции e^z.

- *Для функции e^z сохраняется обычная формула сложения*:
$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}.$$
Действительно, полагая $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, 2$, получаем
$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1) \cdot e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2) = e^{x_1+x_2}(\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)) = e^{z_1+z_2}.$$

- *Функции e^z периодическая, с мнимым основным периодом $2\pi i$.* Пусть $z \in \mathbb{C}$. Тогда справедливо
$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z(\cos(2\pi) + i \sin(2\pi)) = e^z.$$
С другой стороны пусть выполнено $e^{z+T} = e^z$. В частности для $z = 0$, при $T = T_1 + iT_2$ имеем:
$$e^T = e^{T_1}(\cos T_2 + i \sin T_2) = 1.$$
Откуда $e^{T_1} = 1$, т.е. $T_1 = 0$ и $\cos T_2 = 1$, $\sin T_2 = 0$, т.е. $T_2 = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Следовательно $2\pi i$ основной период функции e^z.

Формула Муавра, функции $\cos z$, $\sin z$

Таким образом
$$|e^z| = e^{\mathrm{Re} z} = e^x, \quad \arg e^z = \mathrm{Im} z.$$
Откуда
$$z = a + bi = r(\cos\psi + i \sin\psi) = re^{i\psi}.$$
Показательной формой комплексного числа называется выражение $z = re^{i\psi}$. Из формулы $(e^{i\psi})^n = e^{in\psi}$ получаем
$$(\cos\psi + i \sin\psi)^n = \cos n\psi + i \sin n\psi.$$
Последняя формула носит название *формулы Муавра.* Из формулы Эйлера легко получаем
$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x,$$
откуда
$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$
Данные формулы можно использовать в качестве определения функций $\cos z$ и $\sin z$
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Формулы тригонометрии остаются справедливыми и в комплексной области. Например, используя формулу Эйлера, получаем равенство
$$\cos(z_1 + z_2) + i \sin(z_1 + z_2) = e^{i(z_1+z_2)} = e^{iz_1}e^{iz_2} = (\cos z_1 + i \sin z_1)(\cos z_2 + i \sin z_2) = \\ = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 + i(\sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1),$$
из которого следуют сразу две теоремы сложения:
$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2, \tag{1.1.3}$$
$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1. \tag{1.1.4}$$
Из них легко получить остальные теоремы сложения, формулы приведения, формулы двойных углов и т. д. Из формул приведения следует π - периодичность тангенса и котангенса.

Если в равенстве (1.1.3) положить $z_1 = z$, $z_2 = -z$, получим еще одну важную формулу, а именно основное тригонометрическое тождество: $1 = \cos^2 z + \sin^2 z$. Отметим ещё некоторые свойства этих функций, которые также легко вытекают из определений:

- $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$; $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$; $\cos z = \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right)$;
- $\mathrm{ch}\, z = \cos iz$, $\mathrm{sh}\, z = -i \sin iz$, $\cos z = \mathrm{ch}\, iz$, $\sin z = -i\, \mathrm{sh}\, iz$[1];
- $\cos(x + iy) = \cos x\, \mathrm{ch}\, y - i \sin x\, \mathrm{sh}\, y$.

[1] Здесь $\mathrm{ch}\, z = \frac{e^z+e^{-z}}{2}$, $\mathrm{sh}\, z = \frac{e^z-e^{-z}}{2}$.

П р и м е р 1.1.3. Решим уравнение[2]

$$\cos x = 2.$$

Последнее уравнение равносильно

$$\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = 2 \Longleftrightarrow e^{2ix} - 4e^{ix} + 1 = 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (e^{ix}-2)^2 - 3 = 0 \Longleftrightarrow e^{ix} = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Но поскольку $e^{i(x+2\pi k)} = e^{ix}$, $k \in \mathbb{Z}$, то из последнего уравнения получаем

$$e^{ix} = e^{i(x+2\pi k)} = 2 \pm \sqrt{3} \Longleftrightarrow i(x+2\pi k) = \ln(2 \pm \sqrt{3}) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow x + 2\pi k = i^{-1}\ln(2 \pm \sqrt{3}) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow x = -2\pi k - i\ln(2 \pm \sqrt{3}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом уравнение $\cos x = 2$ имеет бесконечно много решений в комплексной области:

$$x = -2\pi k - i\ln(2 \pm \sqrt{3}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

1.1.3 Извлечение корня n-й степени

Обозначим

$$w := \sqrt[n]{z}, \quad z, w \in \mathbb{C}.$$

Представим комплексные z, w числа в показательной форме

$$z = re^{i\psi}, \quad w = |w|e^{i\,\mathrm{Arg}\,w}.$$

Тогда учитывая периодичность функции e^{ix}, имеем

$$|w|e^{i\,\mathrm{Arg}\,w} = \sqrt[n]{re^{i(\psi+2\pi k)}} = r^{1/n}e^{i(\psi+2\pi k)/n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Откуда

$$|w| = r^{1/n}, \quad \mathrm{Arg}\,w = (\psi + 2\pi k)/n.$$

Т.е. окончательно получаем

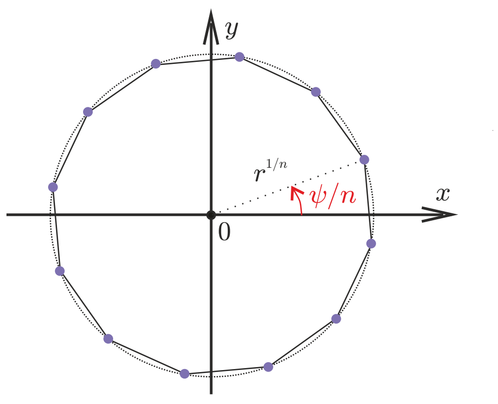


Рис. 1.3:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\psi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\psi+2\pi k}{n}\right).$$

[2] В действительной области уравнение $\cos x = 2$ решений не имеет, т.к. $|\cos x| \leqslant 1$ и $|\sin x| \leqslant 1$ для всех $x \in \mathbb{R}$! Но в комплкснoй области функции $\cos x$, $\sin x$ уже не ограничены.

Одинаковые значения $\sqrt[n]{z}$ получаются по этой формуле, когда в качестве k берутся числа, сравнимые по модулю n. Если в эту формулу вместо числа k подставить число вида $k+mn$, $m\in\mathbb{Z}$, то правая часть не изменится ввиду периодичности функций $\cos x$ и $\sin x$ и мы получим то же самое значение $\sqrt[n]{z}$. Отсюда следует, что для $z\neq 0$ получаем ровно n различных значений $\sqrt[n]{z}$, например при $k=0,1,\dots n-1$, в геометрическом изображении числа

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\psi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\psi+2\pi k}{n}\right)=\sqrt[n]{r}\cdot e^{(\psi+2\pi k)i/n},\quad k=0,1,\dots n-1, \tag{1.1.5}$$

расположены на окружности радиуса $\sqrt[n]{r}$ с центром в начале координат и в вершинах правильного n-угольника (см. рис. 1.3).

П р и м е р 1.1.4. Найти $\sqrt[3]{27}$. По формуле (1.1.5) получаем

$$w_{0,1,2}=\sqrt[3]{27}=3\left(\cos\frac{2\pi k}{3}+i\sin\frac{2\pi k}{3}\right)=3e^{2\pi ki/3},\quad k=0,1,2.$$

При различных $k=0,1,2$ имеем (см. рис. 1.4)

$$k=0\Longrightarrow w_0=3;$$

$$k=1\Longrightarrow w_1=3e^{2\pi i/3}=3\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$k=2\Longrightarrow w_2=3e^{4\pi i/3}=3\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

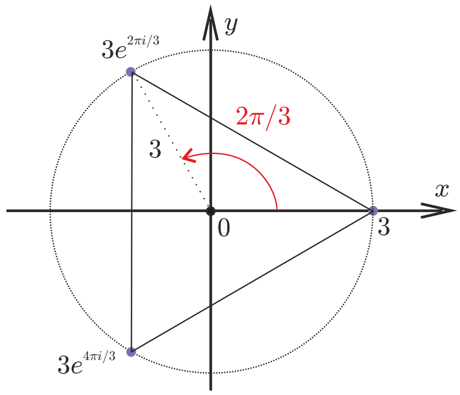


Рис. 1.4:

П р и м е р 1.1.5. Найти $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}i}$. Сначала приведём комплексное число $-8+8\sqrt{3}i$ к тригонометрическому виду

$$-8+8\sqrt{3}i=16\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=16\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=16\cdot e^{2\pi i/3}.$$

По формуле (1.1.5) получаем

$$w_{0,1,2,3}=\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}i}=\sqrt[4]{16\cdot e^{2\pi i/3}}=2e^{\pi i/6+\pi ki/2},\quad k=0,1,2,3.$$

При различных $k=0,1,2,3$ имеем

$$k=0\Longrightarrow w_0=2e^{\pi i/6}=\sqrt{3}+i;$$

$$k=1\Longrightarrow w_1=2e^{\pi i/6+\pi i/2}=-1+\sqrt{3}i;$$

$$k=2\Longrightarrow w_2=2e^{\pi i/6+\pi i}=-\sqrt{3}-i;$$

$$k=3\Longrightarrow w_3=2e^{\pi i/6+3\pi i/2}=1-\sqrt{3}i.$$

Контрольные вопросы.

1. Имеет ли решение уравнение $\cos x = 10$? Если да, то сколько?
2. Сколько корней имеет уравнение вида $x^8 + 12 = 0$ в комплексной плоскости?

Упражнения к 1.1

Упражнение 1.1.1. *Найти модуль r и аргумент ψ (главное значение аргумента) комплексного числа*

$$(a)\quad 3i; \qquad (b)\quad 1+i; \qquad (c)\quad 3-4i; \qquad (d)\quad \frac{1-i}{1+i}.$$

Упражнение 1.1.2. *Представить в виде $a+bi$ следующее комплексное число* $2/(1-3i)$.

Упражнение 1.1.3. *Вычислить*

$$(a)\quad \sqrt{-16}; \qquad (b)\quad \sqrt{8}; \qquad (c)\quad \sqrt{-32+32\sqrt{3}i}; \qquad (d)\quad \sqrt[3]{8i};$$
$$(e)\quad \sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}i}; \qquad (f)\quad \sqrt[3]{-4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i}; \qquad (g)\quad \sqrt[4]{16i}; \qquad (h)\quad (-1+i\sqrt{3})^{60}.$$

Упражнение 1.1.4. *Вычислите z^8 и $\sqrt[3]{w}$, если* $z = 1 + \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $w = \frac{1-5i}{1+i} - 5\cdot\frac{1+2i}{2-i} + 2$.

Упражнение 1.1.5. *Решите систему*

$$(a)\begin{cases} iz + (1+i)w = 2+2i \\ 2iz + (3+2i)w = 5+3i. \end{cases} \qquad (b)\quad \begin{cases} (1-i)z + (3-i)w = 1+5i \\ (2+i)z + (5-i)w = 3+8i. \end{cases}$$
$$(c)\begin{cases} (1+i)z + (1-i)w = 1+i \\ (1-i)z + (1+i)w = 1+3i. \end{cases}$$

Упражнение 1.1.6. *Решить уравнение*

$$(a)\quad z^2+2z+2=0; \qquad (b)\quad z^3-8=0; \qquad (c)\quad z^4-1=0; \qquad (d)\quad z^2-4z+13=0;$$
$$(e)\quad z^2+z+1=0; \qquad (f)\quad z^4+1=0; \qquad (g)\quad z^4+5z^2+4=0; \qquad (h)\quad z^3=\bar{z}^2;$$
$$(i)\quad z^5 = 2i\bar{z}^2; \qquad (j)\quad z^{n-1}=\bar{z}.$$

Упражнение 1.1.7. *Решить уравнение*

$$(a)\quad z^6+6z^4+11z^2+6=0; \qquad (b)\quad z^5+3z^4+3z^3+z^2=0; \qquad (c)\quad z^6-4z^5+6z^4-4z^3-15z^2=0.$$

Упражнение 1.1.8. *Решить уравнение*

$$(a)\quad \cos z = 1.5; \qquad (b)\quad \sin z = 2; \qquad (c)\quad \cos z = i; \qquad (d)\quad \sin z + \cos z = 3;$$
$$(e)\quad \sin z - \cos z = 2; \qquad (f)\quad \operatorname{tg} z = 2+i; \qquad (g)\quad z^{\sqrt{3}} = 1; \qquad (h)\quad z^i = i.$$

Ответы: **1.1.1** (a) $r=3$, $\psi=\pi/2$; (b) $r=\sqrt{2}$, $\psi=\pi/4$; (c) $r=5$, $\psi=-\arcsin(4/5)$;(d) $r=\sqrt{2}$, $\psi=\pi/4$. **1.1.2** $1/5+3i/5$. **1.1.3** (a) $\pm 4i$; (b) $\pm 2\sqrt{2}$; (c) $4+4\sqrt{3}i$, $-4-4\sqrt{3}i$;(d) $-2i$, $\sqrt{3}+i$, $-\sqrt{3}+i$; (e) $\sqrt{3}+i$, $-1+\sqrt{3}i$, $-\sqrt{3}-i$, $1-\sqrt{3}i$; (f) $\sqrt{2}(1+i)$, $2(\cos(11\pi/12)+i\sin(11\pi/12)) = -(\sqrt{3}+1)/\sqrt{2}+i(\sqrt{3}-1)/\sqrt{2}$, $2(\cos(19\pi/12)+i\sin(19\pi/12)) = (\sqrt{3}-1)/\sqrt{2}-i(\sqrt{3}+1)/\sqrt{2}$; (g) $\pm(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}})$, $\pm(\sqrt{2-\sqrt{2}}+i\sqrt{2+\sqrt{2}})$;(h) 2^{60}. **1.1.4** $z^8 = -\left(2\cos\frac{\pi}{8}\right)^8$; $w=-8i$, откуда $\sqrt[3]{w}=-2i$, $\sqrt{3}-i$, $-\sqrt{3}-i$. **1.1.5** (a) $z=2$, $w=1-i$; (b) $z=-i$, $w=2i$; (c) $z=i$, $w=1+i$. **1.1.6** (a) $-1\pm i$; (b) 2, $-1-\sqrt{3}i$, $-1+\sqrt{3}i$; (c) ± 1, $\pm i$; (d) $z_{1,2}=2\pm 3i$; (e) $z_{1,2}=-1/2\pm\sqrt{3}i/2$; (f) $z_{1,2,3,4}=(\pm 1\pm i)/\sqrt{2}$; (g) $z_{1,2}=\pm i$, $z_{3,4}=\pm 2i$; (h) $z_6=0$, $z_{1,2,3,4,5}=e^{-2\pi ki/5}$, $k=0,1,2,3,4$. *Указание:* представить в показательном виде $z=re^{i\varphi}$; (i) $z_1=0$, $z_{2,3,\ldots,8}=\sqrt[3]{2}e^{i(\pi/14-2\pi k/7)}$, $k=0,1,2,\ldots,6$; (j) $z_1=0$, $z_{2,3,\ldots,n+1}=e^{2\pi ki/n}$, $k=0,1,2,\ldots,n-1$. **1.1.7** (a) $z_{1,2}=\pm i$, $z_{1,2}=\pm 2i$, $z_{1,2}=\pm 3i$;(b) $z_{1,2}=0$, $z_{3,4,5}=-1$; (c) $z_{1,2}=0$, $z_3=-1$, $z_4=3$, $z_{5,6}=1\pm 2i$; **1.1.8** (a) $x=-2\pi k-i\ln((3\pm\sqrt{5})/2)$, $\quad k\in\mathbb{Z}$; (g) $z_m=e^{i\varphi_m}$, $\varphi_m=(2\pi m)/\sqrt{3}$, $m\in\mathbb{Z}$.

1.2 Алгебраические многочлены. Общие свойства

Определение 1.2.1. Функция вида

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a_n \neq 0, \quad a_k \in \mathbb{R}, \tag{1.2.6}$$

называется *алгебраическим многочленом степени* n. В случае $n = 2$ уравнение $f(x) = 0$ будет называться *квадратным* или уравнением второго порядка. В случае $n = 3$ уравнение $f(x) = 0$ будет называться *кубическим* или уравнением третьего порядка. В случае $n = 4$ уравнение $f(x) = 0$ будет называться уравнением четвёртого порядка.

1.2.1 Теорема Виета для многочлена порядка n

Определение 1.2.2. Число $\alpha \in \mathbb{C}$ такое, что $f(\alpha) = 0$, называется *корнем многочлена* $f(x)$. Если α — корень $f(x)$, то $f(x) = (x-\alpha)f_1(x)$, где степень $f_1(x)$ равна $n-1$. Если $f_1(\alpha) = 0$, то, аналогично, $f_1(x) = (x-\alpha)f_2(x)$. Продолжая этот процесс, получим в результате $f(x) = (x-\alpha)^k f_k(x)$, $k \leqslant n$, где $f_k(\alpha) \neq 0$. Число k при этом называется *кратностью* корня α.

Из **основной теоремы алгебры** следует, что любой многочлен $f(x)$, степень которого больше или равна 1, имеет n корней (кратные корни считаются с учётом их кратности, т.е. если α имеет кратность k, то мы считаем его k раз).

Таким образом, в комплексной области число корней у произвольного многочлена совпадает со степенью многочлена, т.е. число корней у многочлена $f(x) = 0$ (см. 1.2.6) равно n, с учётом кратности. Пусть x_1, x_2, $\dots$, x_n — корни уравнения (1.2.6). Тогда

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0, \quad a_n \neq 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow a_n(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n) = 0.$$

Откуда расскрывая скобки и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях приходим к следующим формулам

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

$$(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + \dots + x_1x_n)+$$

$$+(x_2x_3 + x_2x_4 + \dots + x_2x_n) + \dots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ,$$

$$\sum_{i_1<i_2<\dots<i_k} x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k} = (-1)^k\frac{a_{n-k}}{a_n},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ,$$

$$x_1x_2\dots x_n = (-1)^n\frac{a_0}{a_n},$$

которые носят название формул *Виета*.

1.2.2 Дискриминант многочлена порядка n

Определение 1.2.3. *Дискриминантом* уравнения

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a_n \neq 0, \quad a_k \in \mathbb{R},$$

называется выражение

$$D = a_n^{2n-2}\prod_{k>l}(x_k - x_l)^2,$$

где x_1, x_2, $\dots$, x_n — корни уравнения $f(x) = 0$.

В случае $n = 2$, согласно формулам Виета, дискриминант уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, принимает вид

$$D = a^2(x_1 - x_2)^2 = a^2((x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2) = \\ = a^2\left(\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4\left(\frac{c}{a}\right)\right) = b^2 - 4ac.$$

Мы получили хорошо известную формулу для дискриминанта квадратного уравнения.

В случае $n = 3$ найдём дискриминант кубического уравнения $x^3 + px + q = 0$, p, $q \in \mathbb{R}$. Справедливо равенство

$$(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2)(x_1^2 + x_3^2 - 2x_1x_3)(x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3) = \\ = -4(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)^3 - 27(x_1x_2x_3x_4)^2,$$

Пусть теперь x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $x^3 + px + q = 0$. Тогда из предедущего равенства и формул Виета вытекает

$$D = (x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2 = -4p^3 - 27q^2 = -108 \cdot \left(\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2\right). \tag{1.2.7}$$

Дискриминант кубического уравнения в общем случае

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, \quad a_3 \neq 0, \quad a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R},$$

принимает более сложный вид

$$D = a_1^2a_2^2 - 4a_0a_2^3 - 4a_1^3a_3 + 18a_0a_1a_2a_3 - 27a_0^2a_3^2. \tag{1.2.8}$$

1.2.3 Решения квадратного уравнения

Изучим корни квадратного уравнения

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, \quad a_2 \neq 0, \quad a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}.$$

Для удобства обозначений запишем квадратное уравнение в виде

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}. \tag{1.2.9}$$

Справедливо

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff a(x^2 + (b/a) \cdot x + (c/a)) = 0 \iff \\ \iff x^2 + (b/a) \cdot x + (c/a) = 0 \iff \\ \iff (x^2 + (b/2a))^2 + (c/a) - (b^2/4a^2) = 0 \iff \\ \iff (x^2 + (b/2a))^2 - (b^2 - 4ac)/4a^2 = 0 \iff \\ \iff (x^2 + (b/2a))^2 - D/4a^2 = 0,$$

где D — дискриминант квадратного уравнения. Откуда делаем вывод, что в случае $D > 0$ квадратное уравнение имеет два действительных различных корня

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

В случае $D = 0$ квадратное уравнение имеет два действительных совпадающих корня

$$x_1 = x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b}{2a}.$$

И в случае $D < 0$ у квадратного уравнения два мнимых комплексно-сопряжённых корня

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a}.$$

Итог о корнях уравнения (1.2.9) привидём в виде таблицы

$\mathbf{D > 0}$	$\mathbf{D = 0}$	$\mathbf{D < 0}$
два различных действительных корня	два совпадающих действительных корня	два (различных) комплексно-сопряжённых корня

П р и м е р 1.2.1. Решить уравнение $x^2 - 8x + 20 = 0$. Найдём дискриминант.

$$D = b^2 - 4ac = 64 - 80 = -16 < 0.$$

По дискриминату делаем вывод, что решением уравнения являются два комплексно-сопряжённых корня:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a} = \frac{8 \pm 4i}{2} = 4 \pm 2i.$$

П р и м е р 1.2.2. Решить уравнение $x^2 + 6x + 90 = 0$. Найдём дискриминант.

$$D = b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 90 = -324 < 0.$$

По дискриминату делаем вывод, что решением уравнения являются два комплексно-сопряжённых корня:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a} = \frac{-6 \pm 18i}{2} = -3 \pm 9i.$$

1.2.4 Решения уравнения третьей степени (Формулы Кардано)

Уравнения третьей степени $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$, легко свести к уравнению вида $x^3 + px + q = 0$ (достаточно сначала разделить на a, а затем сделать замену $y = x + a_1/3$, где $a_1 = b/a$). Для уравнения $x^3 + px + q = 0$ введём[2] обозначения:

$$\varepsilon = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} = e^{2\pi i/3};$$
$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}};$$
$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}.$$

Пусть x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $x^3 + px + q = 0$. Обозначим

$$z_1 := x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^{-1} x_3, \quad z_2 := x_1 + \varepsilon^{-1} x_2 + \varepsilon x_3.$$

Проверим справедливость следующих равенств

$$z_1^3 + z_2^3 = -27q, \quad z_1 z_2 = -3p.$$

Действительно, учитывая равенства

$$\varepsilon^3 = (\varepsilon^{-1})^3 = 1, \quad \varepsilon + \varepsilon^{-1} = -1,$$
$$\varepsilon^2 + \varepsilon^{-2} = (\varepsilon + \varepsilon^{-1})^2 - 2\varepsilon \cdot \varepsilon^{-1} = 1 - 2 = -1,$$

и теорему Виета

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_1 x_2 x_3 = -q$$

[2]Под u, v мы понимаем не все значения корней, а лишь их произвольное единственное значение. Это в дальнейшим облегчит вычисления корней кубического уравнения по формулам Кардано.

получаем

$$
\begin{aligned}
&z_1^3+z_2^3=\\
&=x_1^3+x_2^3+x_3^3+3\varepsilon x_1x_2(x_1+\varepsilon x_2)+3\varepsilon^{-1}x_1x_3(x_1+\varepsilon^{-1}x_3)+3x_2x_3(\varepsilon x_2+\varepsilon^{-1}x_3)+6x_1x_2x_3+\\
&+x_1^3+x_2^3+x_3^3+3\varepsilon^{-1}x_1x_2(x_1+\varepsilon^{-1}x_2)+3\varepsilon x_1x_3(x_1+\varepsilon x_3)+3x_2x_3(\varepsilon^{-1}x_2+\varepsilon x_3)+6x_1x_2x_3=\\
&=2(x_1^3+x_2^3+x_3^3)-3x_1x_2(x_1+x_2)-3x_1x_3(x_1+x_3)-3x_2x_3(x_2+x_3)+12x_1x_2x_3=\\
&=2(x_1+x_2+x_3)^3-9x_1x_2(x_1+x_2)-9x_1x_3(x_1+x_3)-9x_2x_3(x_2+x_3)=\\
&=2\cdot 0-9x_1x_2(-x_3)-9x_1x_3(-x_2)-9x_2x_3(-x_1)=27x_1x_2x_3=-27q,
\end{aligned}
$$

и

$$
\begin{aligned}
z_1z_2&=x_1^2+x_2^2+x_3^2-(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=\\
&=(x_1+x_2+x_3)^2-3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=\\
&=0-3p=-3p.
\end{aligned}
$$

Откуда остаётся сделать вывод, что z_1^3, z_2^3 — корни квадратного уравнения

$$y^2+27qy-27p^3=0.$$

Решив которое (например, через дискриминант квадратного уравнения) находим

$$y_{1,2}=\frac{-27q\pm\sqrt{27^2q^2+4\cdot 27p^3}}{2}=27\cdot\left(-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2}\right).$$

Откуда

$$z_1=3v,\quad z_2=3u.$$

Нами получена система

$$
\begin{cases}
x_1+x_2+x_3=0,\\
x_1+\varepsilon x_2+\varepsilon^{-1}x_3=3v,\\
x_1+\varepsilon^{-1}x_2+\varepsilon x_3=3u.
\end{cases}
$$

Сложив все равенства, приходим к формуле $x_1=u+v$. Домножим второе уравнение в системе на ε^{-1}, а третье на ε и сложим получившиеся три уравнения, получаем $x_2=\varepsilon u+\varepsilon^{-1}v$. Теперь домножим второе уравнение в системе на ε, а третье на ε^{-1} и сложим получившиеся три уравнения, получаем $x_3=\varepsilon^{-1}u+\varepsilon v$. Таким образом получены формулы[2] Кардано:

$$
\begin{aligned}
x_1&=u+v;\\
x_2&=\varepsilon u+\varepsilon^{-1}v;\\
x_3&=\varepsilon^{-1}u+\varepsilon v.
\end{aligned}
$$

П р и м е р 1.2.3. Решить уравнение $x^3-3x=0$. В данном случае легко убедиться, что $x_1=0$, $x_2=-\sqrt{3}$, $x_3=\sqrt{3}$ — корни уравнения. Получим их при помощи формул Кардано. Используя то, что одним из корней

[2]Если корни понимать как многозначные функции, то формулы Кардано можно записать в виде

$$x_{1,2,3}=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2}}.$$

А при помощи дискриминанта (1.2.7) в виде

$$x_{1,2,3}=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{-\frac{D}{108}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{-\frac{D}{108}}}.$$

Отметим, что хотя данные формулы выглядят более компактно, для конкретных вычислений они громоздки, поскольку приходится вычислять квадратный корень из комплексного числа и вычислять дважды кубические корни из различных комплексных чисел.

$\sqrt[6]{-1}$ является i. Действительно[3], $i^6 = -1$. В нашем случае справедливо

$$\begin{aligned}
&p = -3, \quad q = 0;\\
&\varepsilon = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = e^{2\pi i/3}, \quad \varepsilon^{-1} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} = e^{-2\pi i/3};\\
&u = \sqrt[3]{0+\sqrt{-1+0}} = \sqrt[6]{-1} = i;\\
&v = \sqrt[3]{-0-\sqrt{-1+0}} = -\sqrt[6]{-1} = -i.
\end{aligned}$$

Откуда по формулам Кардано находим

$$\begin{aligned}
&x_1 = u+v = 0;\\
&x_2 = \varepsilon u + \varepsilon^{-1} v = e^{2\pi i/3}\cdot i - e^{-2\pi i/3}\cdot i = -\sqrt{3};\\
&x_3 = \varepsilon^{-1} u + \varepsilon v = e^{-2\pi i/3}\cdot i - e^{2\pi i/3}\cdot i = \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

П р и м е р 1.2.4. Решить уравнение $x^3-3x+2=0$. В данном случае легко убедиться, что $x_1=-2$, $x_2=1$, $x_3=1$ — корни уравнения. Например, это вытекает из представления $x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$. Найдём корни при помощи формул Кардано. Справедливо

$$\begin{aligned}
&p = -3, \quad q = 2;\\
&u = \sqrt[3]{-1+\sqrt{-1+1}} = -1, \quad v = \sqrt[3]{-1-\sqrt{-1+1}} = -1.
\end{aligned}$$

Откуда по формулам Кардано находим

$$\begin{aligned}
&x_1 = u+v = -2;\\
&x_2 = \varepsilon u + \varepsilon^{-1} v = -e^{2\pi i/3} - e^{-2\pi i/3} = 1;\\
&x_3 = \varepsilon^{-1} u + \varepsilon v = -e^{-2\pi i/3} - e^{2\pi i/3} = 1.
\end{aligned}$$

П р и м е р 1.2.5. Решить уравнение $x^3+3x=0$. В данном случае легко убедиться, что $x_1=0$, $x_2=\sqrt{3}i$, $x_3=-\sqrt{3}i$ — корни уравнения. Получим их при помощи формул Кардано. Справедливо

$$\begin{aligned}
&p = -3, \quad q = 0;\\
&u = \sqrt[3]{0+\sqrt{1+0}} = 1;\\
&v = \sqrt[3]{-0-\sqrt{1+0}} = 1.
\end{aligned}$$

Откуда по формулам Кардано находим

$$\begin{aligned}
&x_1 = u+v = 0;\\
&x_2 = \varepsilon u + \varepsilon^{-1} v = e^{2\pi i/3} - e^{-2\pi i/3} = \sqrt{3}i;\\
&x_3 = \varepsilon^{-1} u + \varepsilon v = e^{-2\pi i/3} - e^{2\pi i/3} = -\sqrt{3}i.
\end{aligned}$$

П р и м е р 1.2.6. Решить уравнение $x^3-3x^2-9x-5=0$. Поскольку коэффициент при x^2 отличен от нуля, нужно сделать замену $y=x+b/3a=x-1$. Откуда

$$\begin{aligned}
&x^3-3x^2-9x-5=0 \iff\\
&\iff (y+1)^3-3(y+1)^2-9(y+1)-5=0 \iff\\
&\iff (y^3+3y^2+3y+1)-3(y^2+2y+1)-9(y+1)-5=0 \iff\\
&\iff y^3-12y-16=0.
\end{aligned}$$

[3]Напомним, что в качестве u, v мы выбираем произвольное значение соответствующего корня.

Найдём корни последнего уравнения при помощи формул Кардано. Справедливо

$$p = -12, \quad q = -16;$$
$$u = \sqrt[3]{8 + \sqrt{-64+64}} = 2, \quad v = \sqrt[3]{8 - \sqrt{-64+64}} = 2.$$

Откуда по формулам Кардано находим

$$y_1 = u + v = 4;$$
$$y_2 = \varepsilon u + \varepsilon^{-1} v = 2(e^{2\pi i/3} + e^{-2\pi i/3}) = -2;$$
$$y_3 = \varepsilon^{-1} u + \varepsilon v = 2(e^{-2\pi i/3} + e^{2\pi i/3}) = -2.$$

С помощью замены $y = x - 1$ получаем $x = y + 1$. Откуда $x_1 = 5$, $x_2 = -1$, $x_3 = -1$ — корни исходного уравнения.

Действительно, легко убедиться, что $x_1 = 5$, $x_2 = -1$, $x_3 = -1$ — корни уравнения. Например, это вытекает из представления $x^3 - 3x - 9x - 5 = (x+1)^2(x-5)$.

Дискриминант кубического уравнения.

Изучим дискриминант более подробно. Пусть x_1, x_2, x_3 будут корнями уравнения $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, $a_3 \neq 0$, $a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$. У многочлена с действительными коэффициентами, если есть комплексный корень, то обязательно корнем уравнения будет и комплексно-сопряжённый. Поэтому имеется ровно три случая

I) все корни действительны и различны $x_1,\ x_2,\ x_3 \in \mathbb{R}$.

II) все корни действительны, но хотя бы два из них совпадают $x_1,\ x_2,\ x_3 \in \mathbb{R}$.

III) один корень действительный $x_1 \in \mathbb{R}$ и два мнимых комплексно-сопряжённых корня $x_3 = \bar{x}_2$, $x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.

Из определения дискриминанта для уравнения $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ в каждом из трёх случаев мы получаем

I) $D = a_3^4(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2 > 0$.

II) $D = a_3^4(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2 = 0$.

III) $D = a_3^4(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2 =$
$a_3^4\left((x_1 - x_2)(x_1 - \bar{x}_2)\right)^2(x_2 - \bar{x}_2)^2 = -a_3^4|x_1 - x_2|^4(\mathrm{Im} x_2)^2 < 0$.

Итог о корнях кубического уравнения опять приведём в виде таблицы

$\mathbf{D > 0}$	$\mathbf{D = 0}$	$\mathbf{D < 0}$
три различных действительных корня	корни действительные, причём хотя бы два из них совпадают	один действительный корень и два комплексно-сопряжённых

П р и м е р 1.2.7. Есть ли комплексные корни у многочлена $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$? Согласно формуле (1.2.8) для дискриминанта имеем

$$D = 1 - 4 - 4 + 18 - 27 = -16 < 0.$$

Откуда делаем вывод, что уравнение имеет один действительный и два комплексно-сопряжённых корня. Заметим, что данное уравнение можно легко решить. Действительно,

$$x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \Longleftrightarrow x^2(x+1) + (x+1) = 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (x+1)(x^2+1) = 0 \Longleftrightarrow x_1 = -1, \quad x_{2,3} = \pm i.$$

1.2.5 Решения уравнения четвёртой степени (при помощи формул Кардано)

Уравнение четвёртой степени $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, $a \neq 0$, легко свести к уравнению вида $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, достаточно сначала разделить на a, а затем сделать замену $y = x + a_1/4$, где $a_1 = b/a$. Для уравнения $z^3 - pz^2 - 4rz + (4pr - q^2) = 0$ обозначим его корни z_1, z_2, z_3. Корни z_1, z_2, z_3 уравнения $z^3 - pz^2 - 4rz + (4pr - q^2) = 0$ связаны с корнями x_1, x_2, x_3, x_4 уравнения $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ при помощи соотношений

$$z_1 = x_1x_2 + x_3x_4, \quad z_2 = x_1x_3 + x_2x_4, \quad z_3 = x_1x_4 + x_2x_3.$$

Уравнение $z^3 - pz^2 - 4rz + (4pr - q^2) = 0$ называют кубической резольвентой уравнения $x^4 + px^2 + qx + r = 0$. Корни z_1, z_2, z_3 находим согласно формулам Кардано. Затем, доказав соотношения

$$\begin{aligned}
&(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2 = 4(z_1 - p),\\
&(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 = 4(z_2 - p),\\
&(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)^2 = 4(z_3 - p),\\
&(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)(x_1 - x_2 - x_3 + x_4) = -8q,
\end{aligned}$$

приходим к равенствам

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,\\
&x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2\sqrt{z_1 - p},\\
&x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2\sqrt{z_2 - p},\\
&x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2\sqrt{z_3 - p},
\end{aligned}$$

из которых и получаем формулы для нахождения корней четвёртой степени:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{z_1 - p} + \sqrt{z_2 - p} + \sqrt{z_3 - p}\right);\\
x_2 &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{z_1 - p} - \sqrt{z_2 - p} - \sqrt{z_3 - p}\right);\\
x_3 &= \frac{1}{2}\left(-\sqrt{z_1 - p} - \sqrt{z_2 - p} + \sqrt{z_3 - p}\right);\\
x_4 &= \frac{1}{2}\left(-\sqrt{z_1 - p} + \sqrt{z_2 - p} - \sqrt{z_3 - p}\right),
\end{aligned}$$

причём значения квадратных корней выбираем таким образом, чтобы их произведение равнялось $-q$, т.е. чтобы было выполнено

$$\sqrt{z_1 - p} \cdot \sqrt{z_2 - p} \cdot \sqrt{z_3 - p} = -q.$$

Корни z_1, z_2, z_3 уравнения $z^3 - pz^2 - 4rz + (4pr - q^2) = 0$ могут быть вычислены, например, по формулам Кардано.

П р и м е р 1.2.8. Решить уравнение $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$. Составим кубическую резольвенту данного уравнения

$$\begin{aligned}
&p = -5, \quad q = 0, \quad r = 4;\\
&z^3 + 5z^2 - 16z - 80 = 0 \Longleftrightarrow z^2(z + 5) - 16(z + 5) = 0 \Longleftrightarrow\\
&\Longleftrightarrow (z^2 - 16)(z + 5) = 0.
\end{aligned}$$

Откуда

$$z_1 = -5, \quad z_2 = -4, \quad z_3 = 4.$$

Выберем корни следующим образом[2]

$$\begin{aligned}
\sqrt{z_1 - p} &= \sqrt{-5 + 5} = 0,\\
\sqrt{z_2 - p} &= \sqrt{-4 + 5} = 1,\\
\sqrt{z_3 - p} &= \sqrt{4 + 5} = 3.
\end{aligned}$$

[2] Не забываем, что у $\sqrt{z}$ при $z \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$ всегда два значения.

Действительно, равенство $\sqrt{z_1-p}\cdot\sqrt{z_2-p}\cdot\sqrt{z_3-p}=-q=0$ выполнено. Окончательно, находим

$$x_1=\frac{1}{2}\left(\sqrt{z_1-p}+\sqrt{z_2-p}+\sqrt{z_3-p}\right)=\frac{1}{2}(0+1+3)=2;$$
$$x_2=\frac{1}{2}\left(\sqrt{z_1-p}-\sqrt{z_2-p}-\sqrt{z_3-p}\right)=\frac{1}{2}(0-1-3)=-2;$$
$$x_3=\frac{1}{2}\left(-\sqrt{z_1-p}-\sqrt{z_2-p}+\sqrt{z_3-p}\right)=\frac{1}{2}(-0-1+3)=1;$$
$$x_4=\frac{1}{2}\left(-\sqrt{z_1-p}+\sqrt{z_2-p}-\sqrt{z_3-p}\right)=\frac{1}{2}(-0+1-3)=-1.$$

Таким образом мы нашли корни уравнения $x^4-5x^2+4=0$.

В данном случае мы могли прийти к тому же результату намного проще:

$$x^4-5x^2+4=0 \Longleftrightarrow (x^2-1)(x^2-4)=0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (x-1)(x+1)(x-2)(x+2)=0.$$

П р и м е р 1.2.9. Решить уравнение $x^4+4x^3+9x^2+16x+20=0$. Поскольку коэффициент при x^3 отличен от нуля, нужно сделать замену $y=x+b/4a=x+1$. Откуда

$$\begin{aligned}
&x^4+4x^3+9x^2+16x+20=0 \Longleftrightarrow\\
&\Longleftrightarrow (y-1)^4+4(y-1)^3+9(y-1)^2+16(y-1)+20=0 \Longleftrightarrow\\
&\Longleftrightarrow (y-4y^3+6y^2-4y+1)+4(y^3-3y^2+3y-1)+\\
&+9(y^2-2y+1)+16y+4=0 \Longleftrightarrow\\
&\Longleftrightarrow y^4+3y^2+6y+10=0.
\end{aligned}$$

Найдём корни последнего уравнения. Составим кубическую резольвенту данного уравнения

$$p=3, \quad q=6, \quad r=10;$$
$$z^3-3z^2-40z+84=0.$$

Откуда по формулам Кардано, либо из разложения $z^3-3z^2-40z+84=(z+6)(z-2)(z-7)$, находим

$$z_1=-6, \quad z_2=2, \quad z_3=7.$$

Выберем корни следующим образом[2]

$$\sqrt{z_1-p}=\sqrt{-6-3}=3i,$$
$$\sqrt{z_2-p}=\sqrt{2-3}=i,$$
$$\sqrt{z_3-p}=\sqrt{7-3}=2.$$

Действительно, равенство $\sqrt{z_1-p}\cdot\sqrt{z_2-p}\cdot\sqrt{z_3-p}=-q$ выполнено, т.к. $3i\cdot i\cdot 2=-6$. Окончательно, находим

$$y_1=\frac{1}{2}\left(\sqrt{z_1-p}+\sqrt{z_2-p}+\sqrt{z_3-p}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}(3i+3+2)=1+2i;$$
$$y_2=\frac{1}{2}\left(\sqrt{z_1-p}-\sqrt{z_2-p}-\sqrt{z_3-p}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}(3i-i-2)=-1+i;$$
$$y_3=\frac{1}{2}\left(-\sqrt{z_1-p}-\sqrt{z_2-p}+\sqrt{z_3-p}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}(-3i-i+2)=1-2i;$$
$$y_4=\frac{1}{2}\left(-\sqrt{z_1-p}+\sqrt{z_2-p}-\sqrt{z_3-p}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}(-3i+i-2)=-1-i.$$

[2] Не забываем, что у $\sqrt{z}$ при $z\neq 0$, $z\in\mathbb{C}$ всегда два значения, так, в данном случае $\sqrt{-6-3}=\pm 3i$, $\sqrt{2-3}=\pm i$, $\sqrt{7-3}=\pm 2$.

Таким образом мы нашли корни уравнения $y^4+3y^2+6y+10=0$. С помощью замены $y=x+1$ получаем $x=y-1$. Откуда

$$x_1=2i,\quad x_2=-2-i,\quad x_3=-2i,\quad x_4=-2-i$$

корни исходного уравнения.

Действительно, легко убедиться, что $x_1=2i$, $x_2=-2-i$, $x_3=-2i$, $x_4=-2-i$ — корни исходного уравнения. Например, это вытекает из представления

$$x^4+4x^3+9x^2+16x+20=(x^2+4)(x^2+4x+5).$$

Дискриминант уравнения четвёртой степени.

Пусть x_1,x_2,x_3,x_4 будут корнями уравнения $a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$, $a_4\neq 0$, $a_4,a_3,a_2,a_1,a_0\in\mathbb{R}$. Если у многочлена с действительными коэффициентами есть комплексный корень, то обязательно корнем уравнения будет и комплексно-сопряжённое с ним. Поэтому имеется ровно три случая:

I) все корни различны и либо действительные x_1, x_2, x_3, $x_4\in\mathbb{R}$, либо комплексные x_1, x_2, x_3, $x_4\in\mathbb{C}$. Причём в случае комплексных чисел имеем две пары комплексно-сопряжённых корней $x_2=\bar{x}_1$, $x_4=\bar{x}_3$, $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$.

II) хотя бы два корня совпадают $x_k=x_l$, $k\neq l$, $k,l=1,2,3,4$.

III) два действительных корня $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ и два мнимых комплексно-сопряжённых корня $x_4=\bar{x}_3$, $x_3,x_4\in\mathbb{C}$.

Из определения дискриминанта для уравнения $a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$ в каждом из трёх случаев мы получаем

I) для действительных корней очевидно $D>0$. Для комплексных корней $D=a_4^4(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_1-x_4)^2\cdot(x_2-x_3)^2(x_2-x_4)^2(x_3-x_4)^2=a_4^4\left(i\cdot\mathrm{Im}x_1\right)^2\left(i\cdot\mathrm{Im}x_3\right)^2\cdot|x_1-x_3|^4|x_1-\bar{x}_3|^4=a_4^4\left(i\cdot\mathrm{Im}x_1\right)^2\left(i\cdot\mathrm{Im}x_3\right)^2|x_1-x_3|^4\cdot|x_1-\bar{x}_3|^4>0$.

II) $D=a_4^4(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_1-x_4)^2(x_2-x_3)^2(x_2-x_4)^2\cdot(x_3-x_4)^2=0$.

III) $D=a_4^4(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_1-x_4)^2(x_2-x_3)^2(x_2-x_4)^2\cdot(x_3-x_4)^2=a_4^4(x_1-x_2)^2|x_1-x_3|^4|x_2-x_3|^4\left(i\cdot\mathrm{Im}x_3\right)^2=-a_4^4(x_1-x_2)^2|x_1-x_3|^4|x_2-x_3|^4\left(\mathrm{Im}x_3\right)^2<0$. Итог о корнях уравнения четвёртой степени опять привидём в виде таблицы

$\mathbf{D>0}$	$\mathbf{D=0}$	$\mathbf{D<0}$
корни различны и либо все действительные, либо имеются две пары комплексно-сопряжённых корней	среди корней хотя бы два одинаковых	два действительных и два комплексно-сопряжённых корня

Дискриминант уравнения произвольной степени.

Имеем следующие возможности:

I) все корни различны и либо действительные, либо комплексные. Причём комплексному корню найдётся комплексно-сопряжённый корень.

II) хотя бы два корня совпадают.

Из определения дискриминанта, как и ранее, несложно доказать[2], что для дискриминанта справедливы следующие представления:

I) $\operatorname{sign}D=(-1)^k$, где k — количество комплексно-сопряжённых корней.

II) $D=0$.

[2] Проделайте это в качестве упражнения.

Итог о корнях уравнения произвольной степени опять приведём в виде таблицы

$\mathbf{D = (-1)^k}$	$\mathbf{D = 0}$
корни различны и среди корней ровно k пар комплексно-сопряжённых	среди корней найдутся хотя бы два одинаковых корня

Контрольные вопросы.

1. Имеет ли решение уравнение $\cos x = 10$? Если да, то сколько?
2. Сколько корней имеет уравнение вида $a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$ в комплексной плоскости?

Упражнения к 1.2

В задачах 1.2.1-1.2.20 найти все решения в комплексной области $\mathbb{C}$.

Упражнение 1.2.1. *Решить уравнение* $x^2 + 64 = 0$.

Упражнение 1.2.2. *Решить уравнение* $x^2 + 6x + 10 = 0$.

Упражнение 1.2.3. *Решить уравнение* $x^2 - 5x - 150 = 0$.

Упражнение 1.2.4. *Решить уравнение* $x^2 + 14x + 58 = 0$.

Упражнение 1.2.5. *Решить уравнение* $x^3 - 2x + 4 = 0$.

Упражнение 1.2.6. *Решить уравнение* $x^3 - 3x + 52 = 0$.

Упражнение 1.2.7. *Решить уравнение* $x^3 + 37x - 212 = 0$.

Упражнение 1.2.8. *Решить уравнение* $x^3 + 9x^2 - 34x - 336 = 0$.

Упражнение 1.2.9. *Решить уравнение* $x^3 + 4x^2 + 21x + 34 = 0$.

Упражнение 1.2.10. *Решить уравнение* $x^3 + 11x^2 + 23x + 45 = 0$.

Упражнение 1.2.11. *Решить уравнение* $x^3 + 2.92x - 5.232 = 0$.

Упражнение 1.2.12. *Решить уравнение* $x^3 + 2\sqrt{3}x^2 - 12x - 24\sqrt{3} = 0$.

Упражнение 1.2.13. *Решить уравнение* $x^3 - \sqrt{7}x^2 + 5x - 5\sqrt{7} = 0$.

Упражнение 1.2.14. *Решить уравнение* $x^4 + 8x^2 - 16x + 20 = 0$.

Упражнение 1.2.15. *Решить уравнение* $x^4 + 18x^2 - 24x + 85 = 0$.

Упражнение 1.2.16. *Решить уравнение* $x^4 - 37x^2 - 74x - 70 = 0$.

Упражнение 1.2.17. *Решить уравнение* $x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$.

Упражнение 1.2.18. *Решить уравнение* $x^4 - 2x^3 + 14x^2 - 18x + 45 = 0$.

Упражнение 1.2.19. *Решить уравнение* $x^4 - 2x^3 - 62x^2 + 128x - 128 = 0$.

Упражнение 1.2.20. *Решить уравнение* $x^4 - 14x^3 + 51x^2 - 28x + 98 = 0$.

Ответы: 1.2.1 $x_{1,2} = \pm 8i$. **1.2.2** $x_{1,2} = -3 \pm i$. **1.2.3** $x_1 = -10$, $x_2 = 15$. **1.2.4** $x_{1,2} = -7 \pm 3i$. **1.2.5** $x_1 = -2$, $x_{2,3} = 1 \pm 2i$. **1.2.6** $x_1 = -4$, $x_{2,3} = 2 \pm 3i$. **1.2.7** $x_1 = -4$, $x_{2,3} = -2 \pm 7i$. **1.2.8** $x_1 = -8$, $x_2 = -7$, $x_3 = 6$. **1.2.9** $x_1 = -2$, $x_{2,3} = -1 \pm 4i$. **1.2.10** $x_1 = -9$, $x_{2,3} = -1 \pm 2i$. **1.2.11** $x_1 = 6/5$, $x_{2,3} = -3/5 \pm 4i$. **1.2.12** $x_1 = 2\sqrt{3}$, $x_2 = x_3 = -2\sqrt{3}$. **1.2.13** $x_1 = \sqrt{7}$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{5}i$. **1.2.14** $x_{1,2} = -1 \pm 3i$, $x_{3,4} = 1 \pm i$. **1.2.15** $x_{1,2} = 1 \pm 2i$, $x_{3,4} = -1 \pm 4i$. **1.2.16** $x_1 = -5$, $x_2 = 7$, $x_{3,4} = -1 \pm i$. **1.2.17** $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_{3,4} = -1 \pm i$. **1.2.18** $x_{1,2} = 1 \pm 2i$, $x_{3,4} = \pm 3i$. **1.2.19** $x_{1,2} = 1 \pm i$, $x_{3,4} = \pm 8$. **1.2.20** $x_1 = x_2 = 7$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{2}i$.

Глава 2

Матрицы. Определители

2.1 Определители и системы линейных уравнений

2.1.1 Введение

В математике и ее приложениях часто приходится решать так называемые *системы линейных уравнений*:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{2.1.1}$$

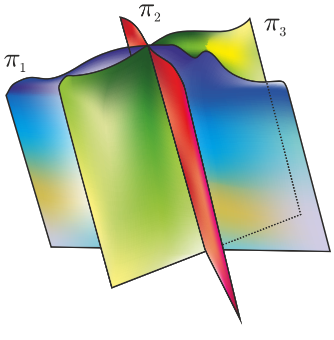
Важным случаем системы (2.1.1) является *однородная система*:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{2.1.2}$$

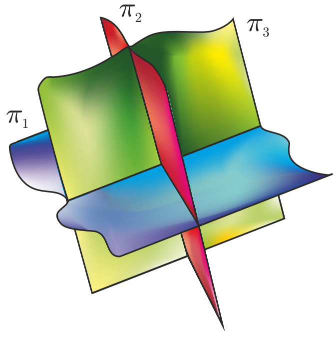
Систему (2.1.1) можно расматривать как обобщение уравнения $ax = b$. Если $a \neq 0$, то оно всегда имеет решение $x = a^{-1}b$. Если $a = 0$, то если $b = 0$, получается уравнение $0 \cdot x = 0$, которому удовлетворяют все x. Если $b \neq 0$, то получим уравнение $0 \cdot x = b$, не имеющее решений. Эти соображения пригодятся в дальнейшем. Решение систем — одна из важных задач *линейной алгебры*, к систематическому изложению которой мы сейчас приступим.

Геометрическая интерпритация системы (случай $n = m = 3$)

Поскольку в случае трёх переменных x_1, x_2, x_3 уравнения вида $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3 = b_k$ представляют собой плоскость, то решение системы (2.1.1) для случая $n = m = 3$ можно проиллюстрировать.



(a)



(b)

Рис. 2.1: (a): Бесконечное число решений; (b): Одно решение.

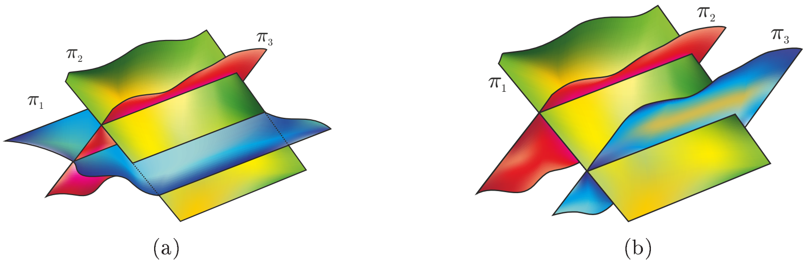


Рис. 2.2: (a),(b): Нет решений.

2.1.2 Матрицы и операции над ними

Определение 2.1.1. Матрица — это прямоугольная таблица с m строками и n столбцами, имеющая вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Определение 2.1.2. Матрицы A, B назаваются равными, если у них одинаковое число строк m и столбцов n и если для любых i, j, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ выполнено $a_{ij} = b_{ij}$.

Для матриц A, B одного размера определена сумма $A + B$, имеющая элементы $a_{ij} + b_{ij}$. Можно также определить умножение числа α на матрицу A, как матрицу αA с элементами αa_{ij}. Существенно далее важную роль будет играть операция умножения матриц.

Для матриц

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}$$

(число столбцов 1-й матрицы совпадает с числом строк 2-й матрицы) определим их произведение как матрицу размера $m \times p$,

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix}.$$

с элементами $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$.

П р и м е р 2.1.1.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{pmatrix},$$

где

$$c_{11} = 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 3,$$
$$c_{12} = 3 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 0 = 6,$$
$$c_{13} = 3 \cdot 3 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 10,$$
$$c_{14} = 3 \cdot 4 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 12.$$

Аналогично $c_{21} = 2$, $c_{22} = 13$, $c_{23} = 8$, $c_{24} = 11$. Итак

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 10 & 12 \\ 2 & 13 & 8 & 11 \end{pmatrix}.$$

2.1.3 Матричная запись системы линейных уравнений

По определению произведения, матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

умноженная на вектор $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, дает вектор-столбец с m координатами, именно

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

Тогда систему уравнений можно рассматривать, как равенство векторов

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

Итак, нами получена краткая запись системы уравнений. Если вернуться к уравнению $ax = b$ при $a \neq 0$ и его решению $x = a^{-1}b$, то было бы желательно получить равенство вида $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ при условиях на A, обобщающих условие $a \neq 0$.

Надо прежде всего понять, что такое A^{-1}? Для этого вновь обратимся к числам. Для любого a имеют место равенства: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$. И если $a \neq 0$, то существует число a^{-1} такое, что $a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = 1$. Для построения аналога этого равенства определим единичную матрицу так:

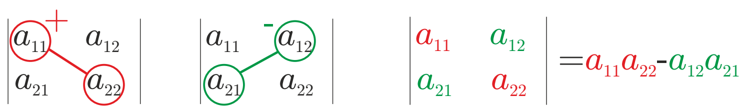
$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Она имет размер $n \times n$ и при умножении на любую матрицу A размера $n \times n$ получаем $AE = EA = A$. (А для матриц, размер которых не равен $n \times n$, оба эти произведения не могут быть одновременно определены.) Тогда вновь для матрицы размера $n \times n$ назовем A^{-1} такую матрицу, что $A^{-1}A = AA^{-1} = E$.

Основные вопросы сейчас — существует ли такая матрица? Если существует, то как ее найти? На эти вопросы мы дадим ответы чуть позже.

2.1.4 Определитель 2×2 и 3×3

Для того, чтобы выяснить, существует ли обратная матрица A^{-1} для матрицы A, рассмотрим так называемый *определитель матрицы* A. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ второго порядка, ее определитель $|A|$, по



(a) (b)

Рис. 2.3: (a): Расставление знаков; Правило вычисления определителя второго порядка.

определению, равен

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22}.$$

Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

ее определитель, по определинию, равен

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

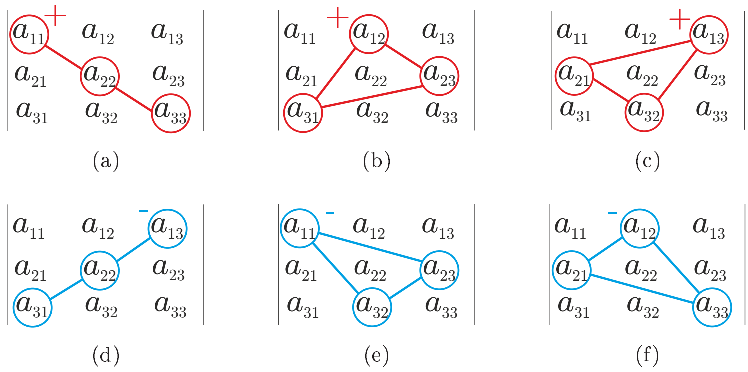


Рис. 2.4: (a)-(c): Составление положительных сумм; (d)-(f): Составление отрицательных сумм; Правило вычисления определителя третьего порядка.

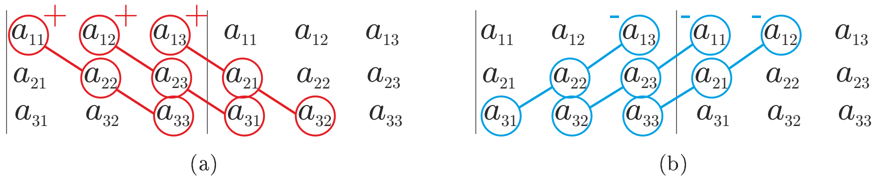


Рис. 2.5: (a): Расставление положительных знаков; (b): Расставление отрицательных знаков; Ещё одно правило вычисления определителя третьего порядка.

Дадим более удобное для запоминания правило для вычисления определителя. Для этого представим правую часть этого равенства в виде

$$a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})+(-1)a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})=$$
$$=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}.$$

Число $(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$ называется *алгебраическим дополнением* a_{11} и обозначается A_{11}, число $(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$ — алгебраическим дополнением элемента a_{23} и т.д. Вообще, чтобы получить алгебраическое дополнение элемента a_{ij}, нужно вычеркнуть из определителя строку с номером i и столбец с номером j. Оставшийся определитель умножаем на $(-1)^{i+j}$.

Еще один пример:

$$A=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}; \quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}.$$

Доказанное равенство можно представить в виде:

$$|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}.$$

Аналогичным образом можно доказать равенства, составляющие утверждение следующей теоремы.

Теорема 2.1.1.

$$\begin{aligned}|A|=&a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}=\\ &a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}=\\ &a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}=a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33}.\end{aligned}$$

Для матрицы A порядка 4 ее определитель считаем равным, по определению,

$$|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}+a_{14}A_{14}.$$

Можно снова доказать теорему, гласящую

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} + a_{i4}A_{i4}, \quad i = 1,2,3,4$$

и

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} + a_{4j}A_{4j}, \quad j = 1,2,3,4,$$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij}, т.е. определитель, полученный из $|A|$ вычеркиванием строки с номером i, стольца с номером j, а затем умноженный на $(-1)^{i+j}$. Аналогично можно определять определители для матриц порядка 5, 6 и т.д., вообще, порядка n. Для них также справедлива теорема, аналогичная сформулированной.

2.1.5 Перестановки и транспозиция. Выражение определителя через его коэффициенты (случай $n \times n$)

Выражения для определителей матриц второго и третьего порядка, на первый взгляд, совсем не похожи друг на друга. Однако при более внимательном их рассмотрении можно заметить, что как величина

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

так и величина

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

имеют определённые закономерности строения.

В каждом из этих произведений первыми номерами их сомножителей являются числа 1 и 2 (у элементов a_{11}, a_{12} первый номер равен 1, у элементов a_{21}, a_{22} первый номер равен 2), вторыми номерами — те же числа, но в разном порядке. Обратим внимание на то, что в каждом из произведений $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{13}a_{21}a_{32}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$, $a_{13}a_{22}a_{31}$, $a_{11}a_{23}a_{31}$, $a_{12}a_{21}a_{33}$ первые номера сомножителей — это числа 1, 2, 3. Вторые номера — те же числа 1, 2, 3, переставленные местами.

Перестановки

Числа 1, 2 можно переставить двумя различными способами: 1, 2 и 2, 1. Рассмотрим перестановки чисел 1, 2, 3. На первое место можно поставить любое из них. Это даёт 3 возможности. Зафиксировав число на первом месте, имеем две возможности выбора числа на втором месте. При фиксированных двух числах на первом и втором месте остаётся лишь одна возможность поставить число на третье место. Итого имеем $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ различных перестановок чисел 1, 2, 3. Рассуждая вполне аналогично, получаем, что имеется $n(n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$ различных перестановок чисел 1, 2, ..., n.

Перестановку чисел 1, 2, ..., n удобно обозначать так:

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ \tau(1) & \ldots & \tau(n) \end{pmatrix}, \tag{2.1.3}$$

где $\tau(1)$, ..., $\tau(n)$ — те же числа 1, 2, ..., n, но в другом порядке. Таким образом, любой член определителя второго порядка имеет вид $\pm a_{1\tau(1)}a_{2\tau(2)}$, а любой член определителя третьего порядка имеет вид $\pm a_{1\tau(1)}a_{2\tau(2)}a_{3\tau(3)}$.

Перейдём к вопросу о том, как определить знак, с которым члены указанного вида входят в определитель.

Определение 2.1.3. Рассмотрим перестановку (6.1.2) и назовём *инверсией* пару чисел $\tau(i)$, $\tau(j)$ таких, что $i < j$, но $\tau(i) > \tau(j)$. Назовём перестановку (6.1.2) *чётной*, если в ней чётное число инверсий и *нечётной*, если число инверсий нечётное.

П р и м е р 2.1.2. Перестановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ — нечётная с одной инверсией, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ — чётная перестановка с двумя инверсиями.

Определение 2.1.4. Перемена местами двух элементов в перестановке называется *транспозицией* этих элементов.

Лемма 1. *При любой транспозиции четность перестановки меняется.*

Рис. 2.6: (a): $s+1$ перестановка элемента k; (b): s перестановок элемента m.

Доказательство. При транспозиции соседних элементов меняется взаимное расположение только этих элементов, так что число инверсий изменяется (увеличивается или уменьшается) на 1; следовательно, четность меняется. Транспозиция элементов k и m, разделенных s другими элементами, может быть осуществлена путем $2s+1$ последовательных транспозиций соседних элементов (см. рис. 3.4): сначала переставляем k со всеми промежуточными элементами и с m, затем переставляем m со всеми промежуточными элементами. Каждый раз знак перестановки будет меняться по доказанному выше. Так как это произойдет нечетное число раз, то в результате знак перестановки изменится на противоположный. $\square$

Следствие 2.1.1. При $n>1$ число четных перестановок из n элементов равно числу нечетных.

Доказательство. Выпишем все четные перестановки и в каждой из них произведем транспозицию первых двух элементов. Тогда мы получим, причем по одному разу, все нечетные перестановки $\square$

Заметим, что в величине $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ со знаком плюс стоит выражение $a_{11}a_{22}$, соответствующее чётной перестановке $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (ноль инверсий), а со знаком минус стоит $a_{12}a_{21}$, соответствующее нечётной перестановке $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Аналогично, в выражение $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$ со знаком плюс входят выражения $a_{1\tau(1)}a_{2\tau(2)}a_{3\tau(3)}$, соответствующие чётным перестановкам

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

а со знаком минус — выражения $a_{1\tau(1)}a_{2\tau(2)}a_{3\tau(3)}$, соответствующие нечётным перестановкам

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$\sigma(\tau)=\sigma(\tau(1),\tau(2),\cdots,\tau(n))=\begin{cases} 1, & \text{если } \tau \text{ — нечётная перестановка,} \\ 0, & \text{если } \tau \text{ — чётная перестановка.} \end{cases}$$

Таким образом, величина $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ представляет собой сумму величин вида $(-1)^{\sigma(\tau)}a_{1\tau(1)}a_{2\tau(2)}$, взятую по всем перестановкам τ чисел 1, 2, а величина $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$ представляет собой сумму величин вида $(-1)^{\sigma(\tau)}a_{1\tau(1)}a_{2\tau(2)}a_{3\tau(3)}$, взятую по всем перестановкам τ чисел 1, 2, 3.

Обобщим это наблюдение:

Определение 2.1.5. Для квадратной матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

положим, по определению, определитель равным

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{\tau}(-1)^{\sigma(\tau)}a_{1\tau(1)}a_{2\tau(2)}\dots a_{n\tau(n)}, \tag{2.1.4}$$

где суммирование производится по всем перестановкам τ чисел 1, 2, ..., n.

Лемма 2. *Произвольное слагаемое* $a_{\alpha_1\beta_1}a_{\alpha_2\beta_2}\ldots a_{\alpha_n\beta_n}$ *из определителя* $\det A$ *входит в сумму со знаком*

$$(-1)^{\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)}.$$

Доказательство. В произведение $a_{\alpha_1\beta_1}a_{\alpha_2\beta_2}\ldots a_{\alpha_n\beta_n}$ поменяем множители так, чтобы по первому индексу было упорядочение, т.е. $a_{1\gamma_1}a_{2\gamma_2}\ldots a_{n\gamma_n}$. Для произведения $a_{1\gamma_1}a_{2\gamma_2}\ldots a_{n\gamma_n}$ знак в определителе $\det A$ будет

$$(-1)^{\sigma(\gamma)} = (-1)^{\sigma(e)+\sigma(\gamma)},$$

здесь $e = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ 1 & \ldots & n \end{pmatrix}$ — единичная перестановка. Если в произведение $a_{1\gamma_1}a_{2\gamma_2}\ldots a_{n\gamma_n}$ поменять местами, два любых элемента, то обе перестановки, отвечающие этому слагаемому

$$e = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ 1 & \ldots & n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ \gamma(1) & \ldots & \gamma(n) \end{pmatrix}$$

поменяют чётность[1], т.е. знак выражения

$$(-1)^{\sigma(e)+\sigma(\gamma)}$$

не изменится.

Поскольку из произведения $a_{1\gamma_1}a_{2\gamma_2}\ldots a_{n\gamma_n}$ мы получим произведение $a_{\alpha_1\beta_1}a_{\alpha_2\beta_2}\ldots a_{\alpha_n\beta_n}$ за некоторое число перестановок множителей a_{ij}, при каждом из которых знак у выражения $(-1)^{\sigma(e)+\sigma(\gamma)}$ не меняется, мы получим равенство

$$(-1)^{\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)} = (-1)^{\sigma(e)+\sigma(\gamma)} = (-1)^{\sigma(\gamma)}.$$

□

Контрольные вопросы.

1. Может ли определитель $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -3 & 9 & -9 \\ 2 & p & p-5 \end{pmatrix}$ быть положительным числом при некотором $p \in \mathbb{R}$?
2. Определите, является ли перестановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ чётной?
3. С каким знаком входит в определитель матрицы A размера 5×5 слагаемое $a_{23}a_{41}a_{54}a_{12}a_{35}$?

Упражнения к 2.1

Упражнение 2.1.1. *Найдите определители матриц* $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$, A^T, $B = \begin{pmatrix} 5+2 & 4+3 & 2+7 \\ 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

Упражнение 2.1.2. *Определите количество инверсий перестановки* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ n & n-1 & \ldots & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Упражнение 2.1.3. *Посчитайте число элементов группы* A_n *всех четных перестановок.*

Упражнение 2.1.4. *Какая перестановка имеет наибольшее возможное число инверсий? Чем, оно равно?*

Упражнение 2.1.5. *Сколько всего инверсий во всех перестановках из* S_n *вместе взятых?*

Ответы: 2.1.1 $|A| = |A^T| = 7$, $|B| = 0$. **2.1.2** $n(n-1)/2$. **2.1.3** $n!/2$. **2.1.4** $n(n-1)/2$. **2.1.5** $n(n-1)/2 \cdot n!/2$. *Указание:* Доказать, что если перестановка $\tau = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ \tau(1) & \ldots & \tau(n) \end{pmatrix}$ имеет k инверсий, то перестановка $\tau = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ \tau(n) & \ldots & \tau(1) \end{pmatrix}$ имеет $n(n-1)/2 - k$ инверсий.

---

[1] например, если поменять местами в перестановках первые два индекса, то новые перестановки $e' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 2 & 1 & 3 & \ldots & n \end{pmatrix}$ и $\gamma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \gamma(2) & \gamma(1) & \gamma(3) & \ldots & \gamma(n) \end{pmatrix}$ поменяли свою чётность

2.2 Свойства определителя. Теорема Лапласа

2.2.1 Основные свойства определителя

Перечислим основные свойства определителя. Они будут выписаны, для простоты, для определетилей 3-го порядка.

1. *Определитель матрицы A равен определителю транспонированной матрицы A^T, т.е.* $|A| = |A^T|$. Для транспонирования матрицы A следует ее строки сделать столбцами новой матрицы, которая и называется транспонированной матрицей A и обозначается A^T.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Доказательство. Определитель матрицы A^T, как и определитель матрицы A, есть сумма всевозможных произведений n элементов матрицы A, взятых по одному из каждой строки и из каждого столбца. Единственное, за чем надо проследить, — это то, что одинаковые произведения входят в $\det A$ и $\det A^T$ одинаковыми знаками.

Для доказательства того, что знаки не изменятся достаточно сослаться на лемму 2.

Приведём похожее доказательство, не использующее лемму 2: Для того чтобы выяснить, с каким знаком входит в $\det A^T$ произведение $a_{1k_1}a_{2k_2}\dots a_{nk_n}$, нужно расположить его сомножители по порядку номеров столбцов. Этого можно достичь, последовательно меняя местами два сомножителя. При каждой такой перемене в перестановках, образуемых номерами строк и столбцов, одновременно происходят транспозиции, так что произведение их знаков не меняется. Это и означает, что рассматриваемое произведение входит в $\det A$ и $\det A^T$ с одним и тем же знаком. □

Замечание 1. Из этого свойства сразу получаем, что все утверждения, сформулированные для строк определителя, верны и для его столбцов.

2. *Если в определителе поменять местами* 2 *любые строки (столбца), то он изменит знак.*

Доказательство. Обозначим через A' опредилитель матрицы, полученной из матрицы A заменой строк с номерами i и j. Определитель матрицы A', как и определитель матрицы A, есть сумма всевозможных произведений n элементов матрицы A, взятых по одному из каждой строки и из каждого столбца. Единственное, за чем надо проследить, — это то, что одинаковые произведения входят в $\det A$ и $\det A'$ одинаковыми знаками. Слагаемое

$$(-1)^{\sigma(k_1,\dots,k_i,\dots,k_j,\dots,k_n)} a_{1k_1}\dots a_{2k_i}\dots a_{2k_j}\dots a_{nk_n},$$

входящее в определитель A будет отличаться от слагаемого в определителе A' у которого местами передвинуты i и j места:

$$(-1)^{\sigma(k_1,\dots,k_j,\dots,k_i,\dots,k_n)} a_{1k_1}\dots a_{2k_j}\dots a_{2k_i}\dots a_{nk_n},$$

только знаком. Поскольку произведение не меняет результат, а чётность перестановка при транспозоции меняет, а следовательно и знак. □

Например, для матрицы 3×3 перестановка второй и третьей строки приводит к результату:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

3. *Если в определителе имеются* 2 *одинаковые строки (столбцы), то он равен* 0.

Доказательство. Действительно, достаточно поменять их местами. Тогда по свойству 2, полученный определитель равен $-|A|$. С другой стороны, строки одинаковые, поэтому определитель не изменился. Значит, $-|A| = |A|$, откуда $|A| = 0$. □

4. *Общий множитель строки (столбца) можно вынести за знак определителя.*

Доказательство. Обозначим через A' опредилитель матрицы, полученной из матрицы A путём умножения i-ой строки на число λ. Тогда

$$\det A' = \sum_{\tau}(-1)^{\sigma(\tau)}a_{1\tau(1)}\dots(\lambda\cdot a_{i\tau(i)})\dots a_{n\tau(n)} = \lambda\sum_{\tau}(-1)^{\sigma(\tau)}a_{1\tau(1)}\cdot\dots\cdot a_{i\tau(i)}\dots a_{n\tau(n)} = \lambda\det A.$$

□

Например, для матрицы 3×3 данное свойство принимает вид:

$$\begin{vmatrix}\lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} = \lambda\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}.$$

5. *Если в определителе есть 2 пропорцональные строки, то он равен 0.*

Доказательство. Последовательно применяем свойства 4 и 3. □

6. *Если все элементы i-ой строки определителя представлены в виде $a_{ij} = a'_{ij} + a''_{ij}$, то он равен сумме двух определителей, у которых i-ые строки состоят, соответственно, из элементов a'_{ij}, $j = 1,\dots,n$ и a''_{ij}, $j = 1,\dots,n$, а остальные строки такие же, как у исходного определителя.*

Доказательство. Вытекает из равенства

$$\sum_{\tau}(-1)^{\sigma(\tau)}a_{1\tau(1)}\dots(a'_{i\tau(i)} + a''_{i\tau(i)})\dots a_{n\tau(n)} =$$
$$= \sum_{\tau}(-1)^{\sigma(\tau)}a_{1\tau(1)}\dots a'_{i\tau(i)}\dots a_{n\tau(n)} + \sum_{\tau}(-1)^{\sigma(\tau)}a_{1\tau(1)}\dots a''_{i\tau(i)}\dots a_{n\tau(n)}.$$

□

Например, для матрицы 3×3 данное свойство принимает вид:

$$\begin{vmatrix}a'_{11}+a''_{11} & a'_{12}+a''_{12} & a'_{13}+a''_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a'_{11} & a'_{12} & a'_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}a''_{11} & a''_{12} & a''_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}.$$

Замечание 2. Не следует считать, что это свойство означает, что $|A+B| = |A| + |B|$. Это равенство в общем случае неверно.

7. *К любой строке (столбцу) определителя можно прибавить любую другую строку (столбец) определителя, умноженную на любое число, при этом определитель не изменится.*

Доказательство. Обозначим через A' опредилитель матрицы, полученной из матрицы A путём умножения прибавления k-ой строки к i-ой строки на число λ. Обозначим строки матрицы через $\vec{a_1},\dots,\vec{a_n}$. Тогда, используя доказанные уже свойства, получаем:

$$\det A' = \begin{vmatrix}\vec{a_1}\\ \dots\\ \vec{a_i}\\ \dots\\ \vec{a_k}+\lambda\vec{a_i}\\ \dots\\ \vec{a_n}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\vec{a_1}\\ \dots\\ \vec{a_i}\\ \dots\\ \vec{a_k}\\ \dots\\ \vec{a_n}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\vec{a_1}\\ \dots\\ \vec{a_i}\\ \dots\\ \lambda\vec{a_i}\\ \dots\\ \vec{a_n}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\vec{a_1}\\ \dots\\ \vec{a_i}\\ \dots\\ \vec{a_k}\\ \dots\\ \vec{a_n}\end{vmatrix} + \lambda\begin{vmatrix}\vec{a_1}\\ \dots\\ \vec{a_i}\\ \dots\\ \vec{a_i}\\ \dots\\ \vec{a_n}\end{vmatrix} = \det A.$$

□

Например, для матрицы 3×3 данное свойство принимает вид:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{21} & a_{12}+\lambda a_{22} & a_{13}+\lambda a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

8. *Если матрица A представима в виде*

$$\begin{pmatrix} A' & B \\ 0 & A'' \end{pmatrix},$$

где A', A'' — квадратные матрицы, 0 — нулевая матрица, то $\det A = \det A' \cdot \det A''$.

Доказательство. Доказательство будет приведено в следующем параграфе. □

Например, для матрицы 5×5 данное свойство принимает вид:

$$\det \left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_{11} & c_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & c_{21} & c_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c_{31} & c_{32} \\ \hline 0 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 & 0 & b_{21} & b_{22} \end{array}\right) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \det A \cdot \det B.$$

9. *Если определитель имеет вид*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix},$$

то он равен $a_{11}\dots a_{nn}$.

Доказательство. Получаем как следствие из предыдущего свойства (хотя можно доказать и напрямую). □

10. *Сумма произведений элементов i-ой строки на алгебраическое дополнение элементов i-ой строки равна* $\det A$. *Тоже верно для столбцов.*

Доказательство. Первый способ. Доказательство написано в следующем параграфе (как следствие теоремы Лапласа).

Второй способ. Обозначим, как и ранее, строки матрицы через $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n$. Положим $\vec{a}_i = \vec{b}_1+\dots+\vec{b}_n$, где $\vec{b}_k$ строка у которой все элементы нули, кроме места с номером k, где находится константа a_{ik}. Тогда

$$\det A = \begin{vmatrix} \vec{a_1} \\ \dots \\ \vec{a_k} \\ \dots \\ \vec{a_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{a_1} \\ \dots \\ \vec{b}_1+\dots+\vec{b}_n \\ \dots \\ \vec{a_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{a_1} \\ \dots \\ \vec{b}_1 \\ \dots \\ \vec{a_n} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} \vec{a_1} \\ \dots \\ \vec{b}_n \\ \dots \\ \vec{a_n} \end{vmatrix}.$$

Докажем равенство

$$\begin{vmatrix} \vec{a_1} \\ \dots \\ \vec{a}_{k-1} \\ \vec{b}_i \\ \vec{a}_{k+1} \\ \dots \\ \vec{a_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,i-1} & a_{1\,i} & a_{1\,i+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1\,1} & \dots & a_{k-1\,i-1} & a_{k-1\,i} & a_{k-1\,i+1} & \dots & a_{k-1\,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{k\,i} & 0 & \dots & 0 \\ a_{k+1\,1} & \dots & a_{k+1\,i+1} & a_{k+1\,i} & a_{k+1\,i+1} & \dots & a_{k+1\,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n\,1} & \dots & a_{n\,i+1} & a_{n\,i} & a_{n\,i+1} & \dots & a_{n\,n} \end{vmatrix} = a_{ki}A_{ki}.$$

Действительно, переместим i-ый столбец на первое место, последовательно меняя его с $i-1$, затем с $i-2$ и т.д. Затем переместим k-ую строку на первое место, последовательно меняя его с $k-1$, затем с $k-2$ и т.д. Поскольку при каждой перенеме строк (столбцов) менялся знак определителя, то получаем

$$\begin{vmatrix} \vec{a_1} \\ \dots \\ \vec{a}_{k-1} \\ \vec{b_i} \\ \vec{a}_{k+1} \\ \dots \\ \vec{a_n} \end{vmatrix} = (-1)^{k+i} \left|\begin{array}{c|cccccc} a_{k\,i} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline a_{1\,i} & a_{11} & \dots & a_{1\,i-1} & a_{1\,i+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1\,i} & a_{k-1\,1} & \dots & a_{k-1\,i-1} & a_{k-1\,i+1} & \dots & a_{k-1\,n} \\ a_{k+1\,i} & a_{k+1\,1} & \dots & a_{k+1\,i+1} & a_{k+1\,i+1} & \dots & a_{k+1\,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n\,i} & a_{n\,1} & \dots & a_{n\,i+1} & a_{n\,i+1} & \dots & a_{n\,n} \end{array}\right| = a_{ki}A_{ki}.$$

□

11. *Сумма произведений элементов i-ой строки на алгебраическое дополнение элементов j-ой строки ($i \neq j$) равна 0. Тоже верно для столбцов.*

Доказательство. Доказательство написано в следующем параграфе (не опираюсь на теорему Лапласа). □

Замечание 3. Свойства 10-11 можно записать в едином виде:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}A_{nj} = \delta_{kn} \cdot |A|, \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{in} = \delta_{kn} \cdot |A|,$$

где

$$\delta_{kn} = \begin{cases} 1, & k = n, \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$

символ Кронекера.

11. $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ *(A, B — квадратные матрицы одного размера).*

Доказательство. Доказательство будет приведено в следующем параграфе (см. следствие 2.2.4). □

П р и м е р 2.2.1. Найдите определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \end{vmatrix}$$

Доказательство. Проведём цепочку равенств. Обоснования напишем ниже.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 5 & 6 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot 1 = -1.$$

Первое равенство мы получили вычитая из второй строки удвоенную первую. Второе равенство мы получили вычитая из третьей строки первую, умноженную на 5. Третье равенство мы получили вычитая из третьей строки вторую, умноженную на 4. Четвёртое равенство мы получили по свойству 8. □

П р и м е р 2.2.2. Вычислим так называемый *определитель Вандермонда*

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Доказательство. Вычитая из каждого столбца, начиная с последнего, предыдущий столбец, умноженный на x_1, получаем

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \ldots & x_2^{n-3}(x_2 - x_1) & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n(x_n - x_1) & \ldots & x_n^{n-3}(x_n - x_1) & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

Используя разложение по первой строке получаем:

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \ldots & x_2^{n-3}(x_2 - x_1) & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n(x_n - x_1) & \ldots & x_n^{n-3}(x_n - x_1) & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}.$$

По свойству определителя из каждой строки вытащим общий множитель и получим:

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_2 - x_1) \cdots (x_n - x_1) V(x_2, \ldots, x_n).$$

Применяя последовательно полученный результат получаем:

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i>j} (x_i - x_j).$$

□

2.2.2 Теорема Лапласа.

Для начала, введём несколько определений.

Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица размера $n \times n$, и пусть выбраны любые k строк матрицы A с номерами $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ и любые k столбцов с номерами $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$.

Определение 2.2.1. Определитель матрицы, получаемой из A вычеркиванием всех строк и столбцов, кроме выбранных, называется *минором* k-го порядка, расположенным в строках с номерами i_1, i_2, …, i_k и столбцах с номерами j_1, j_2, …, j_k. Он обозначается следующим образом:

$$M_{j_1, \ldots, j_k}^{i_1, \ldots, i_k} = \det \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \ldots & a_{i_1 j_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \ldots & a_{i_k j_k} \end{pmatrix}.$$

А определитель матрицы, получаемой вычеркиванием только выбранных строк и столбцов из квадратной матрицы, называется *дополнительным минором* к минору $M_{j_1, \ldots, j_k}^{i_1, \ldots, i_k}$:

$$\overline{M}_{j_1, \ldots, j_k}^{i_1, \ldots, i_k} = \det \begin{pmatrix} a_{i_{k+1} j_{k+1}} & a_{i_{k+1} j_{k+2}} & \ldots & a_{i_{k+1} j_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_n j_{k+1}} & a_{i_n j_{k+2}} & \ldots & a_{i_n j_n} \end{pmatrix},$$

где $i_{k+1} < \ldots < i_n$ и $j_{k+1} < \ldots < j_n$ — номера невыбранных строк и столбцов.

Определение 2.2.2. *Алгебраическое дополнение* минора $M_{j_1, \ldots, j_k}^{i_1, \ldots, i_k}$ определяется следующим образом:

$$A_{j_1, \ldots, j_k}^{i_1, \ldots, i_k} = (-1)^{p+q} \overline{M}_{j_1, \ldots, j_k}^{i_1, \ldots, i_k}$$

где $p = i_1 + \ldots + i_k, q = j_1 + \ldots + j_k$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.2.2 (Теорема Лапласа)**.** *Пусть выбраны любые k строк матрицы A. Тогда определитель матрицы A равен сумме всевозможных произведений миноров k-го порядка, расположенных в этих строках, на их алгебраические дополнения.*

$$\det A = \sum_{j_1 < \ldots < j_k} M^{i_1,\ldots,i_k}_{j_1,\ldots,j_k} A^{i_1,\ldots,i_k}_{j_1,\ldots,j_k}, \tag{2.2.5}$$

где суммирование ведётся по всевозможным номерам столбцов $j_1, \ldots, j_k$. Число миноров, по которым берётся сумма в теореме Лапласа, равно числу способов выбрать k столбцов из n, то есть биномиальному коэффициенту $\binom{n}{k}$.

Так как строки и столбцы матрицы равносильны относительно свойств определителя, теорему Лапласа можно сформулировать и для столбцов матрицы.

Доказательство. Проведём в четыре этапа. Обозначим сумму, стоящую в правой части равенства (2.2.5) через S.

I. *Докажем, что все слагаемые из произведения*

$$M^{1,\ldots,k}_{1,\ldots,k} A^{1,\ldots,k}_{1,\ldots,k}$$

совпадают со слагаемыми, входящими в определение определителя матрицы A и имеют такой же знак.

Поскольку число $(1+2+\ldots+k)+(1+2+\ldots+k)$ — чётное, то справедливо равенство

$$A^{\,1,\ldots,k}_{\,1,\ldots,k} = (-1)^{(1+2+\ldots+k)+(1+2+\ldots+k)} \overline{M}^{\,1,\ldots,k}_{\,1,\ldots,k} = \overline{M}^{\,1,\ldots,k}_{\,1,\ldots,k}.$$

Следовательно

$$M^{1,\ldots,k}_{1,\ldots,k} A^{1,\ldots,k}_{1,\ldots,k} = M^{1,\ldots,k}_{1,\ldots,k} \cdot \overline{M}^{\,1,\ldots,k}_{\,1,\ldots,k}.$$

Поскольку

$$M^{1,\ldots,k}_{1,\ldots,k} = \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)\in\{1,2,\ldots k\}} (-1)^{\sigma(\alpha)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{k\alpha_k},$$

$$\overline{M}^{\,1,\ldots,k}_{\,1,\ldots,k} = \sum_{(\beta_{k+1},\beta_{k+2},\ldots,\beta_n)\in\{k+1,k+2,\ldots n\}} (-1)^{\sigma(\beta)} a_{k+1\,\beta_{k+1}} a_{k+2\,\beta_{k+2}} \ldots a_{n\,\beta_n},$$

то при раскрытии произведения $M^{1,\ldots,k}_{1,\ldots,k} \cdot \overline{M}^{\,1,\ldots,k}_{\,1,\ldots,k}$ будут слагаемые вида

$$(-1)^{\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{k\alpha_k} a_{k+1\,\beta_{k+1}} a_{k+2\,\beta_{k+2}} \ldots a_{n\,\beta_n}.$$

Из того, что числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ принадлежат множеству $\{1, 2, \ldots k\}$, а числа $\beta_{k+1}, \beta_{k+2}, \ldots, \beta_n$ принадлежат множеству $k+1, k+2, \ldots n$ вытекает, что произвольное α_s и произвольное β_r инверсий не образуют, поэтому справедливо:

$$(-1)^{\sigma(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k,\beta_{k+1},\beta_{k+2},\ldots,\beta_n)} = (-1)^{\sigma(\alpha)}(-1)^{\sigma(\beta)}.$$

Следовательно каждое слагое в S входит в определитель матрицы A, причём с таким же знаком.

II. *Докажем, что все слагаемые из произведения*

$$M^{i_1,\ldots,i_k}_{j_1,\ldots,j_k} A^{i_1,\ldots,i_k}_{j_1,\ldots,j_k}$$

совпадают со слагаемыми, входящими в определение определителя матрицы A и имеют такой же знак.

Данный случай можно свести к разобранному случаю **I**. Для этого наряду с исходной матрицей A рассмотрим матрицу B, полученную следующим образом:

1. Строку с номером i_1 поменяем местами сначало с соседней $i_1 - 1$, потом полученную строку с соседней $i_1 - 2$ до тех пор пока строка бывшая на месте i_1 не окажется на первом месте (тут мы поменяли местами строки $i_1 - 1$ раз);

2. Строку с номером i_2 поменяем местами сначало с соседней $i_2 - 1$, потом полученную строку с соседней $i_2 - 2$ до тех пор пока строка бывшая на месте i_2 не окажется на втором месте (тут мы поменяли местами строки $i_2 - 2$ раз);

3. И т.д., до тех пор пока строки бывшии на местах i_1, i_2, ..., i_k не окажутся на местах с номерами 1, 2, ..., k. Тогда нам потребуется переставить строки

$$(i_1-1)+(i_2-2)+\ldots+(i_k-k)$$

раз.

4. В теперь полученной матрице начнём менять местами столбцы. Столбец с номером j_1 поменяем местами сначало с соседним j_1-1, потом полученный столбец с соседним j_1-2 до тех пор пока столбец бывший на месте j_1 не окажется на первом месте (тут мы поменяли местами столбцы j_1-1 раз);

5. Столбец с номером j_2 поменяем местами сначало с соседним j_2-1, потом полученный столбец с соседним j_2-2 до тех пор пока столбец бывший на месте j_2 не окажется на втором месте (тут мы поменяли местами столбцы j_2-1 раз);

6. И т.д., до тех пор пока столбцы бывшии на местах j_1, j_2, ..., j_k не окажутся на местах с номерами 1, 2, ..., k. Тогда нам потребуется переставить столбцы

$$(j_1-1)+(j_2-2)+\ldots+(j_k-k)$$

раз.

7. В итоге получаем матрицу B.

Из построения матрицы B и равенства

$$(-1)^{(i_1-1)+(i_2-2)+\ldots+(i_k-k)+(j_1-1)+(j_2-2)+\ldots+(j_k-k)}=(-1)^{i_1+i_2+\ldots+i_k+j_1+j_2+\ldots+j_k}$$

вытекает

$$|A|=(-1)^{i_1+i_2+\ldots+i_k+j_1+j_2+\ldots+j_k}|B|. \tag{2.2.6}$$

Теперь минор $M^{i_1,\ldots,i_k}_{j_1,\ldots,j_k}$ матрицы A для матрицы B оказывается в верхнем левом угле, а минор $\overline{M}^{i_1,\ldots,i_k}_{j_1,\ldots,j_k}$ матрицы A для матрицы B оказывается в нижнем правом угле, т.е. получаем соответствие

- Минор $M^{i_1,\ldots,i_k}_{j_1,\ldots,j_k}$ матрицы A соответсвует минору $M^{1,\ldots,k}_{1,\ldots,k}$ матрицы B.
- Минор $\overline{M}^{i_1,\ldots,i_k}_{j_1,\ldots,j_k}$ матрицы A соответсвует минору $\overline{M}^{1,\ldots,k}_{1,\ldots,k}$ матрицы B.

Но, по доказанному пункту **I** следует, что каждое слагаемое в произведении минора $M^{1,\ldots,k}_{1,\ldots,k}$ матрицы B умноженной на минор $\overline{M}^{1,\ldots,k}_{1,\ldots,k}$ матрицы B входит с таким же знаком как и в определители $|B|$. Следовательно из равенства (2.2.6) вытекает нужное нам свойство.

III. *Покажем, что любое слагаемое из определителя вида $(-1)^{\sigma(\alpha)}a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\ldots a_{n\alpha_n}$ содержится хотя бы один раз в сумме S.*

IV. *Покажем, что каждое слагаемое из определителя вида $(-1)^{\sigma(\alpha)}a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\ldots a_{n\alpha_n}$ содержится ровно один раз в сумме S.*

Для этого достаточно проверить, что слагаемых в сумме S столько же, сколько слагаемых в определении определителя, т.е. $n!$. Действительно, поскольку набор k числел $1\leqslant j_1<j_2<\ldots<j_k\leqslant n$ из n можно выбрать C_n^k раз, то

$$C_n^k\cdot k!\cdot(n-k)!=\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot k!\cdot(n-k)!=n!.$$

Откуда следует, что слагаемых в сумме S ровно столько же сколько в определите матрицы A.

□

Следствие 2.2.1 (Разложение определителя по строке (столбцу))**.** Частный случай теоремы Лапласа — разложение определителя по строке или столбцу. Он позволяет представить определитель квадратной матрицы в виде суммы произведений элементов любой её строки или столбца на их алгебраические дополнения.

Пусть $A=(a_{ij})$ — квадратная матрица размера $n\times n$. Пусть также задан некоторый номер строки i либо номер столбца j матрицы A. Тогда определитель A может быть вычислен по следующим формулам:

Разложение по i-й строке:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}.$$

Разложение по j-му столбцу:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}.$$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение к минору, расположенному в строке с номером i и столбце с номером j. A_{ij} также называют алгебраическим дополнением к элементу a_{ij}.

Доказательство. Утверждение является частным случаем теоремы Лапласа. Достаточно в ней положить k равным 1 и выбрать i-ую строку, тогда минорами, расположенными в этой строке будут сами элементы. □

Следствие 2.2.2 (фальшивое разложение определителя)**.** Сумма произведений всех элементов некоторой строки (столбца) матрицы A на алгебраические дополнения соответствующих элементов любой другой строки (столбца) равна нулю.

Доказательство. Рассмотрим сумму произведений всех элементов произвольной k-ой строки матрицы A на алгебраические дополнения соответствующих элементов любой другой, скажем, i-ой строки матрицы A. Пусть A' — матрица, у которой все строки, кроме i-ой, такие же, как у матрицы A, а элементами i-ой строки матрицы A' являются соответствующие элементы k-ой строки матрицы A. Тогда у матрицы A' две одинаковые строки и, следовательно, по свойству матрицы об одинаковых строках имеем, что $|A'| = 0$. С другой стороны, по следствию 2.2.1 определитель $|A'|$ равен сумме произведений всех элементов i-ой строки матрицы A' на их алгебраические дополнения. Заметим, что алгебраические дополнения элементов i-ой строки матрицы A' совпадают с алгебраическими дополнениями соответствующих элементов i-ой строки матрицы A. Но элементами i-ой строки матрицы A' являются соответствующие элементы k-ой строки матрицы A. Таким образом, сумма произведений всех элементов i-ой строки матрицы A' на их алгебраические дополнения с одной стороны равна нулю, а с другой стороны равна сумме произведений всех элементов k-ой строки матрицы A на алгебраические дополнения соответствующих элементов i-ой строки матрицы A. □

Замечание 4. При помощи символа Кронекера

$$\delta_{kn} = \begin{cases} 1, & k = n, \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$

полученные в двух предыдущих следствиях равенствах можно записать в виде:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} A_{nj} = \delta_{kn} \cdot |A|, \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{in} = \delta_{kn} \cdot |A|.$$

Следствие 2.2.3. Определитель матрицы

$$\det \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & c_{1\,r+1} & c_{1\,r+2} & \cdots & c_{1\,m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & c_{2\,r+1} & c_{2\,r+2} & \cdots & c_{2\,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & c_{r\,r+1} & c_{r\,r+2} & \cdots & c_{r\,m} \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1\,m-r} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2\,m-r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{m-r\,1} & b_{m-r\,2} & \dots & b_{m-r\,m-r} \end{array} \right) = \det A \cdot \det B.$$

Следствие 2.2.4. Для квадратных матриц A, B размера $n \times n$ справедливо $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

Доказательство. Составим вспомогательный матрицу

$$\Delta = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1\,n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2\,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n\,1} & b_{n\,2} & \dots & b_{n\,n} \end{array}\right).$$

Как нам известно, $\det\Delta = \det A \cdot \det B$ (например, по следствию теоремы Лапласа).

Покажем, что $\det\Delta = \det(A\cdot B)$. Для этого преобразуем определитель следующим образом. Сначала первые n столбцов, умноженных соответственно на $b_{11}, b_{21}, \dots, b_{n1}$ прибавим к $n{+}1$ -му столбцу. Затем первые n столбцов, умноженных соответственно на $b_{12}, b_{22}, \dots, b_{n2}$ прибавим к $n{+}2$ -му столбцу. На последнем шаге к $2n$ - му столбцу будут прибавлены первые n столбцов, умноженных соответственно на b_{1n}, b_{2n}, $\dots$, b_{nn} прибавим к $n+1$ -му столбцу. В результате получим определитель

$$\det\Delta = \det\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \sum_{k=1}^n a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^n a_{1k}b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{1k}b_{kn} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \sum_{k=1}^n a_{2k}b_{k1} & \sum_{k=1}^n a_{2k}b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{2k}b_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & \sum_{k=1}^n a_{nk}b_{k1} & \sum_{k=1}^n a_{nk}b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{nk}b_{kn} \\ \hline -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right) = \det\begin{pmatrix} A & A\cdot B \\ -E & 0 \end{pmatrix}.$$

Разлагая полученный определитель с помощью теоремы Лапласа по последним n столбцам, находим:

$$\det\Delta = (-1)^{(1+2+\dots+n)+((n+1)+(n+2)+\dots+(2n))}\det(-E)\cdot\det(A\cdot B) = (-1)^{\frac{2n\cdot(2n+1)}{2}+n}\cdot\det(A\cdot B) = \det(A\cdot B).$$

Следовательно, $\det A\cdot B = \det A \cdot \det B$. □

П р и м е р 2.2.3. Найдём определитель матрицы

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}$$

используя теорему Лапласа в случае $k = 2$.

Решение. Согласно теореме Лапласа, получаем

$$\det A = \sum_{j_1<j_2} M_{j_1,j_2}^{i_1,i_2} A_{j_1,j_2}^{i_1,i_2} = M_{1,2}^{1,2}A_{1,2}^{1,2} + M_{1,3}^{1,2}A_{1,3}^{1,2} + M_{1,4}^{1,2}A_{1,4}^{1,2} + M_{2,3}^{1,2}A_{2,3}^{1,2} + M_{2,4}^{1,2}A_{2,4}^{1,2} + M_{3,4}^{1,2}A_{3,4}^{1,2} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 - 6\cdot(-8) + 2\cdot(-4) - 0 + 0 - 1\cdot(-4) = 48 - 8 - 4 = 36.$$

□

Контрольные вопросы.

1. Дайте определение дополняющего минора.
2. Чему равен определитель Вандермонда?

3. Сформулируйте теорему Лапласа.

Упражнения к 2.2

Упражнение 2.2.1. *Вычислите определитель* $A = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1^2 & x_1^{-1} & x_1^{-2} & 1 \\ x_2^2 & x_2^2 & x_2^{-1} & x_2^{-2} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_5^2 & x_5^2 & x_5^{-1} & x_5^{-2} & 1 \end{pmatrix}$.

Упражнение 2.2.2. *Матрица дискретного преобразования Фурье имеет вид:*

$$F = \left[\varepsilon_j^k\right]_{j,k=0}^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \varepsilon_1 & \varepsilon_1^2 & \dots & \varepsilon_1^{n-1} \\ 1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_2^2 & \dots & \varepsilon_2^{n-1} \\ 1 & \varepsilon_3 & \varepsilon_3^2 & \dots & \varepsilon_3^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & \varepsilon_{n-1} & \varepsilon_{n-1}^2 & \dots & \varepsilon_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

при $\varepsilon_j = e^{\frac{2i\pi j}{n}} = \cos\frac{2\pi j}{n} + i\sin\frac{2\pi j}{n}$ *— корень* n *-й степени из* 1. *Найдите* $\det F$.

Ответы: 2.2.1 $(x_1 \cdots x_5)^{-2}\prod_{i>j, i,j\in\{1,\dots,5\}}(x_i - x_j)$. *Указание:* докажите равенство $\det A = (x_1\cdots x_5)^{-2}V(x_1,\dots,x_5)$. **2.2.2** $\det F = n^{n/2}\cdot i^{n(n-1)/2+1}$ при n — чётном, $\det F = n^{n/2}\cdot i^{n(n-1)/2}$ при n — нечетном. *Указание:* докажите равенство

$$F = \left[\varepsilon^{jk}\right]_{j,k=0}^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \dots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \dots & \varepsilon^{2(n-1)} \\ 1 & \varepsilon^3 & \varepsilon^6 & \dots & \varepsilon^{3(n-1)} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2(n-1)} & \dots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

2.3 Обратная матрица. Формулы Крамера для решения систем линейных уравнений.

2.3.1 Обратная матрица

В параграфе 2.1.3 мы дали определение обратной матрицы A^{-1}. Напомним его.

Определение 2.3.1. Назовём матрицу A^{-1} *обратной* для матрицы A, если выполнены равенства

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E. \tag{2.3.7}$$

Из равенств (2.3.7) следует, что обратную матрицу может иметь только квадратная матрица. Более того, не всякая квадратная матрица имеет обратную матрицу. Вопрос о существовании обратной матрицы и служит темой этого пункта. Отметим, что из равенств (2.3.7) и очевидного равенства $|E| = 1$ следует, что

$$1 = |E| = |AA^{-1}| = |A|\cdot|A^{-1}|.$$

Откуда следует, что если $|A| \neq 0$, то $|A^{-1}| = 1/|A|$. Таким образом, условие $|A| \neq 0$ является необходимым условием существования обратной матрицы. Следующая теорема означает, что это условие является необходимым и достаточным для существования обратной матрицы.

Теорема 2.3.3. *Если* $|A| \neq 0$, *то*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Замечание 5. Несмотря на достаточно простой вид формулы для обратной матрицы таким образом искать обратную матрицу не всегда разумно. Даже в случае матриц порядка 4×4 (а в случае более высокого порядка, тем более) искать обратную матрицу изложенным способом потребует громоздких вычислений. Ниже мы придложим ещё один способ нахождения матрицы, обратной к заданной.

Доказательство. Равенства $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ следуют из равенств

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + \dots + a_{in}A_{in}, \quad i = 1, \dots, n,$$
$$|A| = a_{1j}A_{1j} + \dots + a_{nj}A_{nj}, \quad j = 1, \dots, n$$

и свойства 11 о фальшивом разложении по строке (столбце). Действительно,

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n A_{k1}a_{k1} & \dots & \sum_{k=1}^n A_{k1}a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=1}^n A_{kn}a_{k1} & \dots & \sum_{k=1}^n A_{kn}a_{kn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & |A| \end{pmatrix}.$$

□

П р и м е р 2.3.1. Найдите матрицу, обратную к данной:

$$1. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}; \qquad 2. \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -2 & 9 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Для начала в каждом случае мы должны проверить, что определитель соответствующей матрицы отличен от нулю, т.к. иначе обратной матрицы просто не существует.

1. Поскольку $\det A = 22$, то обратная к A матрица существует. Найдём все её алгебраические дополнения: $A_{11} = 7$, $A_{12} = -5$, $A_{21} = 3$, $A_{22} = 1$. Поэтому

$$A^{-1} = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Находим определитель матрицы B:

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -2 & 9 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 - \vec{a}_1 \\ \vec{a}_3 - \vec{a}_1 \end{matrix} = \left|\begin{array}{cc|c} 5 & -1 & \boxed{1} \\ \hline -7 & 10 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{array}\right| = (-1)^{1+3} \cdot \boxed{1} \cdot \begin{vmatrix} -7 & 10 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -1.$$

Далее находим все алгебраические дополнения матрицы B

$$B_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7, \quad B_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5, \quad B_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -2 & 9 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -31,$$

$$B_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad B_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad B_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -13,$$

$$B_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = -10, \quad B_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -7, \quad B_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} = 43.$$

Откуда

$$B^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 7 & 5 & -31 \\ 3 & 2 & -13 \\ -10 & -7 & 43 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -7 & -3 & 10 \\ -5 & -2 & 7 \\ 31 & 13 & -43 \end{pmatrix}.$$

□

П р и м е р 2.3.2 (Явный вид обратной матрицы для $n = 2$)**.** В предположении, что $ad - bc \neq 0$ найдите обратную матрицу к матрице $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Доказательство. Поскольку $\det A = ad - bc \neq 0$, то обратная к A матрица существует. Найдём все её алгебраические дополнения: $A_{11} = d$, $A_{12} = -c$, $A_{21} = -b$, $A_{22} = a$. Поэтому

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^T = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

□

2.3.2 Правила Крамера

Теорема 2.3.4 (формулы Крамер)**.** *Для системы n линейных уравнений с n неизвестными (над произвольным полем)*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

с определителем матрицы системы $\Delta = \det A$, отличным от нуля, решение записывается в виде

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,1} & \ldots & a_{n-1,i-1} & b_{n-1} & a_{n-1,i+1} & \ldots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(i-ый столбец матрицы системы заменяется столбцом свободных членов).

Доказательство. Запишем исходную систему в матричном виде $A\vec{x} = \vec{b}$, у которой $\Delta = |A| \neq 0$. Следовательно, для которой существует A^{-1}. Тогда

$$A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b}, \quad E\vec{x} = A^{-1}\vec{b}, \quad \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

(это равенство напоминает равенство $x = a^{-1}b$ из введения). Расписывая обратную матрицу, получаем:

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & \ldots & A_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n A_{k1}b_k \\ \ldots\ldots \\ \sum_{k=1}^n A_{kn}b_k \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \ldots \\ \Delta_n \end{pmatrix}.$$

Сумма $\sum_{k=1}^n A_{ki}b_k$ представляет из себя разложение по i-му столбцу матрицы, которая получается заменой i столбца матрицы A столбцом $\vec{b}$. Полученную формулу можно записать в виде *формул Крамера*:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

□

Замечание 6. Скажем пару слов, не вдаваясь в подробности, о вычислительной сложности Метода Крамера. Метод Крамера требует вычисления $n+1$ определителей размерности $n \times n$. При использовании метода Гаусса для вычисления определителей, метод имеет сложность по элементарным операциям сложения-умножения порядка $O(n^4)$, что сложнее чем метод Гаусса при прямом решении системы. Поэтому метод, с точки зрения затрат времени на вычисления, считался непрактичным. Однако, в 2010 году Ken Habgood и Itamar Arel [7] показали[2], что метод Крамера может быть реализован со сложностью $O(n^3)$, сравнимой со сложностью метода Гаусса.

П р и м е р 2.3.3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 9 \\ 5x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 19 \end{cases}$$

Доказательство. В примере 2.2.1 мы нашли, что $|A| = -1$. Поэтому

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 19 & 6 & 8 \end{vmatrix}}{-1}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \\ 5 & 19 & 8 \end{vmatrix}}{-1}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 9 \\ 5 & 6 & 19 \end{vmatrix}}{-1}.$$

Прекрасное упражнение — проверить, что $x_1 = x_2 = x_3 = 1$. ☐

Если векторы $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \cdots, \vec{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$ линейно независимы (иными словами, $rgA = n$ или $|A| \neq 0$), то, по доказанному, для любого вектора $\vec{b}$ система $A\vec{x} = \vec{b}$ имеет, притом единственное, решение. Переписав эту систему в виде $x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}$, мы получаем, что любой вектор $\vec{b}$ есть линейная комбинация $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$. Таким образом, любые линейно независимые векторы $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^n$ образуют базис этого пространства.

2.3.3 Матрицы элементарных преобразований

Определение 2.3.2. *Треугольная матрица* — квадратная матрица, в которой все элементы ниже или выше главной диагонали равны нулю.

Верхнетреугольная матрица — квадратная матрица, в которой все элементы ниже главной диагонали равны нулю.

Нижнетреугольная матрица — квадратная матрица, в которой все элементы выше главной диагонали равны нулю.

П р и м е р 2.3.4. Верхнетреугольные матрицы

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & e \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & \pi & 1 & -2 \\ 0 & e & \sqrt{2} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \pi^2 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^3 \end{pmatrix}.$$

Нижнетреугольные матрицы

$$B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ -5 & e & 11 & 0 \\ 2 & \sqrt{5} & 7 & e \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} \pi^5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \pi^2 & e & 0 & 0 & 0 \\ e & \sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & 7 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & \pi & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Все вышеперечисленные матрицы являются матрицами треугольного вида.

[2]Более того Ken Habgood защитил на этом результате в 2011 году диссертацию (см. [8]).

Матрица преобразования 1 типа. Матрицей элементарных преобразований 1-го типа называется любая матрица, полученная из единичной матрицы перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Например, если в единичной матрице пятого порядка переставить местами первую и третью строки (получим то же самое, если переставим первый или третий столбец), получается матрица элементарных преобразований 1-го типа:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \tilde{E}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица элементарных преобразований 1-го типа $\tilde{E}_1$ получена при перестановки местами первого и пятого столбца (или всё равно, что переставить местами первую и пятую строчку) в единичной матрице пятого порядка.

Матрица преобразования 2 типа. Матрицей элементарных преобразований 2-го типа называется любая матрица, полученная из единичной заменой диагонального элемента на любое действительное число, не равное нулю. Например, матрицы элементарных преобразований 2-го типа являются матрицы ($a, b \neq 0$)

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица преобразования 3 типа. Матрицей элементарных преобразований 3-го типа называется любая матрица, отличающаяся от единичной наличием одного внедиагонального элемента, не равного нулю. Например, для $a \neq 0$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.3.4 Элементарные преобразований

Определение 2.3.3. Назовем *элементарными преобразованиями* матриц следующие действия над ними:

- *Элементарное преобразование 1 типа:* перестановка строк или столбцов;
- *Элементарное преобразование 2 типа:* умножение строки или столбца на число отличное от нуля;
- *Элементарное преобразование 3 типа:* добавление к одной из строк другой строки, умноженной на число или добавление к одному из столбцов другого столбца, умноженного на число.

Покажем как записать элементраное преобразование матрицы A, при помощи домножения на элементарную матрицу соответствующего типа.

Перестановка строк (столбцов). Равносильно домножению слева (справа) на матрицу, полученную из единичной путём замены i-ой строки (столбца) с j-ой строкой (столбцом). Например, в матрице 5×5 замена 1 и третьей строки осуществляется домножением слева на матрицу элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}.$$

В матрице 5×5 замена 1 и третьего столбца осуществляется домножением справа на матрицу элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} & a_{14} & a_{15} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} & a_{24} & a_{25} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} & a_{34} & a_{35} \\ a_{43} & a_{42} & a_{41} & a_{44} & a_{45} \\ a_{53} & a_{52} & a_{51} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}.$$

Умножение i-ой строки (столбца) на число λ отличное от нуля. Равносильно умножению слева (справа)на матрицу, полученную из единичной, умножением i-ой строки (столбца) на число λ. Например, в матрице 5×5 умножение 2 строки на λ равносильно домножению слева на матрицу элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} & \lambda a_{34} & \lambda a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}.$$

В матрице 5×5 умножение 2 столбца на λ равносильно

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \lambda a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & \lambda a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & \lambda a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & \lambda a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & \lambda a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}.$$

Добавление к i-ой строке (столбцу) j-ую строку (столбец), умноженной на λ. Равносильно умножению слева (справа)на матрицу, полученную из единичной, прибавление к i-ой строке (столбцу) j-уй строку (столбец), умноженный на число λ. Например, в матрице 4×4 добавление к 1-ой строке 3-ей строки, умноженной на λ равносильно домножению слева на матрицу элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + \lambda a_{31} & a_{12} + \lambda a_{32} & a_{13} + \lambda a_{33} & a_{14} + \lambda a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \end{pmatrix}.$$

В матрице 5×5 добавление к 1-му столбцу 3-го столбца, умноженной на λ равносильно

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + \lambda a_{13} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} + \lambda a_{23} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} + \lambda a_{33} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} + \lambda a_{43} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} + \lambda a_{53} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

Замечание 7. Нами доказано:

- Элементарные преобразования со строками матрицы равносильны умножению исходной матрицы слева на соответсвующие матрицы элементарных преобразований.
- Элементарные преобразования со столбцами матрицы равносильны умножению исходной матрицы справа на соответсвующие матрицы элементарных преобразований.
- Элементарные преобразования сохраняют невырожденность исходной матрицы.

Теорема 2.3.5. *Любая невырожденная (квадратная) матрица путем умножения на матрицы элементарных преобразований слева может быть сведена к единичной, т.е. найдутся такие матрицы элементарных преобразований E_1, E_2, E_3,...,E_m, такие, что*

$$E_m \cdot E_{m-1} \ldots E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = E.$$

Доказательство. Опишем процедуру получения единичной матрицы из невырожденной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

при помощи элементарных преобразования над строками.

a. Опишем как при помощи элементарных преобразований получить из матрицы A матрицу вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & a^*_{12} & \dots & a^*_{1n} \\ 0 & a^*_{22} & \dots & a^*_{2n} \\ 0 & a^*_{32} & \dots & a^*_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a^*_{n2} & \dots & a^*_{nn} \end{pmatrix}.$$

Действительно, из невырожденности матрицы A вытекает, что существует элемент, например a_{1i} отличный от нуля. Тогда мы меняем местами первую и i-ую строку местами (элементарное преобразование 1 типа). Затем делим первую строку на a_{1i} (элементарное преобразование 2 типа). Далее ко всем оставшимся ненулевым элементам первой строки, например a_{1k}, прибавляем первую строку, умноженную на $(-a_{1k})$ (элементарное преобразование 3 типа).

b. Применяя, описанный процесс ко второй строке, третьей и т.д. приводим матрицу A к верхнетреугольному виду с единицами на главной диагонали:

$$\begin{pmatrix} 1 & a^*_{12} & \dots & a^*_{1\,n-1} & a^*_{1\,n} \\ 0 & 1 & \dots & a^*_{2\,n-1} & a^*_{2\,n} \\ 0 & 0 & \dots & a^*_{3\,n-1} & a^*_{3\,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a^*_{n-1\,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c. Прибавим к первой строке вторую, умноженную на $-a^*_{12}$, третью, умноженную на $-a^{**}_{13}$ (здесь a^{**}_{13} элемент оставшийся на месте 1 строки 3 столбца после всех предыдущих элементарных преобразований), и т.д. на последнем шаге прибавим последнюю строку, умноженную на $-a^{**}_{1\,n}$ (здесь a^{**}_{1n} элемент оставшийся на месте 1 строки n-го столбца после всех предыдущих элементарных преобразований). Это всё элементарные преобразования 3 типа. Итого, мы привели матрицу к виду, где в первой строке стоит на первом месте 1, а на остальных 0:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & a^*_{2\,n-1} & a^*_{2\,n} \\ 0 & 0 & \dots & a^*_{3\,n-1} & a^*_{3\,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a^*_{n-1\,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

d. Теперь продолжая процесс со второй строкой, также, как в с), потом с третьей строй и наконец с $n-1$ строкой получаем единицную матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

e. Поскольку элементарные преобразования над строками равносильны домнажения слева на матрицу элементарного преобразования, то описанная схема привежения к единицной матрице равносильно следующему

$$E_m \cdot E_{m-1} \dots E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = E,$$

где E_k — соответствующее элементарноге преобразование.

□

Полностью аналогично получается следующая теорема

Теорема 2.3.6. *Любая невырожденная (квадратная) матрица A путем умножения на матрицы элементарных преобразований справа может быть сведена к единичной, т.е. найдутся такие матрицы элементарных преобразований $\tilde{E}_1$, $\tilde{E}_2$, $\tilde{E}_3$,...,$\tilde{E}_s$, такие, что*

$$A \cdot \tilde{E}_1 \tilde{E}_2 \dots \tilde{E}_{m-1} \cdot \tilde{E}_s = E. \tag{2.3.8}$$

2.3.5 Ещё один способ построения обратной матрицы (метод Гаусса-Жордана)

Для невырожденной матрицы, домножив равенство из предыдущей теоремы на A^{-1} мы получаем:

$$E_m \cdot E_{m-1} \dots E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 = E \cdot A^{-1}. \tag{2.3.9}$$

Это равенство лежит в основе получения обратной матрицы. Составим расширенную матрицу $(A|E)$. Далее элеметарными преобразованиями над строками вида E_k из предыдущего равенства, получаем

$$(A|E) \sim (E_1 \cdot A|E_1 \cdot E) \sim (E_2 \cdot E_1 \cdot A|E_2 \cdot E_1) \sim (E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A|E_3 \cdot E_2 \cdot E_1) \sim \dots \sim$$
$$(E_m \cdot E_{m-1} \dots E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A|E_m \cdot E_{m-1} \dots E_3 \cdot E_2 \cdot E_1) \sim (E|A^{-1}).$$

Таким образом, если слева от черты в расширенной матрице получить единичную, то справа получится обратная матрица.

П р и м е р 2.3.5. Найдите обратную матрицу к заданным:

$$(a) \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (b) \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Найдём обратную матрицу к каждой из выписанных.

(a) Составим расширенную матрицу $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$ Текущую строку расширенной матрицы мы будем обозначать через $\vec{a}_k$. Сразу за матрицей мы будем указывать элементарное преобразование над строками. Например, выражение $\vec{a}_2 - 3\vec{a}_1$ будет обозначать, что из второй строки мы вычитает утроенную первую.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 - \vec{a}_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2/3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \begin{array}{l} \vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 \\ \vec{a}_2 \end{array} \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right).$$

(b) Теперь найдём обратную ко второй матрице. Составим, как и ранее, расширенную матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 - 2\vec{a}_1 \\ \vec{a}_3 - \vec{a}_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \vec{a}_1 - 3\vec{a}_2 \\ \vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 - \vec{a}_2 \end{array} \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 25 & 7 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \vec{a}_1 - 25\vec{a}_3 \\ \vec{a}_2 + 7\vec{a}_3 \\ \vec{a}_3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -18 & 22 & -25 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -6 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Ответ:

$$(a)\quad \begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix},\quad (b)\quad \begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & 7 & 1\\ 1 & 4 & -2\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}-18 & 22 & -25\\ 5 & -6 & 7\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

□

2.3.6 Решение матричных уравнений вида $AXB = C$

Решение матричного уравнения $AXB = C$ разобъём на два уравнения $AX = D$ и $XB = C$.

Решение уравнения $AX = D$ *Первый способ.* Уравнение $AX = D$ можно решить найдя обратную матрицу, т.е. $X = A^{-1}D$.

Второй способ. Уравнение $AX = D$ можно решить иначе, не находя явного выражения для A^{-1}. Действительно, основываюсь на формуле (2.3.9), составим расширенную матрицу $(A|D)$. Далее элементарными преобразованиями над строками вида E_k из равенства (2.3.9), получаем

$$(A|D) \sim (E_1 \cdot A|E_1 \cdot D) \sim (E_2 \cdot E_1 \cdot A|E_2 \cdot E_1 \cdot D) \sim (E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A|E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot D) \sim \dots \sim$$
$$\sim (E_m \cdot E_{m-1} \dots E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A|E_m \cdot E_{m-1} \dots E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot D) \sim (E|A^{-1} \cdot D).$$

Таким образом, если слева от черты в расширенной матрице получить единичную, то справа получится матрица $A^{-1}D$.

Решение уравнения $XB = C$ *Первый способ.* Состоит, как и ранее, в нахождении обратной матрицы. Уравнение $XB = C$ решаем исходя из равенства $X = CB^{-1}$.

Второй способ. Опять таки не находя явного вида матрицы B^{-1} мы решаем уравнение $XB = C$ основываясь на формуле (2.3.8). Действительно, с использованием аналога равенства (2.3.8) для матрицы B, получаем

$$\left(\frac{B}{C}\right) \sim \left(\frac{B \cdot \tilde{E}_1}{C \cdot \tilde{E}_1}\right) \sim \left(\frac{B \cdot \tilde{E}_1 \cdot \tilde{E}_2}{C \cdot \tilde{E}_1 \cdot \tilde{E}_2}\right) \sim \left(\frac{B \cdot \tilde{E}_1 \cdot \tilde{E}_2 \cdot \tilde{E}_3}{C \cdot \tilde{E}_1 \cdot \tilde{E}_2 \cdot \tilde{E}_3}\right) \sim \dots \sim$$
$$\sim \left(\frac{B \cdot \tilde{E}_1 \cdot \tilde{E}_2 \cdot \dots \cdot \tilde{E}_s}{C \cdot \tilde{E}_1 \cdot \tilde{E}_2 \cdot \dots \cdot \tilde{E}_s}\right) \sim \left(\frac{E}{C \cdot B^{-1}}\right).$$

П р и м е р 2.3.6. Решите матричные уравнения

$$(a)\quad AX = C,\quad (b)\quad YB = D,\quad (c)\quad AZB = C,$$

где

$$A = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix}6 & 5\\ 1 & 1\end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix}-5 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix},\quad D = \begin{pmatrix}-4 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}.$$

Доказательство. Решим двумя способами.

Первый способ.

(a) Чтобы решить уравнение вида $AX = C$ составим расширенную матрицу:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}2 & 1 & -5 & -1\\ 0 & 1 & 3 & 1\end{array}\right)\begin{array}{l}\vec{a}_1 - \vec{a}_2\\ \vec{a}_2\end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc}2 & 0 & -8 & -2\\ 0 & 1 & 3 & 1\end{array}\right)\begin{array}{l}\vec{a}_1/2\\ \vec{a}_2\end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -4 & -1\\ 0 & 1 & 3 & 1\end{array}\right)$$

Таким образом мы решили матричное уравнение и ответ — матрица, полученная после черты.

(b) Решаем аналогично предыдущему примеру уравнение $YB = D$, но только пользуемся элементарными преобразованиями над столбцами, т.е.

$$\begin{array}{cc}\vec{b}_1 - \vec{b}_2 & \vec{b}_2\end{array}\qquad \begin{array}{cc}\vec{b}_1 & \vec{b}_2 - 5\vec{b}_1\end{array}\qquad \begin{array}{cc}\vec{b}_1 & \vec{b}_2\end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc}6 & 5\\ 1 & 1\\ \hline -4 & -1\\ 3 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc}1 & 5\\ 0 & 1\\ \hline -3 & -1\\ 2 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc}1 & 0\\ 0 & 1\\ \hline -3 & 14\\ 2 & -9\end{array}\right)$$

Ответ также, как и ранее — матрица, полученная после черты.

(c) Решим уравнение $AZB = C$, поскольку $Z = A^{-1}CB^{-1}$, то пользуясь решение в пунктах (a), (b) получаем

$$Z = (A^{-1}C)B^{-1} = XB^{-1} = Y = \begin{pmatrix} -3 & 14 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}.$$

Второй способ. В исходных уравнениях $AX = C, YB = X, AZB = C$, находим сначала обратные матрицы A^{-1} и B^{-1}, используя алгебраические дополнения:

(a) Найдём матрицу, обратную к A:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Откуда

$$X = A^{-1}C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -8 & -2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Найдём матрицу, обратную к B:

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Откуда

$$Y = DB^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 14 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}.$$

(c) Справедливо

$$Z = (A^{-1}C)B^{-1} = XB^{-1} = Y = \begin{pmatrix} -3 & 14 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} -3 & 14 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} -3 & 14 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}.$ □

П р и м е р 2.3.7. Решите матричное уравнение

$$X\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Будем искать решение матричного уравнения при помощи расширенной матрицы:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 - \vec{b}_1 & \vec{b}_3 - \frac{1}{2}\vec{b}_1 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ \hline 5 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & -1 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{b}_1/2 & \vec{b}_2/(-3) & \vec{b}_3 + \vec{b}_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 3 \\ -1 & 3 & 3/2 \\ \hline 5 & 0 & 9/2 \\ 5 & 3 & -3/2 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{b}_1 - \vec{b}_2 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \cdot \frac{2}{9} \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1/2 & -1 & 9/2 \\ \hline 5/2 & 0 & 9/2 \\ 5/2 & -1 & 9/2 \end{array}\right) \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{b}_1 - \frac{1}{2}\vec{b}_3 & \vec{b}_2 + \vec{b}_3 & \vec{b}_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1 \\ \hline 5/2 & 0 & 1 \\ 7/2 & -1 & 1 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$ □

П р и м е р 2.3.8. Решите матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите определитель матрицы X.

Доказательство. В данном случае уравнение $AX = B$ состоит из матриц четвёртого порядка и поэтому нахождение обратной матрицы 4-го порядка требует много усилий. Поэтому значительно быстрее решать данное уравнение, не находя явного выражения для обратной матрицы A. Будем искать решение матричного уравнения при помощи расширенной матрицы:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 5 & 3 & -2 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & -4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & -1 & 8 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 & 5 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \vec{a}_1 - \vec{a}_2 \\ \vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 - \vec{a}_4 \\ \vec{a}_4 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -1 & -3 & 7 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & -4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 & 5 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \vec{a}_1 - \vec{a}_2 \\ \vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 \\ \vec{a}_4 - 3\vec{a}_3 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -1 & -3 & 7 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 & -11 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 11 & -4 & 4 & 11 \end{array}\right) \begin{array}{l} \vec{a}_1 + \vec{a}_3 \\ \vec{a}_2 - 5\vec{a}_3 - \vec{a}_4 \\ \vec{a}_3 + \vec{a}_4 \\ \vec{a}_4 \cdot (-1) \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & -2 & 4 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -7 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 8 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -11 & 4 & -4 & -11 \end{array}\right) \begin{array}{l} \vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + 2\vec{a}_4 \\ \vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 \\ \vec{a}_4 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 12 & -11 & -33 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -7 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 8 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -11 & 4 & -4 & -11 \end{array}\right)$$

Матрицу $X = A^{-1}B$ мы нашли. Для нахождения определителя матрицы X можно считать её определитель исходя из вида матрицы, но этот способ потребует некоторых усилий. Для нахождения определителя воспользуемся равенством $\det A \cdot \det X = \det B$, т.е.

$$\det X = \frac{\det B}{\det A} = \frac{(6-5)(8-9)}{(9-8)(0+1)} = -1.$$

Ответ: $\det X = -1$, $X = \begin{pmatrix} -4 & 12 & -11 & -33 \\ -7 & -3 & 1 & 4 \\ 8 & -1 & 3 & 8 \\ -11 & 4 & -4 & -11 \end{pmatrix}$. □

Упражнения к 2.3

Упражнение 2.3.1. *С помощью правила Крамера решите систему уравнений:*

$$\begin{cases} x_1 \cos\alpha + x_2 \sin\alpha = \cos\beta; \\ -x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha = \sin\beta. \end{cases}$$

Упражнение 2.3.2. *Найдите обратную матрицу к заданным:*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -5 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 2.3.3. *Решите систему*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 9 \\ 3x_1 + 4x_2 - 7x_3 = -8 \end{cases}$$

используя правило Крамера.

Упражнение 2.3.4. *Пусть A — обратимая матрица размера 3×3. Матрицу B получили из A путём прибавления первого столбца к третьему, т.е.*

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+a_{31} \end{vmatrix}$$

Докажите, что тогда существует обратная матрица B^{-1} и она получается из матрицы A^{-1} путём вычитания третьего строки из первой, т.е.

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} a_{11}^{-1} & a_{12}^{-1} & a_{13}^{-1} \\ a_{21}^{-1} & a_{22}^{-1} & a_{23}^{-1} \\ a_{31}^{-1} & a_{32}^{-1} & a_{33}^{-1} \end{vmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{vmatrix} a_{11}^{-1} - a_{13}^{-1} & a_{12}^{-1} - a_{32}^{-1} & a_{13}^{-1} - a_{33}^{-1} \\ a_{21}^{-1} & a_{22}^{-1} & a_{23}^{-1} \\ a_{31}^{-1} & a_{32}^{-1} & a_{33}^{-1} \end{vmatrix}$$

Упражнение 2.3.5. *Как изменится матрица A^{-1} если, у матрицы A*

a. *поменять местами i-тую и j-тую строки?*

b. *прибавить к i-той строке j-тую, умноженную на константу λ?*

c. *умножить i-тую строку на ненулевую константу λ?*

d. *преобразования, a) - d) совершить со столбцам матрицы?*

Упражнение 2.3.6. *Решите матричное уравнение $AX = B$, если*

$$(a)\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad (b)\quad A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(c)\quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad (d)\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -5 & -7 & -2 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдите определитель матрицы X.

Упражнение 2.3.7. *Решите матричное уравнение $YA = B$, для всех матриц A и B, заданных в предыдущей задаче (случаи (a)-(d)). Найдите определитель матрицы Y.*

Упражнение 2.3.8. *Решите матричное уравнение*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 5 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найдите определитель матрицы X.

Ответы: 2.3.1 $x_1 = \cos(\alpha+\beta)$, $x_2 = \sin(\alpha+\beta)$. **2.3.2** $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ -1 & -5 & 2 \\ 1 & -10 & 3 \end{pmatrix}$, $C^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 9 \\ -2 & 2 & 6 \\ -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. **2.3.3** $(1,-1,1)$. **2.3.5** ???? **2.3.6** (a) $X = \begin{pmatrix} 5 & -26 & 25 \\ -8 & 43 & -41 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\det X = -12$;(b) $X = \begin{pmatrix} -23 & -9 & 12 \\ -31 & -13 & 16 \\ 16 & 3 & -8 \end{pmatrix}$, $\det X = 20$; (c) $X = \begin{pmatrix} -6 & 11 & 12 \\ -8 & 15 & 16 \\ 5 & -5 & -8 \end{pmatrix}$, $\det X = -4$; (d) $X = \begin{pmatrix} 11 & 24 & -33 \\ -8 & -16 & 23 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $\det X = 10$. **2.3.7** (a) $Y = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -20 \\ 18 & -11 & -76 \\ -13 & 8 & 56 \end{pmatrix}$, $\det Y = -12$; (b) $Y = \begin{pmatrix} -33 & 21 & -4 \\ 15 & -11 & 0 \\ 5 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, $\det Y = 20$;(c) $Y = \begin{pmatrix} -13 & 7 & 2 \\ -15 & 11 & 4 \\ -11 & 8 & 3 \end{pmatrix}$, $\det X = -4$; (d) $Y = \begin{pmatrix} -7 & -2 & 4 \\ 76 & 16 & -49 \\ 19 & 4 & -12 \end{pmatrix}$, $\det X = 10$. **2.3.8** $\det X = 1$, $X = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 2 & 13 \\ -19 & -17 & -5 & -27 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

2.4 Ранг матрицы

Для прямоугольных матриц введём важное понятие *ранга*. Рассмотрим прямоугольную матрицу состоящую из m строк и n столбцов ($[m \times n]$ - матрицу). Пусть $k \leqslant m$ и $k \leqslant n$. Выделим в этой матрице какие-нибудь k строк и k столбцов. Из элементов, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов, составим определитель k - го порядка[3]. Все такие определители называются *минорами* этой матрицы.

Определение 2.4.1. Рангом матрицы называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы.

Определение 2.4.2. *Базисный минор* — ненулевой минор максимального порядка.

Ранг матрицы A будем обозначать rgA.

П р и м е р 2.4.1. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

В матрице A можно составить $\binom{3}{1} \cdot \binom{4}{1} = 12$ миноров 1 -го порядка — это сами элементы матрицы:

$$1, \quad 2, \quad 1, \quad 1, \qquad 0, \quad 1, \quad -1, \quad 2, \qquad 2, \quad 5, \quad 1, \quad 4.$$

Миноров 2 -го порядка в матрице A можно составить $\binom{3}{2} \cdot \binom{4}{2} = 18$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix},$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix},$$
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Миноров 3 -го порядка в матрице A можно составить $\binom{3}{3} \cdot \binom{4}{3} = 4$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что все миноры третьего порядка исходной матрицы A равны нулю, а все миноры второго порядка отличны от нуля. Из определения получаем, что ранг матрицы A равен 2.Следовательно в качестве *базисного минора* можно выбрать произвольный минор второго порядка (например первый).

Нахождение ранга матрицы с помощью вычисления всех ее миноров требует слишком большой вычислительной работы. (Читатель может проверить, что в квадратной матрице четвертого порядка 36 миноров второго порядка.) Поэтому для нахождения ранга применяются другие алгоритмы.

Напомним виды элементарных преобразований:

Определение 2.4.3. Назовем *элементарными преобразованиями* матриц следующие действия над ними:

- перестановка строк или столбцов;
- умножение строки или столбца на число отличное от нуля;
- добавление к одной из строк другой строки, умноженной на число или добавление к одному из столбцов другого столбца, умноженного на число.

Теорема 2.4.7. *При элементарных преобразованиях ранг матрицы не меняется.*

[3]Из матрицы $[m \times n]$ можно составить $\binom{m}{k} \cdot \binom{n}{k}$ миноров k -го порядка

Доказательство. Рассмотрим каждое преобразование. Обозначим исходную матрицу через A, A' — матрица, получившаяся в результате выполнения элементарного преобразования.

1. После перестановок двух строк или столбцов матрицы A мы приходим к новой матрице A', каждый минор которой M', либо равен некоторому минору M матрицы A, либо отличается от некоторого минора M матрицы A лишь перестановкой двух строк (столбцов) матрицы A. Следовательно либо $M = M'$, либо $M = -M'$. Таким образом M и M' либо равны нулю, либо отличны от нуля одновременно.

2. Рассмотрим умножение строки на число α, отличное от нуля. Минору M из матрицы A соответствует минор M' из матрицы A' или совпадающий с M, или отличающийся от него только одной строкой, которая получается из строки минора M умножением на число, отличное от нуля. В последнем случае $M' = \alpha M$. Во всех случаях или M и M' одновременно равны нулю, или одновременно отличны от нуля. Следовательно, ранг не меняется.

3. Пусть ранг матрицы A равен r. Пусть матрица A' получена следующим образом: к i — ой строке матрицы A прибавлена её j —ая строка, умноженная на число λ. Покажем, что

$$rgA' \leqslant rgA.$$

Для этого покажем, что каждый минор M' матрицы A' порядка k, где $k > rgA$ равен нулю. Обозначим ранг матрицы A через r.

- Если через минор M' не проходит i -ая строка, то он совпадает с минором M, расположенным в тех же строках и столбцах в матрице A, и следовательно, равен нулю.
- Если через минор M' проходят и i -ая и j -ая строки, то он получается из минора M, расположенного в тех же строках и столбцах матрицы A, прибавлением к i-ой строке минора M j-ой строки, умноженной на λ. По свойству определителя $M = M'$. Следовательно, $M' = 0$. На примере это действие выглядит так:

$$M' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} & a_{1n} \\ a_{i1}+\lambda a_{j1} & a_{i4}+\lambda a_{j4} & a_{in}+\lambda a_{jn} \\ a_{j1} & a_{j4} & a_{jn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i4} & a_{in} \\ a_{j1} & a_{j4} & a_{jn} \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} & a_{1n} \\ a_{j1} & a_{j4} & a_{jn} \\ a_{j1} & a_{j4} & a_{jn} \end{vmatrix} = M + 0 = M = 0.$$

- Пусть через минор M' проходит i-ая строка и не проходит j-ая. Тогда M' отличается от M i -ой строкой. Эта строка в M' является строкой M, к которой добавлены элементы j -ой строки, умноженные на λ. По свойствам определителей $M' = M + \lambda(\pm M_1)$, где M_1 — минор порядка k, где $k > r$, матрицы A, стоящий в j-ой строке и в тех же строках, что и минор M, исключая i -ую, а знак "$\pm$ "связан с возможным изменением порядка строк. Так как все миноры порядка k, где $k > r$, в матрице A равны нулю, то $M' = 0$. На примере это выглядит так:

$$M' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} & a_{1n} \\ a_{i1}+\lambda a_{j1} & a_{i4}+\lambda a_{j4} & a_{in}+\lambda a_{jn} \\ a_{n1} & a_{n4} & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i4} & a_{in} \\ a_{n1} & a_{n4} & a_{nn} \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} & a_{1n} \\ a_{j1} & a_{j4} & a_{jn} \\ a_{n1} & a_{n4} & a_{nn} \end{vmatrix} = M + \lambda M_1 = 0+0.$$

Итак, в матрице A' все миноры порядка $k \geqslant r+1$ равны нулю. Следовательно, $rgA' \leqslant r$, то есть при выполнении элементарного преобразования третьего типа ранг не может повыситься.

Но матрица A, в свою очередь, получается из матрицы A' элементарным преобразованием: надо в матрице A' к i-ой строке прибавим j-ую строку, умноженную на число $(-\lambda)$. В результате получим исходную матрицу A.

По только что доказанному $rgA \leqslant rgA'$. Следовательно, $rgA' = rgA$. □

Нетрудно убедиться, что при помощи элементарных преобразований любую матрицу можно привести к виду:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1&0&0&\dots&0&0&\dots&0&0&0\\ 0&1&0&\dots&0&0&\dots&0&0&0\\ 0&0&1&\dots&0&0&\dots&0&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\ 0&0&0&\dots&1&0&\dots&0&0&0\\ \hline 0&0&0&\dots&0&0&\dots&0&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\ 0&0&0&\dots&0&0&\dots&0&0&0 \end{array}\right), \tag{2.4.10}$$

где на главной диагонале стоят r единиц, а все остальные элементы матрицы равны нулю.

П р и м е р 2.4.2. Найти ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-3&1\\2&1&2&3\\4&5&-4&5\end{pmatrix}$$

и при помощи элементарных преобразований привести её к виду (2.4.10).

Доказательство. Приведём матрицу A к верхнетреугольному виду, при помощи элементарных преобразований над строками. Текущую строку мы будем обозначать через $\vec{a}_k$. Сразу за матрицей мы будем указывать элементарное преобразование. Например, выражение $\vec{a}_2-3\vec{a}_1$ будет обозначать, что из второй строки мы вычитает утроенную первую.

$$\begin{pmatrix}1&2&-3&1\\2&1&2&3\\4&5&-4&5\end{pmatrix}\left|\begin{array}{l}\vec{a}_1\\ \vec{a}_2-2\vec{a}_1\\ \vec{a}_3-2\vec{a}_2\end{array}\right. \sim \begin{pmatrix}1&2&-3&1\\0&-3&8&1\\0&3&-8&-1\end{pmatrix}\left|\begin{array}{l}\\ \vec{a}_2'/(-3)\\ \vec{a}_3'+\vec{a}_2'\end{array}\right. \sim \begin{pmatrix}1&2&-3&1\\0&1&-8/3&-1/3\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Из данного представления мы можем уже сделать вывод о том, что ранг исходной матрицы равен трём. Приведём теперь матрицу A к виду (2.4.10). Для этого продолжим, используя элементарные преобразования над столбцами, упрощать вид матрицы. В строке над матрицей мы будем указывать элементарное преобразование над столбцами, текущие столбцы будем обозначать $\vec{b}_k$. Например, выражение $\vec{b}_2-3\vec{b}_1$ будет обозначать, что из второго столбца мы вычитает утроенный первый столбец.

$$\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} & \vec{b}_2-2\vec{b}_1 & \vec{b}_3+3\vec{b}_1 & \vec{b}_4-\vec{b}_1\end{array}\\ \begin{pmatrix}1&2&-3&1\\0&1&-8/3&-1/3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\end{array} \sim \begin{array}{c}\begin{array}{cccc} & & \vec{b}_3'+(8/3)\vec{b}_2' & \vec{b}_4'+(1/3)\vec{b}_2'\end{array}\\ \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&-8/3&-1/3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\end{array} \sim \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Матрица A приведена к виду (2.4.10). Откуда мы ещё раз делаем вывод о том, что ранг матрицы A равен двум. □

П р и м е р 2.4.3. Найти ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1&-5&7\\3&2&1\\5&-8&15\\7&16&-11\end{pmatrix}$$

и при помощи элементарных преобразований привести её к виду (2.4.10).

Доказательство. Приведём матрицу A к верхнетреугольному виду, при помощи элементарных преобразований над строками.

$$\begin{pmatrix}1&-5&7\\3&2&1\\5&-8&15\\7&16&-11\end{pmatrix}\left|\begin{array}{l}\vec{a}_1\\ \vec{a}_2-3\vec{a}_1\\ \vec{a}_3-5\vec{a}_1\\ \vec{a}_4-\vec{a}_3-2\vec{a}_1\end{array}\right. \sim \begin{pmatrix}1&-5&7\\0&17&-20\\0&17&-20\\0&34&-40\end{pmatrix}\left|\begin{array}{l}\\ \\ \vec{a}_3'-\vec{a}_2'\\ \vec{a}_4'-2\vec{a}_2'\end{array}\right. \sim \begin{pmatrix}1&-5&7\\0&17&-20\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Уже сейчас мы можем сделать вывод о том, что ранг матрицы A равен двум. Приведём теперь матрицу A к виду (2.4.10). Для этого продолжим, используя элементарные преобразования над столбцами, упрощать вид матрицы.

$$\begin{array}{ccc} & \vec{b}_2+5\vec{b}_1 & \vec{b}_3-7\vec{b}_1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & \vec{b}'_2/17 & \vec{b}'_3+\frac{20}{17}\vec{b}'_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 0 & 17 & -20 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & -20 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица A приведена к виду (2.4.10). Откуда мы ещё раз делаем вывод о том, что ранг матрицы A равен двум. □

2.4.1 Линейная зависимость

Определение 2.4.4. Пусть $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ — строки матрицы A. Будем говорить, что строки $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ матрицы *линейно зависимы*, если существуют такие константы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, не равные одновременно нулю, что

$$\alpha_1\vec{e}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{e}_n = \vec{0}. \tag{2.4.11}$$

Определение 2.4.5. Будем говорить, что строки $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ матрицы A *линейно независимы*, если равенство (2.4.11) имеет место тогда и только тогда, когда все $\alpha_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

П р и м е р 2.4.4. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & -5 \end{pmatrix}.$$

Докажите, что строки данной матрицы линейно зависимы.

Доказательство. Рассмотрим строки данной матрицы:

$$\vec{e}_1 = (1, 2, -3), \quad \vec{e}_2 = (2, 3, 1), \quad \vec{e}_3 = (4, 7, -5).$$

Заметим, что справедливо

$$2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 = (0, 0, 0) = \vec{0}.$$

Следовательно строки матрицы A линейно зависимы. □

П р и м е р 2.4.5. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 11 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Докажите, что строки данной матрицы линейно независимы.

Доказательство. Рассмотрим строки данной матрицы:

$$\vec{e}_1 = (6, -2, 11), \quad \vec{e}_2 = (0, 3, 1), \quad \vec{e}_3 = (0, 0, -4).$$

Предположим, что справедливо

$$\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3 = (0, 0, 0).$$

Данное уравнение равносильно системе из трёх уравнений

$$\begin{cases} 6\alpha_1 = 0, \\ -2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0, \\ 11\alpha_1 + \alpha_2 - 4\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем, что $\alpha_1 = 0$, из второго $\alpha_1 = 0$, а из третьего $\alpha_3 = 0$. Следовательно строки матрицы A линейно независимы. □

Будем далее рассматривать матрицу A вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Сформулируем важную теорему.

Теорема 2.4.8 (О ранге матрице)**.** *Пусть для матрицы A известен её ранг $\operatorname{rang} A = r$. Тогда в этой матрице можно найти r линейно независимых строк (столбцов), через которые линейно выражаются все остальные её строки (столбцы).*

Иначе говоря теорема утверждает о том, что:

Замечание 8. Ранг равен числу линейно независимых строк (столбцов) в матрице.

Замечание 9. Данная теорема содержит в себе утверждение о равенстве числа линейно независимых строк числу линейно независимых столбцов для произвольной (прямоугольной) матрицы.

Теорема о ранге матрицы часто называется теоремой о базисном миноре. Поскольку допускает следующую формулировку.

Замечание 10 (Теорема о базисном миноре)*.* Столбцы матрицы A, входящие в базисный минор M, образуют линейно независимую систему. Любой столбец матрицы A линейно выражается через столбцы из базисного минора.

Доказательство. Предположим, для определённости, у матрицы A базисный минор расположен в левом верхнем углу ($r \leqslant \min\{m, n\}$), т.е.

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Линейная независимость первых r строк Предположим обратное, т.е. что первые r строк матрицы A линейно зависимы, но тогда линейно зависимы (более короткие строки) строки в базисном миноре M. Например, последняя строка линейно выражается через все остальные:

$$\vec{e}_r = \alpha_1 \vec{e}_1 + \dots + \alpha_{r-1} \vec{e}_{r-1}.$$

Следовательно, если мы из последней строки в миноре M вычтем первую, умноженную на α_1, вторую — на α_2, и т.д., наконец, вычтем $r-1$ строку, умноженную на α_{r-1} мы получим в итоге последнюю строку, состоящую из одних нулей. Определитель которой равен нулю. Но, поскольку элементарные преобразования, как нам известно, не меняют определитель матрицы, то мы получим матрицу с определителем таким же, как и у исходного минора M, т.е. равным нулю. Полученное противоречее доказывает, что первые r строк матрицы A линейно независимы.

Зависимость остальных строк через первые r строк Пусть строк у матрицы A будет больше, чем r (иначе, если строк ровно r доказывать нечего, все строки линейно независимы). Поскольку ранг матрицы A равен r, то любой определитель вида

$$B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & a_{rl} \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kr} & a_{kl} \end{vmatrix} = 0$$

равен нулю. Поскольку при $l \leqslant r$ у нас будет два одинаковых столбца, а при $l > r$ получим минор $r+1$ порядка, определитель которого тоже равен нулю. разложение по последнему столбцу даёт равенство:

$$a_{1l}A_1 + a_{2l}A_2 + \dots + a_{rl}A_r + a_{kl}A_{r+1} = 0.$$

Алгебраические дополнения $A_1, \ldots, A_{r+1}$ элементов последнего столбца зависят от k, но не зависят от l, так как при их вычислении последний столбец вычёркивается. Более того $A_{r+1} \neq 0$. Следовательно, полученное равенство равносильно

$$\gamma_1 a_{1l} + \gamma_2 a_{2l} + \cdots + \gamma_r a_{rl} + a_{kl} = 0, \quad \forall l = 1, \ldots n,$$

где $\gamma_s = A_s/A_{r+1}$. Откуда полачаем

$$\gamma_1 \vec{e}_1 + \gamma_2 \vec{e}_2 + \cdots + \gamma_r \vec{e}_r + \vec{e}_k = \vec{0},$$

последнее равенство как раз и означает линейную зависимость k-ой строки от первых r строк.

□

П р и м е р 2.4.6. Вернёмся к примеру 2.4.1, рассмотрим вектора составление из строк матрицы A:

$$\vec{a}_1 = (1, 2, 1, 1), \ \vec{a}_2 = (0, 1, -1, 2), \ \vec{a}_3 = (2, 5, 1, 4).$$

Легко заметить, что справедливо равенство:

$$2\vec{a}_1 + \vec{a}_2 - \vec{a}_3 = \vec{0},$$

т.е. вектора $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ — линейно зависимы. Но, поскольку вектора $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ — линейно независимы, на основе предыдущего утверждения делаем вывод о равенстве $rgA = 2$. Таким образом, мы опять получаем, что ранг матрицы A равен 2.

2.4.2 Метод Гаусса

Как решать систему $A\vec{x} = \vec{b}$ в случае, когда $\det A = 0$ или когда матрица вообще не квадратная. Можно воспользоваться методом Гаусса. Сначала рассмотрим случай однородной системы.

Теорема 2.4.9. *Множество решений системы $A\vec{x} = \vec{0}$ (называемой однородной) является векторным пространством.*

Определение 2.4.6. Любой базис векторного пространства решений однородной системы $A\vec{x} = \vec{0}$ называется *фундаментальной системой решений.*

Доказательство. Следует проверить, что если $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ — решение системы, то $\vec{x}_1 + \vec{x}_2$ — тоже решения, и что если $\vec{x}$ — решение, α — число, то $\alpha\vec{x}$ — тоже решение. Действительно,

$$\begin{aligned} &A(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 + A\vec{x}_2 = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}, \\ &A(\alpha\vec{x}) = \alpha A\vec{x} = \alpha\vec{0} = \vec{0}. \end{aligned}$$

□

Укажем на примере, как искать решения однородной системы методом Гаусса. Решим систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 9x_4 = 0. \end{cases}$$

Преобразуем эту систему уравнений. Преобразования удобно записывать в виде действий над ее матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 5 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 - 2\vec{a}_1 \\ \vec{a}_3 - 3\vec{a}_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & -3 \\ 0 & -1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Эта матрица соответствует равносильной системе

$$\begin{cases} x_1 + \ 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ \qquad -x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 0 \\ \qquad -x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Смысл преобразований понятен— мы исключили переменную x_1 из всех уравнений, кроме первого. Далее вычтем из третьего уравнения второе:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & -3 \\ 0 & -1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \vec{a}_1 \\ -\vec{a}_2' \\ \vec{a}_3' - \vec{a}_2' \end{array} \qquad \sim \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пояснения: получили систему

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0, \\ -x_2 - 5x_3 - 3x_4 &= 0, \\ x_3 &= 0. \end{aligned} \right.$$

и сменили знак у левой части второго уравнения, получив при этом равносильную систему

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0, \\ x_2 + 5x_3 + 3x_4 &= 0, \\ x_3 &= 0. \end{aligned} \right.$$

Продолжим

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + 7\vec{a}_3 \\ \vec{a}_2 - 5\vec{a}_3 \\ \vec{a}_3 \end{array} \qquad \sim \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

В итоге получена равносильная система

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 - 2x_4 &= 0 \\ x_2 + 3x_4 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{aligned} \right. \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left\{ \begin{aligned} x_1 &= 2x_4 \\ x_2 &= -3x_4 \\ x_3 &= 0 \end{aligned} \right. .$$

Это означает, что вектор $\vec{x} = (x_1\ x_2\ x_3\ x_4)^T$, являющийся решением системы, можно записать в виде:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2x_4 \\ -3x_4 \\ 0 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, любое решение этой системы пропорционально вектору $(2\ \ -3\ 0\ 1)^T$. Это — одномерное векторное пространство. Докажем, что ранг матрицы системы равен 3. Мы привели преобразования, которых отличный от нуля минор остается отличным от нуля. В итоговой матрице есть минор $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$. Получаем равенство: ранг матрицы (в нашем случае — 3) в сумме с размерностью пространств решений системы (в нашем случае — 1) равен числу координат искомого вектора (в нашем случае — 4). В общем случае, если $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ранг матрицы A равен r, то размерность пространства решений однородной системы равна $n - r$.

Неоднородные системы

Перейдём к *неоднородным системам.* Пусть $\vec{x}$, $\vec{x}_0$ — решения системы, т.е. $A\vec{x} = \vec{b}$, $A\vec{x}_0 = \vec{b}$. Тогда вектор $\vec{x} - \vec{x}_0$ удовлетворяет однородной системе, т.к.

$$A(\vec{x} - \vec{x}_0) = A\vec{x} - A\vec{x}_0 = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}.$$

Значит, если зафиксировать какое-то решение $\vec{x}_0$ неоднородной системы, то любое другое решение $\vec{x}$ отличается от $\vec{x}_0$ на некоторое решение однородной системы. Поясним сказанное на примере системы

П р и м е р 2.4.7. Решите систему уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 2, \\ & 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 9x_4 = 3. \end{aligned} \right.$$

Доказательство. Запишем расширенную матрицу системы

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 4 & 9 & 3 \end{array}\right).$$

Вычтем из второй строки удвоенную первую, из третьей строки утроенную первую:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

получилось, что третье уравнение лишнее,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 0 \end{array}\right),$$

прибавим к первой строке удвоенную вторую

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -7 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -7 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right);$$

иными словами, исходная система равносильна такой:

$$\begin{cases} x_1 = 7x_3 + 2x_4 + 1, \\ x_2 = -5x_3 - 3x_4. \end{cases}$$

Это означает, что любое решение (x_1, x_2, x_3, x_4) этой системы получается так: задав произвольным образом значения x_3, x_4 находим остальные числа x_1, x_2 по указанным формулам. Вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$, являющийся решением системы, имеет вид

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 7x_3 + 2x_4 \\ -5x_3 - 3x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

Выделим в нем составляющие, зависящие от x_3, x_4:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7x_3 \\ -5x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x_4 \\ -3x_4 \\ 0 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Вектор $\vec{x}_0 = (1, 0, 0, 0)^T$ — одно из решений системы, фундаментальная система решений однородной системы состоит из векторов

$$\begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в этом случае ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 9 \end{pmatrix} = rg \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 4 & 9 & 3 \end{array}\right) = 2.$$

□

Но, в общем случае ранг матрицы системы не обязан совпадать с рангом расширенной матрицы.

П р и м е р 2.4.8. Решите систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 9x_4 = 2. \end{cases}$$

Доказательство. Для данной системы получаем

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 4 & 9 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \vec{a}_2 - 2\vec{a}_1 \\ \vec{a}_3 - 3\vec{a}_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \vec{a}_3' - \vec{a}_2' \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

У полученной равносильной системы два последних уравнения несовместны. Она не имеет решений. На это указывает и то, что ранг расширенной матрицы больше, чем ранг исходной матрицы. □

П р и м е р 2.4.9. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 = 20, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + 16x_4 = 12. \end{cases}$$

Доказательство. Запишем расширенную матрицу системы

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 8 & 20 \\ 1 & -1 & -2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 16 & 12 \end{array}\right) \begin{array}{c} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 - \vec{a}_1 \\ \vec{a}_3 - 3\vec{a}_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 8 & 20 \\ 0 & -2 & -5 & -3 & -19 \\ 0 & -4 & -12 & -8 & -48 \end{array}\right) \begin{array}{c} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_3/(-4) \\ \vec{a}_2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 8 & 20 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & -2 & -5 & -3 & -19 \end{array}\right) \begin{array}{c} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 + 2\vec{a}_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 8 & 20 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \vec{a}_1 - \vec{a}_2 \\ \vec{a}_2 - 3\vec{a}_3 \\ \vec{a}_3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

исходная система равносильна такой:

$$\begin{cases} x_1 = -6x_4 + 8, \\ x_2 = x_4 - 3, \\ x_3 = -x_4 + 5. \end{cases}$$

Таким образом произвольное решение $\vec{x} = (x_1\ x_2\ x_3\ x_4)^T$ имеет вид

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6x_4 + 8 \\ x_4 - 3 \\ -x_4 + 5 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Фундаментальная система решений однородной системы состоит из вектора $\vec{a}_1 = (-6, 1, -1, 1)^T$. Заметим, что в этом случае ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 8 \\ 1 & -1 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & -3 & 16 \end{pmatrix} = rg \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 8 & 20 \\ 1 & -1 & -2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 16 & 12 \end{array}\right) = 3.$$

□

Сформулируем без доказательства важную теорему, которую мы только что проиллюстрировали.

Теорема 2.4.10 (Кронекер, Капелли)**.** *Решение системы уравнений*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

(или $A\vec{x} = \vec{b}$ в матричном виде) существует тогда и только тогда, когда $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A|\vec{b})$.

Замечание 11. Данную теорему можно сформулировать таким образом:

Если ранг матрицы A системы $A\vec{x} = \vec{b}$ равен рангу расширенной матрицы системы, то система имеет решения; если же он меньше ранга расширенной матрицы, то система не имеет решений.

Доказательство. Проведем доказательство в каждую сторону.

Необходимость. Система $A\vec{x} = \vec{b}$ может быть записана в виде:

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}. \tag{2.4.12}$$

Откуда следует, что если решение существует, то столбец свободных членов есть линейная комбинация столбцов матрицы А, а значит добавление этого столбца в матрицу не меняет ранга, т.е $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A|\vec{b})$.

Достаточность. Пусть $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A|\vec{b})$. Возьмём в матрице A какой-нибудь базисный минор. Так как $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A|\vec{b})$, то он же будет базисным минором и расширенной матрицы. Тогда, как следует из теоремы о ранге матрицы (её ещё называют теоремой о базисном миноре), последний столбец расширенной матрицы будет линейной комбинацией базисных столбцов, то есть столбцов матрицы A. Следовательно, столбец свободных членов системы является линейной комбинацией столбцов матрицы A и таким образом справедлива формула (2.4.12).

□

Контрольные вопросы.

1. Дайте определение ранга матрицы.
2. Сформулируйте теорему Кронекера-Капелли.

Упражнения к 2.4

Упражнение 2.4.1. *Вычислить ранг матрицы при всевозможных значениях параметра α:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Упражнение 2.4.2. *Исследовать следующую систему и найти общее решение в зависимости от значений параметра α:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \alpha x_3 = 1, \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 = 2, \\ \alpha x_1 + x_2 + x_3 = -3; \end{cases}$$

Упражнение 2.4.3. *Исследуйте систему линейных уравнений и найдите общее решение в зависимости от параметра λ*

$$\begin{cases} -10x_1 + 9x_2 + 9x_3 - 6x_4 = 3, \\ -6x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 1, \\ -4x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 2, \\ \lambda x_1 - 4x_2 + 6x_3 + 6x_4 = -6. \end{cases}$$

Найдите общее решение следующих систем уравнений через фундаментальную систему решений.

Упражнение 2.4.4.

$$(a) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0, \\ 4x_1 + 11x_3 - 14x_4 = 0, \\ 7x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + 6x_2 - 20x_3 + 29x_4 = 0; \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 7x_4 = 0, \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 0, \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 10x_4 = 0. \end{cases}$$

Упражнение 2.4.5.

$$(a)\begin{cases} 2x_1+x_2-3x_3+x_4-x_5=0,\\ 3x_1+5x_2+2x_3+x_4+x_5=0,\\ x_1-3x_2-8x_3+x_4-3x_5=0.\end{cases}\qquad (b)\begin{cases} x_1+x_2-3x_3+x_4-x_5=0,\\ -x_1+5x_2-13x_3+x_4-5x_5=0,\\ 2x_1-x_2+2x_3+x_4+x_5=0.\end{cases}$$

Исследуйте систему на совместность. Если система совместна, то найдите общее решение следующих систем уравнений через фундаментальную систему решений приведённых систем.

Упражнение 2.4.6.

$$(a)\begin{cases} x_1+x_2-3x_3+5x_4=4,\\ -2x_1+3x_2-x_3+4x_4=4,\\ 3x_1+7x_2-13x_3+21x_4=18,\\ -x_1+3x_2-x_3+x_4=2;\end{cases}\qquad (b)\begin{cases} 4x_1+x_2-x_3-3x_4=3,\\ -2x_1+x_2-3x_3+2x_4=-5,\\ -x_1+2x_2+3x_3+x_4=2,\\ -2x_1+4x_2-10x_3+3x_4=-12.\end{cases}$$

Упражнение 2.4.7.

$$(a)\begin{cases} 4x_1-x_2-2x_3-3x_4-2x_5=-1,\\ 3x_1+x_2-x_3-5x_4+x_5=-1,\\ -3x_1+2x_2-x_3+2x_4-x_5=-2,\\ -x_1+2x_2+x_3-2x_4+3x_5=0;\end{cases}\qquad (b)\begin{cases} -2x_1-x_2-x_3+2x_4+x_5=2,\\ -x_1+3x_2+x_3+x_4-x_5=1,\\ -5x_1+x_2+x_3+2x_4+2x_5=5,\\ -2x_1-x_2+x_3-x_4+2x_5=2.\end{cases}$$

Ответы: 2.4.1 Если $\alpha=1$, то $\operatorname{rang} A=1$; если $\alpha=\{0;-2\}$, то $\operatorname{rang} A=2$; если $\alpha\in\mathbb{R}\backslash\{-2;0;1\}$, то $\operatorname{rang} A=3$. **2.4.2** Если $\alpha=1$ решений нет; если $\alpha=-2$, то $(x_1\ x_2\ x_3)^T=x_3\cdot(1\ 1\ 1)^T+(4/3\ \ -1/3\ 0)^T$; если $\alpha\in\mathbb{R}\backslash\{-2;1\}$, то $(x_1\ x_2\ x_3)^T=\frac{1}{\alpha-1}\cdot(-3\ 2\ 1)^T$. **2.4.3** Если $\lambda=0$, то решений нет; если $\lambda\neq 0$, то $(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)^T=x_4\cdot(0\ 1\ \ -1/3\ 1)^T+(2/\lambda\ \ 1+4/(3\lambda)\ \ -2/3+8/(9\lambda))^T$. **2.4.4** (a) $\alpha\cdot(-22\ 23\ 8\ 0)^T+\beta\cdot(14\ \ -17\ 0\ 4)^T$, $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$; (b) $\alpha\cdot(17\ 8\ 34\ 11)^T$, $\alpha\in\mathbb{R}$. **2.4.5** (a) $\alpha\cdot(1\ \ -13/17\ 7/17\ 0\ 0)^T+\beta\cdot(0\ \ -5/17\ 4/17\ 1\ 0)^T+\gamma\cdot(0\ \ -1/17\ \ -6/17\ 0\ 1)^T$, $\alpha,\ \beta,\ \gamma\in\mathbb{R}$; (b) $\alpha\cdot(1\ 8\ 3\ 0\ 0)^T+\beta\cdot(0\ 5\ 2\ 1\ 0)^T+\gamma\cdot(0\ 1\ 0\ 0\ 1)^T$, $\alpha,\ \beta,\ \gamma\in\mathbb{R}$. **2.4.6** (a) $\alpha\cdot(12\ 7\ 13\ 4)^T+(1\ 1\ 1\ 1)^T$, $\alpha\in\mathbb{R}$; (b) $\alpha\cdot(13\ \ -3\ 1\ 16)^T+(1\ 0\ 1\ 0)^T$, $\alpha\in\mathbb{R}$. **2.4.7** (a) $\alpha\cdot(7\ 7\ 3\ 5\ 0)^T+\beta\cdot(-1\ \ -2\ \ -3\ 0\ 2)^T+(1\ 0\ 0\ 1\ 1)^T$, $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$; (b) $\alpha\cdot(8\ \ -9\ 21\ 14\ 0)^T+\beta\cdot(6\ 9\ \ -7\ 0\ 14)^T+(0\ 0\ 1\ 1\ 1)^T$, $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$.

Глава 3

Пространство $\mathbb{R}^d$. Линейное (векторное) пространство

3.1 Векторы, операции над ними. Векторное пространство.

Пусть задано множество V, элементы которого будем называть *векторами*. Пусть для любых $\vec{a} \in V, \vec{b} \in V$ определена сумма $\vec{a} + \vec{b} \in V$ и для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ определено произведение $\alpha \cdot \vec{a} \in V$, причем эти операции обладают следующими свойствами:

1. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$,
2. существует $\vec{0} \in V$, т.е. такой элемент, что $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$, причем такой элемент единственный,
3. для любого $\vec{a} \in V$ существует (притом единственный) элемент $-\vec{a} \in V$ такой, что $\vec{a} + (\vec{-a}) = \vec{0}$,
4. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$,
5. $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a}) = (\alpha\beta) \cdot \vec{a}$,
6. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$,
7. $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$.
8. $\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$,
9. $(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}$,

Определение 3.1.1. При выполнении этих условий множество V с введенными в нем операциями сложения векторов и умножения вектора на число называется *векторным (или линейным) пространством* (над $\mathbb{R}$). Элементы векторного пространства называются *векторами*.

П р и м е р 3.1.1 (Пример векторного пространства $\mathbb{R}^m$)**.** Напомним, что элементы $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$ имеют вид: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = (a_1, \ldots, a_m)^T$.

- По определению,
$$\vec{a} = \vec{b} \Longleftrightarrow a_i = b_i, \quad i = 1, \ldots m.$$
- Сумма $\vec{a} + \vec{b}$ определяется, как вектор $\begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_m + b_m \end{pmatrix}$;

- произведение $\alpha\vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \vdots \\ \alpha a_m \end{pmatrix}$,

- $\vec{0} \in \mathbb{R}^m$ имеет вид $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Проверка перечисленных выше свойств 1 -9 не составляет труда. Итак, $\mathbb{R}^m$ — векторное пространство.

Определение 3.1.2. Элементы $\vec{a_1}, \ldots \vec{a_k} \in V$ называются *линейно зависимыми*, если существуют числа $x_1, \ldots, x_k$, хотя бы одно из которых не равно 0, такие, что $x_1\vec{a_1} + \cdots + x_k\vec{a_k} = \vec{0}$. Если же из этого равенства следует, что $x_1 = \cdots = x_k = 0$, то $\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_k}$ называются *линейно независимыми*.

Например, $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, ..., $\vec{e_m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ — линейно независимые элементы $\mathbb{R}^m$. Действительно, если $x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_m\vec{e_m} = \vec{0}$, то это равенство можно переписать в виде

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

или $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, откуда $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$.

Кроме того, мы доказали, что любой вектор $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ можно представить в виде $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_m\vec{e}_m$.

3.1.1 Размерность. Базис

Определение 3.1.3. Линейное пространство V называется n -мерным, если в нём можно найти n линейно независимых векторов, но больше чем n линейно независимых векторов оно не содержит.

Таким образом размерность пространства — это максималное число содержащихся в нём линейно независимых векторов. Размерность пространства V будем обозначать $\dim V$.

Определение 3.1.4. Пространства имеющие конечную размерность будем называть *конечномерными*. Пространства в котором можно найти сколь угодно много линейно независимых векторов, называется *бесконечномерным*.

Определение 3.1.5. Совокупность n линейно независимых векторов n -мерного пространства V назовём его *базисом*.

Теорема 3.1.11. *Каждый вектор $\vec{x}$ линейного n - мерного пространства V можно представить, и притом единственным образом, в виде линейной комбинации векторов базиса.*

Доказательство. Докажем сначала, что вектор $\vec{x}$ является линейной комбинацией базисных векторов, а затем единственность этого разложения.

Разложение по базису Пусть $\vec{e}_1$, …, $\vec{e}_n$ — произвольный базис V. Тогда по определению $\vec{e}_1$, …, $\vec{e}_n$ — линейно независимая система векторов. Рассмотрим произвольный вектор $\vec{x} \in V$. Тогда по определению $\vec{e}_1$, …, $\vec{e}_n$, $\vec{x}$ — линейно зависимая система векторов. Т.е. существуют такие не равные нулю одновременно числа α_1, …, α_n, α, что

$$\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n + \alpha\vec{x} = \vec{0}.$$

Покажем, что $\alpha \neq 0$. Действительно, в случае $\alpha = 0$ следует, что хотя бы одно из чисел α_1, …, α_n, α отлично от нуля, и значит, векторы $\vec{e}_1$, …, $\vec{e}_n$ линейно зависимы. Следовательно,

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n,$$

где $x_1 = -\alpha_1/\alpha$, …, $x_n = -\alpha_n/\alpha$.

Единственность разложения Предположим противное. Пусть вектор $\vec{x}$ раскладывается по базисным векторам двумя способами:

$$\begin{aligned}
&\vec{x} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n;\\
&\vec{x} = \alpha'_1\vec{e}_1 + \alpha'_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha'_n\vec{e}_n;\\
&\vec{0} = (\alpha'_1 - \alpha_1)\vec{e}_1 + (\alpha'_2 - \alpha_2)\vec{e}_2 + \ldots + (\alpha'_n - \alpha_n)\vec{e}_n.
\end{aligned}$$

Векторы $\vec{e}_1$, …, $\vec{e}_n$ линейно независимы. Тогда

$$\begin{aligned}
&\alpha'_k - \alpha_k = 0,\\
&\alpha'_k = \alpha_k.
\end{aligned}$$

□

Можно доказать, что любой базис пространства V состоит из одного и того же числа n векторов.

Определение 3.1.6. Число векторов любого базиса пространства V называется *размерностью* и обозначается $\dim V$.

П р и м е р 3.1.2. 1. Выше мы доказали, что векторы $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_m$ образуют базис пространства $\mathbb{R}^m$, таким образом, $\dim \mathbb{R}^m = m$.

2. Нулевое линейное пространство $\{0\}$ не содержит линейно независимых векторов. Поэтому размерность этого пространства полагают равной нулю: $\dim\{0\} = 0$. Это пространство не имеет базиса.

3. Напомним, что любое решение однородной системы $A\vec{x} = \vec{0}$ (здесь матрица A имеет размер $n \times n$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$) можно представить в виде $\vec{x} = C_1\vec{e}_1 + C_2\vec{e}_2 + \cdots + C_{n-r}\vec{e}_{n-r}$, где $r = rgA$, а $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, …, $\vec{e}_{n-r}$ — фундаментальная система решений. Следовательно,

$$V_A = \{\vec{x} : \ A\vec{x} = \vec{0}\} = \mathrm{Lin}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{n-r}),$$

т.е. базисом пространства V_A решений однородной системы служит ее фундаментальная система решений, а размерность пространства $\dim V_A = n - r$, где n — количество неизвестных, а r – ранг матрицы системы.

4. В пространстве $M_{2\times 3}$ матриц размеров 2×3 можно выбрать 6 матриц:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

которые линейно независимы. Действительно, их линейная комбинация

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 + \lambda_5 e_5 + \lambda_6 e_6 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_4 & \lambda_5 & \lambda_6 \end{pmatrix} \tag{3.1.1}$$

равна нулевой матрице только в тривиальном случае $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0$. Переписав последнее равенство (3.1.1) справа налево, заключаем, что любая матрица из $M_{2\times 3}$ линейным образом выражается через выбранные 6 матриц, т.е. $M_{2\times 3} = \mathrm{Lin}(e_1, e_2, \ldots, e_6)$. Следовательно, $\dim M_{2\times 3} = 6$, а матрицы $e_1, e_2, \ldots, e_6$ являются базисом (стандартным) этого пространства. Аналогично доказывается, что $\dim M_{m\times n} = m \cdot n$.

5. Пусть $n \in \mathbb{N}$ в пространстве $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$ — многочленов с комплексными коэффициентами, степени не выше чем n, можно найти $n+1$ линейно независимых элементов. Например, многочлены $\vec{e}_1 = 1$, $\vec{e}_2 = z$, $\vec{e}_3 = z^2$, ..., $\vec{e}_{n+1} = z^n$ линейно независимы, так как их линейная комбинация

$$\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \cdots + \lambda_{n+1}\vec{e}_{n+1} = \lambda_1 + \lambda_2 z + \cdots + \lambda_{n+1}z^n$$

равна нулевому многочлену $\equiv 0$ только в тривиальном случае $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n+1} = 0$. Следовательно, $\dim \mathcal{P}_n(\mathbb{C}) = n+1$.

Аналогично пространство $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ — многочленов с комплексными коэффициентами, степени не выше чем n — конечномерное, с базисом $\vec{e}_1 = 1$, $\vec{e}_2 = x$, $\vec{e}_3 = x^2$, ..., $\vec{e}_{n+1} = x^n$. Размерность $\dim \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) = n+1$.

6. В пространстве $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ — многочленов с комплексными коэффициентами многочлены $e_1 = 1$, $e_2 = z$, $e_3 = z^2$, ..., $e_{n+1} = z^n$ линейно независимы для любого натурального n (см. предыдущий пример). Следовательно пространство $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ — бесконечномерное.

Аналогично делаем вывод о бесконечной размерности пространства $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ многочленов с действительными коэффициентами.

7. Пространство $C(\mathbb{R})$ непрерывных функций является бесконечномерным. Действительно, для любого натурального n многочлены 1, x, x^2, ..., x^n, рассматриваемые как непрерывные функции, образуют линейно независимые системы (см. предыдущий пример).

Укажем связь рассматриваемых понятий с системами уравнений. Линейная комбинация $x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n$ векторов $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$, ..., $\vec{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$, равна вектору с координатами

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

Поэтому линейная зависимость векторов $\vec{a_1}, \dots, \vec{a_n}$ равносильна тому, что система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

имеет решение $x_1, \dots, x_n$ такое, что не все числа $x_1, \dots, x_n$ равны 0. Задача о том, возможно ли представить вектор $\vec{b}$ в виде линейной комбинации векторов $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ аналогичным образом сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Теорема 3.1.12. *Если $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, ..., $\vec{e}_n$ — линейно независимая система векторов линейного пространства V, и каждый вектор $\vec{x} \in V$ линейно выражается через $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, ..., $\vec{e}_n$, то эти вектора образуют базис в V.*

Доказательство. Вектора $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, ..., $\vec{e}_n$, по условию линейно независимы. Достаточно доказать, что в пространстве V нет больше чем n линейно независимых векторов. Возьмём произвольные $m > n$ векторов из V: $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_m$. По условию, каждый из них линейно выражается через $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, ..., $\vec{e}_n$:

$$\begin{aligned} &\vec{a}_1 = \alpha_{11}\vec{e}_1 + \alpha_{21}\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_{n1}\vec{e}_n, \\ &\vec{a}_2 = \alpha_{12}\vec{e}_1 + \alpha_{22}\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_{n2}\vec{e}_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\vec{a}_m = \alpha_{1m}\vec{e}_1 + \alpha_{2m}\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_{nm}\vec{e}_n. \end{aligned}$$

Если рассмотреть матрицу

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nm} \end{pmatrix}$$

Из того, что число строк равно n вытекает, что ранг матрицы не более чем n, а следовательно и не более чем n линейно независмых столбцов. Но, поскольку $m > n$, то вектора $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_m$ линейно зависимы. Следовательно пространство V n -мерно, и $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, ..., $\vec{e}_n$ — его базис. □

Теорема 3.1.13 (О дополнении системы векторов до базиса)**.** *Всякую линейно независимую систему k векторов n -мерного линейного пространства V $(1 \leqslant k < n)$ можно дополнить до базиса пространства.*

Доказательство. Пусть $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, ..., $\vec{e}_k$ — линейно независимая система векторов n -мерного линейного пространства V $(1 \leqslant k < n)$. Рассмотрим линейную оболочку этих векторов: $\mathcal{L}_k = \operatorname{Lin}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k)$.

Если бы все вектора $v \in V$ выражались линейно через вектора $\mathcal{L}_k$, то тогда $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, ..., $\vec{e}_k$ был бы базис в V, а следовательно $\dim V = k$, что противоречит условию. Следовательно существует вектор $\vec{e}_{k+1} \in V$, который не принадлежит $\mathcal{L}_k$. Дополняя этим вектором линейно независимую систему $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, ..., $\vec{e}_k$, получаем систему векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, ..., $\vec{e}_k$, $\vec{e}_{k+1}$, которая также линейно независимая. Действительно, если бы она оказалась линейно зависимой, то следовало бы, что $\vec{e}_{k+1} \in \mathcal{L}_k = \operatorname{Lin}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k)$, а это противоречит выбору вектора $\vec{e}_{k+1}$.

Итак, система векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, ..., $\vec{e}_k$, $\vec{e}_{k+1}$ линейно независимая. Значит, первоначальную систему векторов удалось дополнить одним вектором без нарушения линейной независимости. Продолжаем аналогично.

Процесс дополнения обязательно закончится, так как пространство V конечномерное. В результате получим соситему линейно независимых векторов $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k, \ldots, \vec{e}_n$, через которую уже будут линейно выражаться все остальные вектора из V. Из теоремы 3.1.12 вытекает, что $\vec{e}_1$, ..., $\vec{e}_k$, ..., $\vec{e}_n$ образуют базис.

В результате получим равенство $V = \mathcal{L}_n = \operatorname{Lin}(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k, \ldots, \vec{e}_n)$, из которого следует, что $\vec{e}_1$, ..., $\vec{e}_k$, ..., $\vec{e}_n$ — базис пространства V.

□

3.1.2 Переход к новому базису

Пусть вектор $\vec{x}$ имеет в базисе $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ координаты $\vec{x}_e = (x_1, \ldots, x_n)$, а в базисе $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$ — координаты $\vec{x}_f = (x'_1, \ldots, x'_n)$. Выясним, как связаны эти координаты. Для простоты записи считаем, что $n = 3$

$$\vec{x}_e = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3,$$
$$\vec{x}_f = x'_1\vec{f}_1 + x'_2\vec{f}_2 + x'_3\vec{f}_3.$$

Пусть

$$\vec{f}_1 = c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2 + c_{31}\vec{e}_3,$$
$$\vec{f}_2 = c_{12}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2 + c_{32}\vec{e}_3,$$
$$\vec{f}_3 = c_{13}\vec{e}_1 + c_{23}\vec{e}_2 + c_{33}\vec{e}_3.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\vec{x} = x'_1(c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2 + c_{31}\vec{e}_3) + x'_2(c_{12}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2 + c_{32}\vec{e}_3) + x'_3(c_{13}\vec{e}_1 + c_{23}\vec{e}_2 + c_{33}\vec{e}_3) = \\ (x'_1c_{11} + x'_2c_{12} + x'_3c_{13})\vec{e}_1 + (x'_1c_{21} + x'_2c_{22} + x'_3c_{23})\vec{e}_2 + (x'_1c_{31} + x'_2c_{32} + x'_3c_{33})\vec{e}_3.\end{aligned}$$

Сравнивая равенства для $\vec{x}$, получим

$$x_1 = c_{11}x'_1 + c_{12}x'_2 + c_{13}x'_3,$$
$$x_2 = c_{21}x'_1 + c_{22}x'_2 + c_{23}x'_3,$$
$$x_3 = c_{31}x'_1 + c_{32}x'_2 + c_{33}x'_3,$$

или

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C_{e\to f} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}.$$

Если $C_{e\to f}$ — невырожденная, то это равенство можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = C_{e\to f}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C_{f\to e} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Разумеется, в случае n-мерного пространства

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = C_{e\to f} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix} = C^{-1}_{e\to f} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = C_{f\to e} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

П р и м е р 3.1.3. В пространстве V_2 задан базис $e = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Доказать, что вектора $\vec{f}_1 = -5\vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{f}_2 = -\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$ также образуют базис в этом пространстве. Найдите координаты векторов $\vec{a} = -6\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$, $\vec{b} = 2\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2$ в базисе f.

Доказательство. Матрица перехода от базиса e к базису f имеет вид

$$C = C_{e\to f} = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, матрица перехода от базиса f к базису e имеет вид

$$C_{f\to e} = C^{-1}_{e\to f} = -\frac{1}{16} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Откуда

$$\vec{a}_f = C_{f\to e}\vec{a}_e = -\frac{1}{16} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{16} \begin{pmatrix} -16 \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$\vec{b}_f = C_{f\to e}\vec{b}_e = -\frac{1}{16} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{16} \begin{pmatrix} 0 \\ 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку (она не обязательна)

$$\vec{a} = 1 \cdot \vec{f}_1 + 1 \cdot \vec{f}_2 = (-5\vec{e}_1 - \vec{e}_2) + (-\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2) = -6\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2,$$
$$\vec{b} = 0 \cdot \vec{f}_1 - 2 \cdot \vec{f}_2 = -2 \cdot (-\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2) = 2\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2.$$

□

П р и м е р 3.1.4. Для вектора $\vec{x} = 6\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$ линейного пространства V_3, заданного в базисе $e = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, найдите вектор его координаты в базисе $f = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$, если

$$\vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad \vec{f}_2 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad \vec{f}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3.$$

Доказательство. Матрица перехода от базиса e к базису f имеет вид

$$C = C_{e\to f} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, матрица перехода от базиса f к базису e имеет вид

$$C_{f\to e} = C^{-1}_{e\to f} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Откуда

$$\vec{x}_f = C_{f\to e}\vec{x}_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку (она не обязательна)

$$\vec{x}_f = 4 \cdot \vec{f}_1 + 3 \cdot \vec{f}_2 - 4 \cdot \vec{f}_3 = 6\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3.$$

□

Контрольные вопросы.

1. Какова связь между координатами вектора $\vec{x}$ при переходе от базиса $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$,... $\vec{e}_d$ к базису $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$,... $\vec{f}_d$?

Упражнения к 3.1

Упражнение 3.1.1. *В пространстве V_2 задан базис $e = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Доказать, что вектора $\vec{f}_1 = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$, $\vec{f}_2 = 7\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2$ также образуют базис в этом пространстве. Найдите координаты векторов $\vec{a} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$, $\vec{b} = -5\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2$ в базисе f.*

Упражнение 3.1.2. *В пространстве V_2 задан базис $e = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Доказать, что вектора $\vec{f}_1 = -3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$, $\vec{f}_2 = 5\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$ также образуют базис в этом пространстве. Найдите координаты векторов $\vec{a} = 5\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$, $\vec{b} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$ в базисе f.*

Упражнение 3.1.3. *Для векторов $\vec{a} = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$, $\vec{b} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_3$ линейного пространства V_3, заданных в базисе $e = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, найдите координаты этих векторов в базисе $f = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$, если*

$$\vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad \vec{f}_2 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad \vec{f}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3.$$

Упражнение 3.1.4. *Для векторов $\vec{a} = 2\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$, $\vec{b} = -4\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$ линейного пространства V_3, заданных в базисе $e = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, найдите координаты этих векторов в базисе $f = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$, если*

$$\vec{f}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3, \quad \vec{f}_2 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2, \quad \vec{f}_3 = \vec{e}_1 - \vec{e}_3.$$

Упражнение 3.1.5. *Для вектора $\vec{a} = \vec{e}_1 + \vec{e}_3$ линейного пространства V_3, заданного в базисе $e = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, найдите координаты этого вектора в базисе $f = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$, если*

$$\vec{f}_1 = 4\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 5\vec{e}_3, \quad \vec{f}_2 = 19\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 24\vec{e}_3, \quad \vec{f}_3 = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3.$$

Упражнение 3.1.6. *Для векторов $\vec{a} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{b} = -\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$ линейного пространства V_3, заданных в базисе $e = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, найдите координаты этих векторов в базисе $f = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$, если*

$$\vec{f}_1 = 5\vec{e}_1 + 7\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \quad \vec{f}_2 = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad \vec{f}_3 = -2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3.$$

Упражнение 3.1.7. *Для векторов $\vec{a} = -2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$, $\vec{b} = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 9\vec{e}_3$ линейного пространства V_3, заданных в базисе $e = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, найдите координаты этих векторов в базисе $f = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$, если*

$$\vec{f}_1 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3, \quad \vec{f}_2 = 7\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 10\vec{e}_3, \quad \vec{f}_3 = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 8\vec{e}_3.$$

Ответы: 3.1.1 $\vec{a} = -16\vec{f}_1 + 7\vec{f}_2$, $\vec{b} = 3\vec{f}_1 - 2\vec{f}_2$. **3.1.2** $\vec{a} = -5\vec{f}_1 - 2\vec{f}_2$, $\vec{b} = -12\vec{f}_1 - 7\vec{f}_2$. **3.1.3** $\vec{a} = -2\vec{f}_1 - \vec{f}_2 + 7\vec{f}_3$, $\vec{b} = -\vec{f}_1 - \vec{f}_2 + 5\vec{f}_3$. **3.1.4** $\vec{a} = -9\vec{f}_1 + 3\vec{f}_2 + 5\vec{f}_3$, $\vec{b} = 3\vec{f}_1 + \vec{f}_2 - 5\vec{f}_3$. **3.1.5** $\vec{a} = 5\vec{f}_1 - \vec{f}_2$, здесь $|C| = 1$. **3.1.6** $\vec{a} = 2\vec{f}_1 - 3\vec{f}_2$, $\vec{b} = -36\vec{f}_1 + 61\vec{f}_2 + 2\vec{f}_3$, здесь $|C| = -1$. **3.1.7** $\vec{a} = -52\vec{f}_1 + 14\vec{f}_2 + 2\vec{f}_3$, $\vec{b} = -3\vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3$, здесь $|C| = 1$.

3.2 Подпространства

3.2.1 Линейное подпространство. Способы задания

Определение 3.2.1. *Подпространством* L векторного пространства V, размерности n, называется множество векторов из V, образующих линейное пространство по отношению к действиям, которые определены в V.

Другими словами, L называется подпространством пространства V, если

- из x, $y \in L$ следует, что $x + y \in L$;
- и если $x \in L$, то $\lambda x \in L$, где λ — любое вещественное число.

Простейшим примером подпространства является нулевое подпространство, т.е. подмножество пространства V, состоящее из единственного нулевого элемента. Подпространством может служить и все пространство V. Эти подпространства называются *тривиальными*.

Подпространство L пространства V, размерности $\dim V = n$, конечномерно и его размерность не превосходит n: $\dim L \leqslant \dim V$.

П р и м е р 3.2.1. В пространстве $\mathbb{R}^3$ каждая плоскость (например, см. рис. 3.1 и плоскости L_1, L_2) и каждая прямая (например, см. рис. 3.1 и прямые L_3, L_4, L_5), проходящие через начало координат, определяют линейное подпространство.

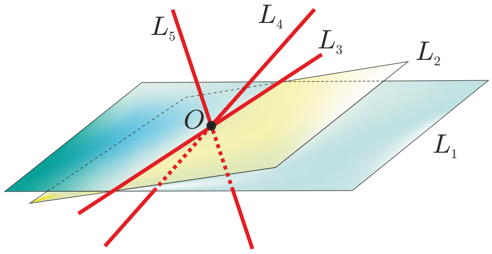


Рис. 3.1: Линейные подпространства

Способы задания линейных подпространств

Сначала дадим определение линейной оболочки векторов.

Определение 3.2.2. Линейной оболочкой $\mathcal{L}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ векторов $\vec{x}_1$, …, $\vec{x}_n$ принадлежащих линейному пространству V, называется совокупность всех линейных комбинаций этих векторов:

$$\vec{a} = \lambda_1\vec{x}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{x}_n,$$

где λ_1, …, $\lambda_n \in \mathbb{R}$. Таким образом

$$\mathcal{L}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) = \left\{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\vec{x}_k \mid \vec{x}_k \in V,\ \lambda_k \in \mathbb{R},\ k = 1, 2, \ldots, n\right\}.$$

Перечислим основные свойства линейной оболочки:

- Линейная оболочка содержит само множество векторов $\vec{x}_1$, …, $\vec{x}_n$.
- Линейная оболочка — линейное подпространство пространства V.

Каждое векторное пространство V есть линейная оболочка векторов своего базиса. Поэтому часто в целях экономии места, разыскивая базис подпространства, ограничиваются перечислением векторов базиса, не записывая конечным результатом их произвольную линейную комбинацию.

Линейное векторное подпространство задается двумя возможными способами: набором векторов или системами линейных уравнений.

1-й способ. Набор линейно независимых векторов (базис подпространства) задаётся при помощи линейной оболочки системы векторов. Например, плоскость $z = 0$ в $\mathbb{R}^3$ можно задать в виде линейной оболочки

$$\mathcal{L}(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \left\{\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 \mid \vec{e}_1 = (1, 0, 0),\ \vec{e}_1 = (0, 1, 0),\ \lambda_k \in \mathbb{R},\ k = 1, 2\right\}.$$

2-й способ. Другой способ задания подпространства — в виде однородной системы линейных уравнений Рассмотрим однородную систему m линейных уравнений с n переменными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

имеющую ненулевые решения. Пусть ранг системы равен r. Будем считать, что ранг достигается на миноре, расположенном в верхнем левом угле матрицы, т.е. $(a_{i,j})_{i,j=1}^{r}$. Тогда система обладает фундаментальным набором решений

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \vec{e}_{n-r} = \begin{pmatrix} x_{1,\,n-r} \\ x_{2,\,n-r} \\ \vdots \\ x_{r,\,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

которые линейно независимы. Эти независимые решения, являющиеся совокупностями из n чисел, можно представить как n-мерные линейно независимые векторы. Любое решение системы представляется в виде линейной комбинации фундаментального набора решений. Если взять векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e_2}$, $\ldots$, $\vec{e_{n-r}}$ в качестве базиса некоторого линейного векторного подпространства, то все множество решений однородной системы и будет этим векторным подпространством, называемым пространством решений однородной системы. Размерность подпространства равна числу независимых векторов, т.е. $n-r$.

Следовательно, векторное подпространство может быть определено как набором векторов, составляющих базис векторного подпространства, так и посредством задания однородной системы линейных уравнений, фундаментальный набор решений которой есть базис линейного векторного подпространства. Покажем на примерах как осуществить переход от задания подпространства в виде набора векторов к заданию подпространства в виде однородной системы уравнений и обратно.

П р и м е р 3.2.2. Множество $L \subset \mathbb{R}^4$ задано однородной системой линейных уравнений

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ -x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Доказать, что L — подпространство. Найти набор линейно независимых векторов, задающий линейное подпространство L, т.е. базис в L.

Доказательство. Составим матрицу, соответствующую данной системе

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 + \vec{a}_1 \\ \vec{a}_3 \end{vmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} -\vec{a}_1 \\ -\vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 - \vec{a}_2 \end{vmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, ранг исходной системы равен 2. Поэтому могут быть найдены две переменные, например x_1, x_2, которые назовём базисными. Свободными переменными станут x_3, x_4.

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + 2x_4, \\ x_2 = -2x_3 + 2x_4. \end{cases}$$

Запишем решение в развернутой матричной форме

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где x_3, x_4 произвольные действительные значения. Любой вектор $\vec{x}$, координаты которого являются переменными в однородной системе линейных уравнений, представлен как линейная комбинация двух линейно независимых векторов, составляющих ФНР (фундаментальный набор решений) однородной системы. Следовательно, все множество векторов $\vec{x}$ составляет линейное векторное подпространство с базисом $\vec{e}_1 = (1,\ -2,\ 1,\ 0)^T$ и $\vec{e}_2 = (2,\ 2,\ 0,\ 1)^T$. Таким образом мы доказали, что справедливо следующие равенство

$$L = \mathcal{L}(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_2) = \Big\{\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 \mid \vec{e}_k \in L,\ \lambda_k \in \mathbb{R},\ k = 1, 2\Big\},$$

где $\vec{e}_1 = (-1,\ -2,\ 1,\ 0)^T$, $\vec{e}_2 = (-2,\ 2,\ 0,\ 1)^T$. □

П р и м е р 3.2.3. Линейное подпространство L задано набором линейно независимых векторов $\vec{e}_1 = (1,\ 2,\ 1,\ 0)^T$, $\vec{e}_2 = (-2,\ 2,\ 0,\ 1)^T$, т.е. в виде

$$L = \mathcal{L}(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \Big\{\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 \mid \vec{e}_k \in L,\ \lambda_k \in \mathbb{R},\ k = 1, 2\Big\},$$

Найти однородную систему линейных уравнений, задающую подпространство L.

Доказательство. Рассмотрим два способа

1-й способ. Запишем разложение произвольного вектора $\vec{x}$ по базисным векторам $\vec{e}_1 = (1,\ 2,\ 1,\ 0)^T$, $\vec{e}_2 = (-2,\ 2,\ 0,\ 1)^T$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда система принимает вид:

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - 2x_4, \\ x_2 = 2x_3 + 2x_4, \\ x_3 = x_3, \\ x_4 = x_4. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

2-й способ. Данный способ основан на использовании теоремы Кронекера—Капелли. Составим расширенную матрицу из коэффициентов и свободных членов и преобразуем ее, применяя метод Гаусса

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & x_1 \\ 2 & 2 & x_2 \\ 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 1 & x_4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & x_1 - x_3 + 2x_4 \\ 0 & 0 & x_2 - 2x_3 - 2x_4 \\ 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 1 & x_4 \end{array}\right).$$

Система должна иметь решения, поскольку вектор $\vec{x}$ принадлежит подпространству L. Ранги матрицы коэффициентов и расширенной матрицы системы по теореме Кронекера-Капелли должны быть равны. Это выполняется при соблюдении условий:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Полученная система однородных линейных уравнений задает требуемое линейное подпространство.

□

3.2.2 Пересечение и сумма подпространств

Определение 3.2.3. Пусть L и M — два подпространства пространства V.

- *Суммой* подпространств $L+M$ называется множество векторов $x+y$, где $x \in L$ и $y \in M$. Очевидно, что любая линейная комбинация векторов из $L+M$ принадлежит $L+M$, следовательно $L+M$ является подпространством пространства V (может совпадать с пространством V).
- *Пересечением* $L \cap M$ подпространств L и M называется множество векторов, принадлежащих одновременно подпространствам L и M (может состоять только из нулевого вектора).

Теорема 3.2.14 (формула Гроссмана). *Сумма размерностей произвольных подпространств L и M конечномерного линейного пространства V равна размерности суммы этих подпространств и размерности пересечения этих подпространств:*

$$\dim L + \dim M = \dim(L+M) + \dim(L \cap M).$$

Доказательство. Пусть L и M — произвольные векторные подпространства векторного пространства V, $L \cap M$ — их пересечение, $L+M$ — их сумма. Обозначим:

$$\dim(L \cap M) = r, \quad \dim L = s, \quad \dim M = t, \quad \dim(L+M) = m.$$

Так как очевидны включения: $L \cap M \subseteq L \subseteq L+M$, $L \cap M \subseteq M \subseteq L+M$, то $r \leqslant s \leqslant m$ и $r \leqslant t \leqslant m$.

Нашей задачей является доказательство равенства: $m = s + t - r$.

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_r$ — базис пересечения $L \cap M$.

- Так как $(L \cap M) \subseteq L$, то его базис можно дополнить до базиса пространства L. Пусть e_1, e_2, $\ldots$, e_r, f_1, $\ldots$, f_{s-r} — базис L.
- Аналогично из $(L \cap M) \subseteq M$, то его базис подпространства $L \cap M$ можно дополнить до базиса пространства M. Пусть e_1, e_2, $\ldots$, e_r, g_1, $\ldots$, g_{t-r} — базис M.

Докажем, что вектора

$$\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \ldots,\ \vec{e}_r,\ \vec{f}_1,\ \ldots,\ \vec{f}_{s-r},\ \vec{g}_1,\ \ldots,\ \vec{g}_{t-r} \tag{3.2.2}$$

образуют базис в $L + M$, откуда и будет следовать равенство $m = s + t - r$, т.е. теорема будет доказана.

вектора (3.2.2) **порождающие подпространство** $L + M$ Действительно, пусть $x + y$ — произвольный вектор подпространства $L + M$. Разложим векторы x и y по базисам векторных подпространств L и M:

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_r\vec{e}_r + x'_1\vec{f}_1 + \cdots + x'_{s-r}\vec{f}_{s-r},$$
$$\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + \cdots + y_r\vec{e}_r + y'_1\vec{g}_1 + \cdots + y'_{t-r}\vec{g}_{t-r}.$$

Откуда

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1)\vec{e}_1 + \cdots + (x_r + y_r)\vec{e}_r + x'_1\vec{f}_1 + \cdots + x'_{s-r}\vec{f}_{s-r} + y'_1\vec{g}_1 + \cdots + y'_{t-r}\vec{g}_{t-r}.$$

Таким образом любой вектор из $L+M$ представим через вектора системы (3.2.2). Т.е. система векторов (3.2.2) порождает векторное подпространство $L + M$.

линейная независимость векторов (3.2.2) Теперь докажем, что система (3.2.2) является линейно независимой. Пусть

$$\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \cdots + \alpha_r\vec{e}_r + \beta_1\vec{f}_1 + \cdots + \beta_{s-r}\vec{f}_{s-r} + \gamma_1\vec{g}_1 + \cdots + \gamma_{t-r}\vec{g}_{t-r} = \vec{0}. \tag{3.2.3}$$

Определим вектор

$$\vec{h} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \cdots + \alpha_r\vec{e}_r + \beta_1\vec{f}_1 + \cdots + \beta_{s-r}\vec{f}_{s-r}.$$

Тогда $\vec{h} \in L$ и $\vec{h} = -(\gamma_1\vec{g}_1 + \cdots + \gamma_{t-r}\vec{g}_{t-r}) \in M$. Следовательно вектор $\vec{h} \in L \cap M$ можно разложить по базису пересечения:

$$\vec{h} = \delta_1\vec{e}_1 + \delta_2\vec{e}_2 + \cdots + \delta_r\vec{e}_r.$$

Отсюда, ввиду единственности разложения вектора $\vec{h}$ по базису подпространства L:

$$\alpha_k = \delta_k, \quad k = 1, \ldots, r, \qquad \beta_1 = \cdots = \beta_{s-r} = 0.$$

Последнии равенства влекут за собой

$$\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \cdots + \alpha_r\vec{e}_r + \gamma_1\vec{g}_1 + \cdots + \gamma_{t-r}\vec{g}_{t-r} = \vec{0},$$

но ввиду линейной независимости векторов $\vec{e}_1$, $\ldots$, $\vec{e}_r$, $\vec{g}_1$, $\ldots$, $\vec{g}_{t-r}$ (как базиса подпространства M), получаем равенства

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = \gamma_1 = \cdots = \gamma_{t-r} = 0.$$

Следовательно равенство (3.2.3) влечёт за собой равенство нулю всех констант и, следовательно, является линейно независимой.

□

П р и м е р 3.2.4. Линейные подпространства L и M заданы в виде систем линейных однородных уравнений:

$$L: \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + \quad x_4 = 0, \\ x_1 - \quad x_3 + x_4 = 0, \\ \quad x_2 + x_3 \quad\ = 0 \end{array} \right. ; M: \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - \quad x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right. .$$

Найдите размерность и базис подпространств L, M, $L + M$, $L \cap M$.

Доказательство. Составим расширенную матрицу, где до черты будем располагать коэффициенты системы, задающей подпространство L, а после черты будем располагать коэффициенты системы, задающей подпространство M. Элементарные действия будем выполнять только над строками, причём элементарные действия только тех строк, что находятся только над чертой и отдельно со строками, которые находятся после черты:

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right)\left|\begin{array}{l} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 - \vec{a}_1 \\ \vec{a}_3 \\ \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 - 2\vec{b}_1 \\ \vec{b}_3 - \vec{b}_1 \end{array}\right. \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Откуда мы можем сделать вывод о том, что $\dim L = \dim M = 2$. Теперь для того, чтобы выписать базис в пространствах L и M вернёмся к преобразованным системам.

размерность и базис в L. Сначала найдём базис подпространства L

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -x_2 - x_4, \\ x_2 = -x_3. \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = x_3 - x_4, \\ x_2 = -x_3. \end{cases}$$

Таким образом выбирая по очереди независимые переменные x_3 и x_4 равные значениям 1 и 0, получаем базис в подпространстве L.

	x_1	x_2	x_3	x_4
$\vec{e}_1$	1	-1	**1**	**0**
$\vec{e}_2$	-1	0	**0**	**1**

размерность и базис в M. Теперь найдём базис подпространства M

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 2x_3 + x_4, \\ x_2 = -x_3. \end{cases}$$

Базис в подпространстве M

	x_1	x_2	x_3	x_4
$\vec{f}_1$	2	-1	**1**	**0**
$\vec{f}_2$	1	0	**0**	**1**

размерность и базис в $L \cap M$. Разберёмся с пересечением подпространств. Если вектор $\vec{x}$ принадлежит подпространствам L и M, то он принадлежит их пересечению, т.е. удовлетворяем системе задающей как подпространство L, так и подпространство M:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\left|\begin{array}{l} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vec{b}_1 - \vec{a}_1 \\ \vec{b}_2 - \vec{a}_2 \end{array}\right. \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\left|\begin{array}{l} \vec{a}_1 - \vec{b}_1 \\ \vec{b}_1 \\ \vec{a}_2 - \vec{b}_1 \end{array}\right. \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Откуда, находим, что в пересечение подпространств будет одномерно и подпространство задаётся в виде линейной оболочки $L \cap M = \mathcal{L}(\vec{c})$, где $\vec{c} = (1, -2, 2, 1)^T$.

размерность и базис в $L + M$. Из формулы Грассмана мы знаем, что $\dim(L + M) = \dim L + \dim M - \dim(L \cap M) = 3$. Легко заметить, что, действительно, вектора $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$ линейно зависимы, а, например, вектора $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{f}_1$ — линейно независимы. Следовательно вектора $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{f}_1$ образуют базис в объединении $L + M$.

Ответ: размерности $\dim L = \dim M = 2$, $\dim(L \cap M) = 1$, $\dim(L + M) = 3$. Базис в L образуют вектора $\vec{e}_1 = (1, -1, 1, 0)^T$, $\vec{e}_2 = (-1, 0, 0, 1)^T$; базис в M образуют вектора $\vec{f}_1 = (2, -1, 1, 0)^T$, $\vec{f}_2 = (1, 0, 0, 1)^T$; базис в $L \cap M$ образует вектор $\vec{c} = (1, -2, 2, 1)^T$; базис в $L + M$ образуют вектора $\vec{e}_1 = (2, -1, 1, 0)^T$, $\vec{e}_2 = (1, 0, 0, 1)^T$, $\vec{f}_1 = (2, -1, 1, 0)^T$. □

П р и м е р 3.2.5. Линейные подпространства L и M заданы своими базисами:

$$L = \mathcal{L}((1, 0, 1), (1, 1, 1)), \qquad M = \mathcal{L}((1, -1, -1), (0, 0, 1)).$$

Найдите размерность и базис подпространств $L+M$, $L \cap M$. Убедитесь в справедливости формулы Гроссмана для этого примера.

Доказательство. Составим расширенную матрицу, где до черты будем располагать коэффициенты системы, задающей подпространство L, а после черты будем располагать коэффициенты системы, задающей подпространство M.

размерность и базис в $L + M$. Проведём элементарные преобразования не меняющие строки местами:

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left| \begin{array}{l} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 - \vec{a}_1 \\ \vec{b}_1 - \vec{a}_1 \\ \vec{b}_2 \end{array} \right. \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left| \begin{array}{l} \vec{a}_1 - \vec{b}_2 \\ \vec{a}_2 \\ \vec{b}_1 + \vec{a}_2 + 2\vec{b}_2 \\ \vec{b}_2 \end{array} \right. \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Откуда мы можем сделать вывод о том, что ранг системы равен 3 и базисными векторами в подпространстве $L + M$ будут, например, $\vec{e}_1 = (1, 0, 1)^T$, $\vec{e}_2 = (1, 1, 1)^T$, $\vec{f}_1 = (0, 0, 1)^T$.

размерность и базис в $L \cap M$. Разберёмся с пересечением подпространств. Если вектор $\vec{x}$ принадлежит подпространствам L и M, то он принадлежит их пересечению, т.е. его можно разложить по базисам этих подпространств:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решим систему методом Гаусса

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} \vec{a}_1 - \vec{a}_2 \\ \vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 - \vec{a}_1 \end{array} \right. \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} \vec{a}_1 + \vec{a}_3 \\ \vec{a}_2 - \frac{1}{2}\vec{a}_3 \\ \vec{a}_3/2 \end{array} \right. \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Решением системы будет: $\alpha_1 = \beta_2$, $\alpha_2 = -\frac{1}{2}\beta_2$, $\beta_1 = \frac{1}{2}\beta_2$. Откуда, находим, пересечение подпространств

$$\beta_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\beta_2\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\beta_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом пересечение подпространств — одномерно и подпространство задаётся в виде линейной оболочки $L \cap M = \mathcal{L}(\vec{c})$, где $\vec{c} = (1, -1, 1)^T$.

Итого убеждаемся, что выполнена формула Гроссмана

$$\begin{aligned} &\dim L + \dim M = \dim(L + M) + \dim(L \cap M) \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow 2 + 2 = 3 + 1. \end{aligned}$$

Ответ: размерности $\dim L = \dim M = 2$, $\dim(L \cap M) = 1$, $\dim(L + M) = 3$. Базис в L образуют вектора $\vec{e}_1 = (1, 0, 1)^T$, $\vec{e}_2 = (1, 1, 1)^T$; базис в M образуют вектора $\vec{f}_1 = (0, 0, 1)^T$, $\vec{f}_2 = (1, -1, -1)^T$; базис в $L \cap M$ образует вектор $\vec{c} = (1, -1, 1)^T$; базис в $L + M$ образуют вектора $\vec{e}_1 = (1, 0, 1)^T$, $\vec{e}_2 = (1, 1, 1)^T$, $\vec{f}_1 = (0, 0, 1)^T$. □

Контрольные вопросы.

1. Какова размерность линейного подпространства, заданного при помощи однородной системы, если ранг матрицы равен k, а размерность пространства n, $k < n$?

Упражнения к 3.2

Упражнение 3.2.1. *Докажите, что следующие совокупности векторов пространства F^n, где F — произвольное поле, образуют подпространства, найдите их базисы и размерности:*

(a) *векторы, у которых совпадают первая и последняя координаты;*

(b) *векторы, у которых координаты с четными номерами равны 0;*

(c) *векторы, у которых координаты с четными номерами равны между собой;*

(d) *векторы, координаты которых удовлетворяют уравнению $x_1 + 2x_2 + ... + nx_n = 0$;*

(e) *векторы, координаты которых удовлетворяют однородной системе линейных уравнений.*

Упражнение 3.2.2. *Выясните, какие из следующих совокупностей матриц порядка n над полем $\mathbb{R}$ образуют подпространство пространства матриц $M_n(\mathbb{R})$, если они образуют подпространство, то найдите их базисы и размерности:*

(a) *симметрические матрицы ($A = A^T$);*

(b) *кососимметрические матрицы ($A = -A^T$);*

(c) *обратимые матрицы;*

(d) *вырожденные матрицы;*

(e) *матрицы с нулевым следом (сумма всех диагональных элементов матрицы равняется нулю).*

Упражнение 3.2.3. *Задать линейное подпространство L при помощи системы линейных однородных уравнений*

(a) $L = \mathcal{L}((1,3,1,2)^T, (0,1,-1,1)^T)$; (b) $L = \mathcal{L}((2,0,5,3)^T, (0,1,1,0)^T)$;

(c) $L = \mathcal{L}((8,-11,2,-21)^T)$; (d) $L = \mathcal{L}((7,4,3,2)^T)$;

(e) $\mathcal{L}((1,1,1,0)^T, (-1,1,0,-1)^T, (0,1,1,2)^T)$; (f) $L = \mathcal{L}((1,0,-1,-1)^T, (1,-1,0,1)^T, (1,2,1,2)^T)$.

Упражнение 3.2.4. *Найдите размерности суммы и пересечения линейных оболочек следующих систем векторов пространства $\mathbb{R}^4$:*

$$L = \mathcal{L}((3,3,3,3)^T, (3,-3,3,-3)^T, (3,9,3,9)^T), \qquad M = \mathcal{L}((3,4,0,4)^T, (6,12,6,12)^T, (9,3,9,3)^T).$$

Упражнение 3.2.5. *Линейные подпространства L и M заданы своими линейными оболочками: $L = \mathcal{L}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_s)$, $M = \mathcal{L}(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_t)$. Найдите размерность и базис подпространств L, M, $L+M$, $L \cap M$. Убедитесь в справедливости формулы Гроссмана, если*

(a) $L:$ $\vec{e}_1 = (2,-3,1)^T, \vec{e}_2 = (1,-1,1)^T$, $M:$ $\vec{f}_1 = (0,0,-2)^T, \vec{f}_2 = (-3,1,-1)^T$;

(b) $L:$ $\vec{e}_1 = (3,-1,2)^T, \vec{e}_2 = (4,-1,3)^T, \vec{e}_3 = (-1,0,-1)^T$, $M:$ $\vec{f}_1 = (2,3,6)^T, \vec{f}_2 = (2,1,-1)^T$;

(c) $L:$ $\vec{e}_1 = (2,3,1)^T, \vec{e}_2 = (1,1,0)^T$, $M:$ $\vec{f}_1 = (0,3,2)^T, \vec{f}_2 = (-2,1,5)^T$, $\vec{f}_3 = (-4,5,12)^T$;

(d) $L:$ $\vec{e}_1 = (-1,1,1)^T, \vec{e}_2 = (-5,4,3)^T$, $M:$ $\vec{f}_1 = (2,-1,1)^T, \vec{f}_2 = (-3,2,-1)^T$, $\vec{f}_3 = (-4,3,-1)^T$;

(e) $L:$ $\vec{e}_1 = (2,5,3)^T, \vec{e}_2 = (1,3,2)^T, \vec{e}_3 = (-1,-4,-3)^T$, $M:$ $\vec{f}_1 = (-3,-2,2)^T, \vec{f}_2 = (-2,-1,1)^T$;

(f) $L:$ $\vec{e}_1 = (1,2,2,3)^T, \vec{e}_2 = (2,3,2,4)^T, \vec{e}_3 = (1,1,1,2)^T$, $M:$ $\vec{f}_1 = (-2,-3,-4,-7)^T, \vec{f}_2 = (1,0,-1,1)^T$, $\vec{f}_3 = (0,-3,-6,-5)^T$;

(g) $L:$ $\vec{e}_1 = (5,3,2,-3)^T, \vec{e}_2 = (2,1,1,-1)^T, \vec{e}_3 = (4,7,4,-3)^T$, $M:$ $\vec{f}_1 = (1,2,1,-1)^T, \vec{f}_2 = (0,1,-2,-2)^T$, $\vec{f}_3 = (1,3,-1,-3)^T$.

Упражнение 3.2.6. *Линейные подпространства L и M заданы, либо своими линейными оболочками (тогда будем указывать вектора $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_s$ соответствующей оболочки $\mathcal{L}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_s)$), либо системой линейных однородных уравнений. Найдите размерность и базис подпространств L, M, $L+M$, $L \cap M$. Убедитесь в справедливости формулы*

Гроссмана, если

$$
\begin{array}{llll}
(a) & L: \quad \vec{e}_1 = (5,3,2)^T, \vec{e}_2 = (3,2,1)^T, & & M: \quad 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0; \\
(b) & L: \quad \vec{e}_1 = (5,3,2)^T, \vec{e}_2 = (7,4,3)^T, \vec{e}_3 = (2,1,1)^T, & & M: \quad x_2 + x_3 = 0; \\
(c) & L: \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 14x_3 = 0, \\ -3x_2 + 2x_4 = 0, \end{cases} & & M: \quad \begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 6x_1 - x_3 - 2x_4 = 0; \end{cases} \\
(d) & L: \quad 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, & & M: \quad \begin{cases} x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 8x_2 + x_3 - x_4 = 0; \end{cases} \\
(e) & L: \quad 5x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, & & M: \quad \begin{cases} -2x_2 + 16x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 - 8x_3 = 0, \\ -x_2 + 8x_3 - 3x_4 = 0; \end{cases} \\
(f) & L: \quad \begin{cases} -x_1 - x_2 + 6x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0, \end{cases} & & M: \quad \begin{cases} x_1 = 0, \\ 2x_3 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}
\end{array}
$$

Ответы: 3.2.1 (a) $\dim = n-1$; (b) $\dim = [(n+1)/2]$; (c) $\dim = [(n+1)/2]+1$; (d) $\dim = n-1$; (e) Пусть однородная система заданна при помощи матрицы A, тогда $\dim = n - \operatorname{rang} A$. **3.2.2** (a) $\dim = n(n+1)/2$; (b) $\dim = n(n-1)/2$; (c) не является подпространством; (d) не является подпространством; (e) $\dim = n^2 - 1$. **3.2.3** (a) $\begin{cases} -4x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ -3x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$; (c) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$; (d) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$; (e) $2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 0$; (f) $-3x_1 + x_2 - 7x_3 + 4x_4 = 0$. **3.2.4** $L \cap M = L$, $\dim L \cap M = 2$; $L \cup M = M$, $\dim L \cup M = 3$. **3.2.5** **(a)** $\dim L = \dim M = 2$, $\dim(L+M) = 3$, $\dim(L \cap M) = 1$; базис в L образуют вектора $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$; базис в M образуют вектора $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$; базис в $L+M$ образуют вектора $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{f}_1$; базис в $L \cap M$ образует вектор $\vec{c} = (-3, 1, -5)^T$. **(b)** $\dim L = \dim M = 2$, $\dim(L+M) = 3$, $\dim(L \cap M) = 1$; базис в L образуют вектора $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$; базис в M образуют вектора $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$; базис в $L+M$ образуют вектора $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{f}_1$; базис в $L \cap M$ образует вектор $\vec{c} = (10, 13, 11)^T$. **(c)** $\dim L = \dim M = 2$, $\dim(L+M) = 3$, $\dim(L \cap M) = 1$; базис в L образуют вектора $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$; базис в M образуют вектора $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$; базис в $L+M$ образуют вектора $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{f}_1$; базис в $L \cap M$ образует вектор $\vec{c} = (-2, 7, 9)^T$. **(d)** $\dim L = \dim M = 2$, $\dim(L+M) = 3$, $\dim(L \cap M) = 1$; базис в L образуют вектора $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$; базис в M образуют вектора $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$; базис в $L+M$ образуют вектора $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{f}_1$; базис в $L \cap M$ образует вектор $\vec{c} = (1, 0, 1)^T$. **(e)** $\dim L = \dim M = 2$, $\dim(L+M) = 3$, $\dim(L \cap M) = 1$; базис в L образуют вектора $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$; базис в M образуют вектора $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$; базис в $L+M$ образуют вектора $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{f}_1$; базис в $L \cap M$ образует вектор $\vec{c} = (-2, -1, 1)^T$. **(f)** $\dim L = 3$, $\dim M = 2$, $\dim(L+M) = 4$, $\dim(L \cap M) = 1$; базис в L образуют вектора $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$; базис в M образуют вектора $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$; базис в $L+M$ образуют вектора $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, $\vec{f}_1$; базис в $L \cap M$ образует вектор $\vec{c} = (-1, -3, -5, -6)^T$. **(g)** $\dim L = 3$, $\dim M = 2$, $\dim(L+M) = 4$, $\dim(L \cap M) = 1$; базис в L образуют вектора $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$; базис в M образуют вектора $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$; базис в $L+M$ образуют вектора $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, $\vec{f}_1$; базис в $L \cap M$ образует вектор $\vec{c} = (-3, -5, -5, 1)^T$. **3.2.6** **(a)** $\dim L = \dim M = 2$, $\dim(L+M) = 3$, $\dim(L \cap M) = 1$; базис в L образуют вектора $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$; базис в M образуют вектора $\vec{f}_1 = (-1, 2, -2)^T$, $\vec{f}_2 = (1, -1, 0)^T$; базис в $L+M$ образуют вектора $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{f}_1$; базис в $L \cap M$ образует вектор $\vec{c} = (-1, 3, -4)^T$; **(b)** $\dim L = \dim M = 2$, $\dim(L+M) = 3$, $\dim(L \cap M) = 1$; базис в L образуют вектора $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$; базис в M образуют вектора $\vec{f}_1 = (1, 0, 0)^T$, $\vec{f}_2 = (0, -1, 1)^T$; базис в $L+M$ образуют вектора $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{f}_1$; базис в $L \cap M$ образует вектор $\vec{c} = (0, 3, -3)^T$; **(c)** $\dim L = \dim M = 2$, $\dim(L+M) = 3$, $\dim(L \cap M) = 1$; базис в L образуют вектора $\vec{e}_1 = (1, 2, 0, 3)^T$, $\vec{e}_2 = (7, 0, 1, 0)^T$; базис в M образуют вектора $\vec{f}_1 = (1, 2, 0, 3)^T$, $\vec{f}_2 = (0, 6, -2, 1)^T$; базис в $L+M$ образуют вектора $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{f}_1$; базис в $L \cap M$ образует вектор $\vec{c} = (1, 2, 0, 3)^T$; **(d)** $\dim L = 3$, $\dim M = 2$, $\dim(L+M) = 4$, $\dim(L \cap M) = 1$; базис в L образуют вектора $\vec{e}_1 = (1, -1, 1, 0)^T$, $\vec{e}_2 = (0, 0, 1, 1)^T$, $\vec{e}_3 = (2, -3, 0, 0)^T$; базис в M образуют вектора $\vec{f}_1 = (7, -2, 2, 0)^T$, $\vec{f}_2 = (0, 0, 1, 1)^T$; базис в $L+M$ образуют вектора $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, $\vec{f}_1$; базис в $L \cap M$ образует вектор $\vec{c} = (0, 0, 1, 1)^T$. **(e)** $\dim L = 3$, $\dim M = 2$, $\dim(L+M) = 4$, $\dim(L \cap M) = 1$; базис в L образуют вектора $\vec{e}_1 = (0, 0, 1, 3)^T$, $\vec{e}_2 = (1, 8, 1, 0)^T$, $\vec{e}_3 = (1, 5, 0, 0)^T$; базис в M образуют вектора $\vec{f}_1 = (1, 0, 0, 0)^T$, $\vec{f}_2 = (0, 8, 1, 0)^T$; базис в $L+M$ образуют вектора $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, $\vec{f}_1$; базис в $L \cap M$ образует вектор $\vec{c} = (1, 8, 1, 0)^T$. **(f)** $\dim L = 3$, $\dim M = 3$, $\dim(L+M) = 4$, $\dim(L \cap M) = 2$; базис в L образуют вектора $\vec{e}_1 = (-1, 7, 1, 0, 0)^T$, $\vec{e}_2 = (1, 1, 0, 2, 0)^T$, $\vec{e}_3 = (-1, 5, 0, 0, 2)^T$; базис в M образуют вектора $\vec{f}_1 = (0, 1, 0, 0, 0)^T$, $\vec{f}_2 = (0, 0, 1, 2, 0)^T$, $\vec{f}_3 = (0, 0, 0, 1, 1)^T$; базис в $L+M$ образуют вектора $\vec{e}_1$, $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$; базис в $L \cap M$ образуют вектора $\vec{c}_1 = (0, 0, 3, -2, -8)^T$, $\vec{c}_2 = (0, 2, 1, 0, -2)^T$.

3.3 Линейное многообразие

3.3.1 Определения и способы задания многообразий

Определение 3.3.1. Пусть L — подпространство линейного пространства V, а $\vec{c} \in V$ — некоторый вектор. Множество векторов $\vec{v} \in V$, представимых в виде $\vec{v} = \vec{c} + \vec{l}$, где $\vec{l} \in L$, называется ***линейным многообразием*** H и обозначается

$$H = \vec{c} + L = \vec{c} + \vec{l}: \ \vec{l} \in L.$$

Вектор $\vec{c}$ называется ***вектором сдвига***, подпространство L — ***направляющим подпространством*** линейного многообразия H.

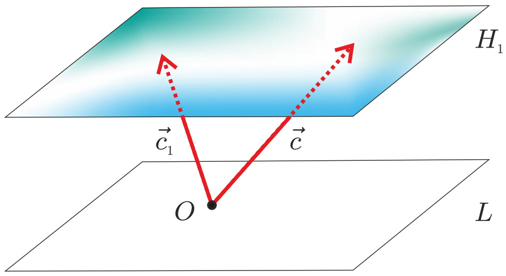


Рис. 3.2:

Определение 3.3.2. *Размерностью* линейного многообразия называют размерность его однородной части, т.е. $\dim H = \dim L$. В n-мерном линейном пространстве $(n-1)$-мерное линейное многообразие называется *гиперплоскостью.* Сразу отметим, что размерность многообразия равна максимальному числу линейно независимых векторов не самого многообразия, а его однородной части.

Замечание 12. Линейное многообразие $H = \vec{c} + L$ обращается в линейное подпространство, когда вектор сдвига $\vec{c} \in L$.

П р и м е р 3.3.1. Множество решений $A\vec{x} = \vec{b}$ системы является линейным многообразием.

Доказательство. Напомним, что общее решение системы линейных уравнений $A\vec{x} = \vec{b}$ складывается из общего решения однородной системы $A\vec{x} = \vec{0}$ и базисного (частного) решения неоднородной системы $A\vec{x} = \vec{b}$. Общее решение однородной системы есть линейная комбинация фундаментального набора (линейно независимых векторов) решений $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m$ (ФНР) дающего некоторое линейное подпространство L. Линейная оболочка векторов ФНР плюс базисное решение есть общее системы неоднородных линейных уравнений. Поэтому множество решений неоднородной системы линейных уравнений можно представить как линейное многообразие

$$H = \vec{c} + L = \vec{c} + \mathcal{L}\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m\}.$$

□

Поскольку все рассуждения в последнем следствие обратимы то, мы приходим к выводу, что любое линейное многообразие можно задать как множество решений $A\vec{x} = \vec{b}$.

Способы задания линейных многообразий

Линейное многообразие может быть задано с помощью векторов следующим образом:

- задается базис векторного подпространства L и вектор сдвига $\vec{c}$;
- посредством системы неоднородных линейных уравнений.

П р и м е р 3.3.2. Покажите, что

(a) Прямая $H: \ x + y - 1 = 0$ в R^2 является многообразием. Найдите линейное подпространство L и вектор сдвига $\vec{c}$ такие, что $H = \vec{c} + L$.

(b) Плоскость $H: \ x+y+z-1=0$ в R^3 является многообразием. Найдите линейное подпространство L и вектор сдвига $\vec{c}$ такие, что $H=\vec{c}+L$.

Доказательство. **(a)** Поскольку из уравнения прямой легко найти, что

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Представим прямую в виде:

$$H = \vec{c}(0,1)^T + \mathcal{L}\{\vec{a}(1,-1)^T\}.$$

(b) Найдём запись уравнения плоскости $H: \ -x+y+z-1=0$ в параметрическом виде.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1+x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом (см. рис. 3.3)

$$H = \vec{c}(0,0,1)^T + \mathcal{L}\{\vec{a}_1(-1,0,-1)^T, \vec{a}_2(0,1,-1)^T\}.$$

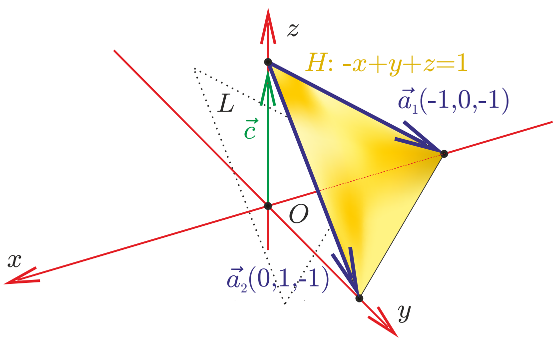


Рис. 3.3:

∎

Свойства линейных многообразий

1. *Вектор сдвига $\vec{c}$ принадлежит линейному многообразию $H=\vec{c}+L$.*

Доказательство. Линейное подпространство содержит нулевой вектор $\vec{0}\in L$. Поэтому в сумма векторов $\vec{c}+\vec{0}=\vec{c}\in H$. ∎

2. *Вектором сдвига, принадлежащим линейному многообразию, может быть любой вектор этого линейного многообразия, т.е. иными словами, если $\vec{c}_1\in H$, то $\vec{c}_1+L$ совпадает с $H=\vec{c}+L$.*

Доказательство. Возьмем произвольный вектор $\vec{c}_1 \in H$. Тогда существует вектор $\vec{l}$, такой, что $\vec{c}_1 = \vec{c}+\vec{l}$. Тогда

$$\vec{c}_1 + L = \vec{c} + \underbrace{\vec{l}+L}_{\in L} = H.$$

∎

3.3.2 Размерность линейных многообразий и их взаимное расположение

Определение 3.3.3. *Размерностью (рангом)* линейного многообразия $H = \vec{c} + L$ называется размерность линейного подпространства L, т.е. $\dim H = \dim L$.

- Линейное многообразие $H = \vec{c} + L$ у которого линейное подпространство L состоит только из нулевого вектора имеет размерность $\dim H = 0$, называется 0-мерным линейным многообразием (ранг равен нулю) и геометрически соответствует точке (конец вектора $\vec{c}$).
- Линейное многообразие $H = \vec{c} + L$ у которого линейное подпространство L состоит только из векторов, лежащих на одной прямой, имеет размерность $\dim H = 1$, называется одномерным линейным многообразием. Геометрическая интерпретация многообразия — прямая (концы всех векторов лежат на прямой).
- В n-мерном векторном пространстве линейное многообразие размерности $n-1$ называется *гиперплоскостью*, а размерности k, где $1 < k < n-1$, — k-мерной плоскостью.

Как прямым или плоскостям в $\mathbb{R}^3$ линейные многообразия могут пересекаться, скрещиваться, быть параллельными.

Определение 3.3.4. Определим сумму, пересечение и умножение на число линейных многообразий.

1. *Суммой* двух линейных многообразий $H_1 = \vec{c}_1 + L_1$, $H_2 = \vec{c}_2 + L_2$ назовём линейное многообразие, определяемое по следующему правилу:

$$H_1 + H_2 = (\vec{c}_1 + \vec{c}_2) + (L_1 + L_2).$$

2. *Пересечением* двух линейных многообразий $H_1 = \vec{c}_1 + L_1$, $H_2 = \vec{c}_2 + L_2$ назовём линейное многообразие, определяемое по следующему правилу:

$$H_1 \cap H_2 = \vec{c}_3 + (L_1 \cap L_2),$$

где $\vec{c}_3 \in H_1 \cap H_2$.

3. Умножение линейного многообразия $H_1 = \vec{c}_1 + L_1$, на число $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ порождает новое линейное многообразие:

$$\alpha H = \alpha\vec{c} + L$$

Определение 3.3.5. Взаимное расположение многообразий:

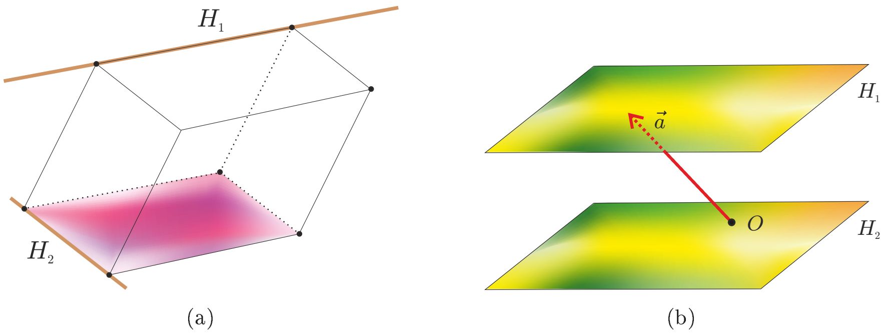


Рис. 3.4: (a): скрещивание многообразий; (b): паралллельность многообразий.

1. Два линейных многообразия $H_1 = \vec{c}_1 + L_1$, $H_2 = \vec{c}_2 + L_2$ назовём *параллельными*, если направляющее подпространство одного из них содержит направляющее подпространство другого:

$$H_1 \parallel H_2 \Longleftrightarrow L_1 \subseteq L_2 \text{ либо } L_2 \subseteq L_1.$$

2. Два линейных многообразия $H_1 = \vec{c}_1 + L_1$, $H_2 = \vec{c}_2 + L_2$ *скрещиваются*, если они не пересекаюся и не параллельны.

Контрольные вопросы.

1. Может ли многообразие быть линейным подпространством?

Упражнения к 3.3

Упражнение 3.3.1. *Задайте многообразие параметрически*

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 2, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 1. \end{cases}$$

Упражнение 3.3.2. *Докажите, что множество $\mathcal{P}_4$ многочленов степени не выше чем 4, производная которых равна $4x^3 - 6x$, образует многообразие в пространстве $\mathcal{P}_4$. Найдите размерность этого многообразия. Задайте многообразие параметрически.*

Упражнение 3.3.3. *Докажите, что множество $\mathcal{P}_5$ многочленов степени не выше чем 5, удовлетворяющих уравнению*

$$\left(\frac{d^3}{dt^3} - 6\frac{d}{dt}\right) f = 12x - 6,$$

образует многообразие в пространстве $\mathcal{P}_5$. Найдите размерность этого многообразия. Задайте многообразие параметрически.

Упражнение 3.3.4. *Докажите, что в пространстве $\mathcal{L}\{1, x, e^x, \cos x, \ln(1+x)\}$, множество функций $H = \{f(x) \in \mathcal{L} :\ f(0) = 5,\ f'(0) = 3\}$ образует многообразие. Найдите размерность этого многообразия. Задайте многообразие параметрически.*

Упражнение 3.3.5. *Докажите, что в пространстве $\mathcal{L}\{1, x, x^2, e^x, \cos x, \ln(1+x), \operatorname{tg} x\}$, множество функций $H = \{f(x) \in \mathcal{L} :\ f(0) = 2,\ f'(0) = -1,\ f''(0) = 3\}$ образует многообразие. Найдите размерность этого многообразия. Задайте многообразие параметрически.*

Упражнение 3.3.6. *Заданно линейное многообразие $H = \mathcal{L}\{\vec{a}(1, 1, 0, 3)^T\} + \vec{c}(0, 2, 0, 5)^T$. Привести*

(a) *пример трёхмерного линейного многообразия H_1, которое параллельно H и проходит через точку $(2, -3, 1, -1)$;*

(b) *пример двумерного линейного многообразия H_2, которое скрещивается с H и проходит через точку $(1, -1, 2, 0)$.*

Упражнение 3.3.7. *Заданно линейное многообразие $H = \mathcal{L}\{\vec{a}_1(1, 1, 0, 0)^T, \vec{a}_2(-1, 2, 0, 3)^T\} + \vec{c}(1, -2, 1, 5)^T$. Привести*

(a) *пример двумерного линейного многообразия H_1, которое параллельно H и проходит через точку $(2, -3, 3, -1)$;*

(b) *пример двумерного линейного многообразия H_2, которое скрещивается с H и проходит через точку $(2, -3, 3, -1)$.*

Ответы: **3.3.1** $H = \mathcal{L}\{\vec{a}_1(1\ 3/2\ \ -1/2\ 0\ 0)^T; \vec{a}_2(0\ \ -3/2\ 1/2\ 1\ 0)^T; \vec{a}_3(0\ 1\ 2\ 0\ 1)^T\} + \vec{c}(0\ 3/2\ \ -1/2\ 0\ 0)^T$. **3.3.2** $H = \alpha \cdot (1) + (x^3 - 3x^2)$, $\dim H = 1$. **3.3.3** $H = \alpha \cdot (x^5) + \beta \cdot (x^4 + 2x^2) + \gamma \cdot (x^3 + x) + \delta \cdot (1) - (x^3 + x^2)$, $\dim H = 4$. **3.3.4** ???? **3.3.5** ???? **3.3.6** ???? **3.3.7** ????

3.4 Скалярное произведение. Процесс ортогонализации. Матрица Грама

3.4.1 Скалярное произведение

В линейном пространстве нами определено сложение векторов и умножение векторов на число. Теперь важным шагом является введение функции метрики (расстояния) и понятия угла. Чтобы ввести эти понятия нам потребуется *скалярное произведение*.

Определение 3.4.1 (скалярное произведение в линейном пространстве V)**.** Функция $(\bullet, \bullet) \to \mathbb{C}$ называется скалярным произведением если

1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$;
2) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$;
3) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y), \forall \alpha \in \mathbb{C}$;
4) $(x, x) \geqslant 0$ причём $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in X$.

Замечание 13. Приведём два примера пространств со скалярным произведением:

$$1)\quad V=\mathbb{C}^n:\ (\vec{x},\vec{y})=\sum_{i=1}^{n}x_i\bar{y}_i,\ \vec{x}=(x_1,\ldots,x_n),\vec{y}=(y_1,\ldots,y_n).$$

$$2)\quad V=\mathbb{R}_2[-\pi,\pi]\Rightarrow\quad (f,g)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Здесь пространство $\mathbb{R}_2[-\pi,\pi]$ — пространство функций, у которых модуль квадрата — интегрируемая по Риману функция на отрезке $[-\pi,\pi]$, т.е. существует $\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f|^2\,dx$.

Доказательство. Проверим последнее свойство для пространства функций $\mathbb{R}_2[-\pi,\pi]$. $\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f|^2dx=0\Rightarrow f=0\in\mathbb{R}_2$. Если предположить, что множество $A: f\neq 0,\ \mu(A)>0$, то $\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f|^2dx=\int\limits_{A}|f|^2dx+\int\limits_{[-\pi,\pi]\setminus A}|f|^2dx\geqslant\varepsilon>0$. □

Лемма 3 (неравенство Коши-Буняковского)**.** $|(x,y)|^2\leqslant(x,x)\cdot(y,y)$.

Доказательство. Докажем для действительнозначного случая. Для произвольного $\lambda\in\mathbb{R}$ рассмотрим выражение:

$$0\leqslant(x+\lambda y,x+\lambda y)=(x,x)+2\lambda(x,y)+\lambda^2(y,y).$$

Поскольку, полученное квадратное уравнение относительно переменной λ всегда неотрицательно, то дискриминант этого уравнения неположителен, т.е.

$$(x,y)^2-(x,x)\cdot(y,y)\leqslant 0\quad\Longleftrightarrow\quad (x,y)^2-|x|^2|y|^2\leqslant 0.$$

□

Доказательство. Приведём доказательство для комплекснозначного случая. Для произвольного $\lambda\in\mathbb{C}$ рассмотрим выражение:

$$0\leqslant(x+\lambda y,x+\lambda y)=(x,x)+\bar{\lambda}(x,y)+\lambda\overline{(x,y)}+\lambda\bar{\lambda}(y,y).$$

- Пусть $(y,y)>0$. Тогда положим $\lambda=-\frac{(x,y)}{(y,y)}$ получаем требуемое неравенство $|(x,y)|^2\leqslant(x,x)(y,y)$.
- Пусть $(x,x)>0$. Тогда аналогично, положив $\lambda=-\frac{(x,y)}{(x,x)}$ получим требуемое неравенство.
- Если $(x,x)=(y,y)=0,\ \lambda=-(x,y)\Rightarrow 0\leqslant-2|(x,y)|^2\Rightarrow(x,y)=0$.

□

Определение 3.4.2. Норма в векторном пространстве V над полем вещественных или комплексных чисел — это функционал $\|\cdot\|\colon V\to\mathbb{R}$, обладающий следующими свойствами:

1. $\|x\|=0\Rightarrow x=0_V$;
2. $\forall\alpha\in\mathbb{C},\forall x\in V,\|\alpha\,x\|=|\alpha|\|x\|$.
3. $\forall x,y\in V,\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$ (неравенство треугольника);

Эти условия являются аксиомами нормы.

Векторное пространство с нормой называется нормированным пространством, а условия (1-3) — также аксиомами нормированного пространства.

Из аксиом нормы очевидным образом вытекает свойство неотрицательности нормы:

$$\forall x\in V,\|x\|\geqslant 0.$$

Действительно, из второго свойства следует: $\|0_V\|=\|0\cdot 0_V\|=0\cdot\|0_V\|=0$, а из свойства 3 — $\forall x\in V: 0=\|0_V\|=\|x-x\|\leqslant\|x\|+\|-x\|=2\|x\|$.

Лемма 4. *В произвольном векторном пространстве V со скалярным произведением можно ввести естественную норму (понятие длины вектора) $\|f\|=\sqrt{(f,f)}$ и метрику (расстояние между элементами пространства) $d(x,y)=\|x-y\|$.*

Доказательство. Проверим, что выполнены три условия нормы (длины вектора).

1. $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0_V$ в пространстве V — очевидно.
2. $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|,\ \alpha \in \mathbb{C}$ — очевидно,
3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$. После возведения в квадрат имеем

$$(x + y, x + y) \leqslant (x, x) + (y, y) + 2\sqrt{(x, x)(y, y)}.$$

Оставим квадратный корень в правой стороне неравенства и переместим остальное в левую часть неравенства:

$$(x, y) + \overline{(x, y)} \leqslant 2\sqrt{(x, x)(y, y)},$$

следовательно достаточно доказать: $\mathrm{Re}(x, y) \leqslant \sqrt{(x, x)(y, y)}$. Из неравенств

$$\mathrm{Re}(x, y) \leqslant |(x, y)| \leqslant \sqrt{(x, x)(y, y)},$$

где последнее неравенство справедливо по неравенству Коши-Буняковского, вытекает неравенство треугольника.

Свойства метрики будут выполнены, поскольку метрику мы определили по норме. Из свойств нормы вытекают свойства метрики. □

Определение 3.4.3. Линейное пространство со скалярным произведением в конечномерное случае называют *евклидовым* или *эрмитовым*, когда полем констант является $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ соответственно.

Определение 3.4.4. Длиной вектора x в евклидовом пространстве назовём величину:

$$|x| = \sqrt{(x, x)}.$$

Угол φ между векторами определим по формуле

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}.$$

Расстояние (метрику) между двумя векторами x и y определим по формуле $d(x, y) = |x - y|$.

Замечание 14. В силу неравенства Коши-Буняковского определение угла — корректно. Поскольку

$$|\cos\varphi| = \left|\frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}\right| \leqslant 1.$$

Корректность определения функции длины вектра и функции расстояния между векторами определена в лемме выше.

3.4.2 Процесс ортогонализации Грама-Шмидта

Процесс ортогонализации позволяет построить из произвольной линейно независимой системы векторов f_1, f_2, ..., f_m ортогональную систему ненулевых векторов g_1, g_2, ..., g_m и состоит в следующем. Положим

$$g_1 = f_1.$$

Будем искать вектор g_2 в следующем виде:

$$g_2 = f_2 - \alpha_{21} g_1,$$

где константу α_{21} будем искать из условия ортогональности векторов g_1 и g_2, т.е. чтобы было выполнено условие $(g_2, g_1) = 0$. Домножим равенство, определяющее вектор g_2, скалярно на вектор g_1. Тогда

$$\begin{aligned} (g_2, g_1) = (f_2, g_1) - \alpha_{21}(g_1, g_1) &\Longleftrightarrow \\ 0 = (f_2, g_1) - \alpha_{21}(g_1, g_1) &\Longleftrightarrow \\ \alpha_{21} = \frac{(f_2, g_1)}{(g_1, g_1)}&. \end{aligned}$$

Таким образом мы определили константу α_{21}, а следовательно и вектор g_2. Причём вектора g_1 и g_2 ортогональны и принадлежат линейной оболочке, построеннной на веторах f_1, f_2, т.е. выполнено

$$g_1 \perp g_2, \qquad g_1,\ g_2 \in \mathcal{L}(f_1, f_2).$$

Последующие вектора $g_1,\ g_2,\ \ldots,\ g_m$ будем аналогичным образом. Предположим, что мы уже постоили систему векторов $g_1,\ g_2,\ \ldots,\ g_{k-1}$. Покажем как найти следующий вектор g_k. Будем вектор g_k искать в следующем виде

$$g_k = f_k - \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_{kj} g_j.$$

Константы α_{ks} найдём из условия ортогональности веторов g_k и g_s, $s = 1, \ldots, k$. Действительно

$$\begin{aligned} (g_k, g_s) &= (f_k, g_s) - \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_{kj}(g_j, g_s) \Longleftrightarrow \\ 0 &= (f_k, g_s) - \alpha_{ks}(g_s, g_s) \Longleftrightarrow \\ \alpha_{ks} &= \frac{(f_k, g_s)}{(g_s, g_s)}. \end{aligned}$$

Таким образом мы определили все константы

$$\alpha_{ks} = \frac{(f_k, g_s)}{(g_s, g_s)} \tag{3.4.4}$$

для всех $s = 1, \ldots, k-1$, а следовательно и вектор g_k. Причём вектора g_i и g_j ортогональны $i \neq j,\ i, j \in 1, 2, \ldots k$ и принадлежат линейной оболочке, построеннной на векторах $f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_k$, т.е. выполнено

$$g_i \perp g_j,\ i \neq j,\ i, j \in 1, 2, \ldots k, \qquad g_1,\ g_2, \ldots, g_k \in \mathcal{L}(f_1, f_2, \ldots, f_k).$$

П р и м е р 3.4.1. В пространстве $\mathbb{R}^2$ со стандартным скалярным произведением построить ортонормированный базис линейного подпрастранства L, натянутого на векторы $f_1 = (3, 4)$, $f_2 = (1, 1)$.

Доказательство. Вектора f_1, f_2, как нетрудно проверить, линейно независмы. Для построения ортонормированного базиса подпространства L применим процесс ортогонализации к системе векторов f_1, f_2

1. Положим $g_1 = f_1 = (3, 4)$.

2. Построим вектор g_2 так, чтобы он линейно выражался через вектора f_1, f_2 и был ортогонален вектору g_1. Согласно процессу Грама-Шмидта получаем

$$g_2 = f_2 - \alpha_{21} g_1 = f_2 - \frac{(f_2, g_1)}{(g_1, g_1)} g_1 = (1, 1) - \frac{1 \cdot 3 + 1 \cdot 4}{3 \cdot 3 + 4 \cdot 4}(3, 4) = (1, 1) - \frac{7}{25}(3, 4) = \left(\frac{4}{25}; \frac{-3}{25}\right).$$

3. Остаётся нормировать полученные вектора.

$$\begin{aligned} \tilde{g}_1 &= \frac{g_1}{\sqrt{(g_1, g_1)}} = \frac{(3, 4)}{5} = \left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right), \\ \tilde{g}_2 &= \frac{g_2}{\sqrt{(g_2, g_2)}} = \left(\frac{4}{5}; \frac{-3}{5}\right). \end{aligned}$$

□

П р и м е р 3.4.2. В пространстве M_3 (пространство всех алгебраических полинономов степени не выше, чем 3) со скалярным произведением $(f, g) = \int_0^1 f(t) g(t)\, dt$ построить ортогональный базис линейного подпрастранства L, всех многочленов $f(t)$, удовлетворяющих условию $f'(1) + f'(-1) = 0$.

Доказательство. Пусть $f(t) = x_1t^3 + x_2t^2 + x_3t + x_4$, то условие $f'(1) + f'(-1) = 0$ равносильно равенству

$$6x_1 + 2x_3 = 0 \Longleftrightarrow 3x_1 + x_3 = 0.$$

Найдём базис в этом трёхмерном пространстве

$$\begin{aligned} f_1(t) &= (0, 0, 0, 1) = 1, \\ f_2(t) &= (0, 1, 0, 0) = t^2, \\ f_3(t) &= (1, 0, -3, 0) = t^3 - 3t. \end{aligned}$$

Как нетрудно проверить эти вектора, линейно независимы. Для построения ортогонального базиса подпространства L применим процесс ортогонализации к системе векторов f_1, f_2, f_3

1. Положим $g_1 = f_1 = (0, 0, 0, 1) = 1$.

2. Построим вектор g_2 так, чтобы он линейно выражался через вектора f_1, f_2 и был ортогонален вектору g_1. Согласно процессу Грама-Шмидта получаем

$$g_2 = f_2 - \alpha_{21}g_1 = f_2 - \frac{(f_2, g_1)}{(g_1, g_1)}\,g_1 = t^2 - \frac{\int_0^1 t^2\,dt}{\int_0^1\,dt}\,1 = t^2 - \frac{1}{3}.$$

3. Построим вектор g_3 так, чтобы он линейно выражался через вектора f_1, f_2, f_3 и был ортогонален векторам g_1, g_2. Согласно процессу Грама-Шмидта получаем

$$\begin{aligned} g_3 = f_3 - \alpha_{31}g_1 - \alpha_{32}g_2 = f_3 - \frac{(f_3, g_2)}{(g_2, g_2)}\,g_2 - \frac{(f_3, g_1)}{(g_1, g_1)}\,g_1 = \\ = (t^3 - 3t) - \frac{\int_0^1 (t^3 - 3t)\left(t^2 - \frac{1}{3}\right)\,dt}{\int_0^1 \left(t^2 - \frac{1}{3}\right)^2\,dt} \cdot \left(t^2 - \frac{1}{3}\right) - \frac{\int_0^1 (t^3 - 3t)\,dt}{\int_0^1\,dt} \cdot 1 = \\ = t^3 - 3t - \frac{-1/6}{4/45}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right) - \frac{-5/4}{1}\,1 = t^3 - 3t + \frac{15}{8}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right) + \frac{5}{4} = \\ = t^3 + \frac{15}{8}\,t^2 - 3t + \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

Выпишем ортогональную систему в пространстве L

$$\begin{aligned} g_1 &= 1, \\ g_2 &= t^2 - \frac{1}{3}, \\ g_3 &= t^3 + \frac{15}{8}\,t^2 - 3t + \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

□

Ортогональная проекция и ортогональная составляющая вектора

Пример 3.4.3. Найдите ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $\vec{a} = (-3, 2, 0, 0)^T$ на линейную оболочку векторов $\vec{l}_1 = (-6, 4, 1, 0)^T$, $\vec{l}_2 = (-2, 1, 0, 1)^T$.

Доказательство. Применив процесс Грама-Шмидта к векторам $\vec{l}_1$, $\vec{l}_2$, $\vec{a}$ мы получим вектора $\vec{g}_1$, $\vec{g}_2$, $\vec{g}_3$. Вектор $\vec{g}_3$ как раз и есть ортогональная составляющая, поскольку $\vec{g}_3 \perp \mathcal{L}(\vec{l}_1, \vec{l}_2)$ и $\vec{g}_3 = \vec{a} - \alpha\,\vec{l}_1 - \beta\,\vec{l}_2$. Ортогональной проекцией тогда будет $\vec{l} = \vec{a} - \vec{g}_3$ (см. рис. 3.5). Но, поскольку ортогонализация всех трёх векторов нам не нужна, то найдём сразу ортогональную составляющую при помощи равенств

$$\vec{h} = \vec{a} - \alpha\,\vec{l}_1 - \beta\,\vec{l}_2,$$

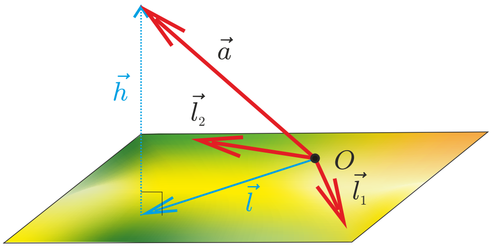


Рис. 3.5:

где α и β найдём из условия ортогональности $\vec{h}$ к $\mathcal{L}(\vec{l}_1, \vec{l}_2)$

$$\begin{cases} 0 = (\vec{a}, \vec{l}_1) - \alpha(\vec{l}_1, \vec{l}_1) - \beta(\vec{l}_2, \vec{l}_1), \\ 0 = (\vec{a}, \vec{l}_2) - \alpha(\vec{l}_1, \vec{l}_2) - \beta(\vec{l}_2, \vec{l}_2) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 26 = 53\alpha + 16\beta, \\ 8 = 16\alpha + 6\beta \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 26 = 53\alpha + 16\beta, \\ 4 = 8\alpha + 3\beta \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{14}{31}, \\ \beta = \frac{4}{31}. \end{cases}$$

Откуда находим ортогональную составляющую

$$\vec{h} = \vec{a} - \frac{14}{31}\vec{l}_1 - \frac{4}{31}\vec{l}_2 = \left(-\frac{1}{31}, \frac{2}{31}, -\frac{14}{31}, -\frac{4}{31}\right)^T.$$

Ортогональная проекция $\vec{l}$ тогда будет иметь вид

$$\vec{l} = \vec{a} - \vec{h} = \left(-\frac{92}{31}, \frac{60}{31}, \frac{14}{31}, \frac{4}{31}\right)^T.$$

□

3.4.3 Матрица Грама

Определение 3.4.5. Матрицей Грама системы векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ евклидова (унитарного) пространства называется матрица

$$G(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m) = \begin{pmatrix} (\vec{a}_1, \vec{a}_1) & (\vec{a}_1, \vec{a}_2) & \ldots & (\vec{a}_1, \vec{a}_m) \\ (\vec{a}_2, \vec{a}_1) & (\vec{a}_2, \vec{a}_2) & \ldots & (\vec{a}_2, \vec{a}_m) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\vec{a}_m, \vec{a}_1) & (\vec{a}_m, \vec{a}_2) & \ldots & (\vec{a}_m, \vec{a}_m) \end{pmatrix}.$$

Определить матрицы Грама называется определителем Грама.

Свойства матрицы Грама

Теорема 3.4.15 (Критерий линейная зависимости векторов в терминах матрицы Грама)**.** *Система векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_m$ евклидова (унитарного) пространства линейно зависима тогда и только тогда, когда определитель Грама этой системы равен нулю.*

Доказательство. Действительно, если система $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ линейно зависима, то существуют такие числа λ_1, λ_2, ..., λ_m, не равные нулю одновременно, что

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots + \lambda_m\vec{a}_m = \vec{0}.$$

Умножая это равенство скалярно на $\vec{a}_1$, затем на $\vec{a}_2$ и т.д. на $\vec{a}_m$, получаем однородную систему уравнений

$$\begin{cases} \lambda_1(\vec{a}_1, \vec{a}_1) + \lambda_2(\vec{a}_1, \vec{a}_2) + \cdots + \lambda_m(\vec{a}_1, \vec{a}_m) = 0, \\ \lambda_1(\vec{a}_2, \vec{a}_1) + \lambda_2(\vec{a}_2, \vec{a}_2) + \cdots + \lambda_m(\vec{a}_2, \vec{a}_m) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_1(\vec{a}_m, \vec{a}_1) + \lambda_2(\vec{a}_m, \vec{a}_2) + \cdots + \lambda_m(\vec{a}_m, \vec{a}_m) = 0. \end{cases} \Longleftrightarrow G(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m)\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом система $G(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m)\vec{x} = \vec{0}$, имеет нетривиальное решение $\vec{x} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)^T$. Следовательно, ее определитель равен нулю. Необходимость доказана.

Достаточность доказывается, проводя рассуждения в обратном порядке. Действительно, т.к. определитель Грама равен нулю, то система $G(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m)\vec{x} = \vec{0}$ имеет нетривиальное решение $\vec{x} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)^T$. Следовательно справедливо

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_1(\vec{a}_1,\vec{a}_1) + \lambda_2(\vec{a}_1,\vec{a}_2) + \dots + \lambda_m(\vec{a}_1,\vec{a}_m) = 0, \\ \lambda_1(\vec{a}_2,\vec{a}_1) + \lambda_2(\vec{a}_2,\vec{a}_2) + \dots + \lambda_m(\vec{a}_2,\vec{a}_m) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_1(\vec{a}_m,\vec{a}_1) + \lambda_2(\vec{a}_m,\vec{a}_2) + \dots + \lambda_m(\vec{a}_m,\vec{a}_m) = 0. \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (\vec{a}_1, \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \dots + \lambda_m\vec{a}_m) = 0, \\ (\vec{a}_2, \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \dots + \lambda_m\vec{a}_m) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (\vec{a}_m, \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \dots + \lambda_m\vec{a}_m) = 0. \end{array}\right.$$

Теперь, домножая первое уравнение на λ_1, второе на λ_2, и т.д. последнее на λ_m и, сложив все равенства, получаем

$$(\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \dots + \lambda_m\vec{a}_m, \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \dots + \lambda_m\vec{a}_m) = 0.$$

Откуда из определения скалярного произведения вытекает равенство

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \dots + \lambda_m\vec{a}_m = \vec{0}.$$

□

Теорема 3.4.16. *Пусть заданна линейно независимая система векторов $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, ..., $\vec{f}_m$ евклидова (унитарного) пространства. Тогда определитель Грама $\det G(f_1, f_2, \dots, f_m)$ не изменяется в процессе ортогонализации системы векторов f_1, f_2, ..., f_m. Более того, если вектора g_1, g_2, ..., g_m получены путём ортогонализации системы векторов f_1, f_2, ..., f_m, то*

$$\det G(f_1, f_2, \dots, f_m) = \det G(g_1, g_2, \dots, g_m) = (g_1, g_1) \cdot (g_2, g_2) \cdot \dots \cdot (g_m, g_m).$$

Доказательство. Будем считать, что вектора g_1, g_2, ..., g_m получены согласно процессу ортогонализации Грама-Шмидта, где коэффициенты α_{ks} определены формулой (3.4.4). Тогда,

$$\det G(f_1, f_2, \dots, f_m) = \begin{vmatrix} (\vec{f}_1,\vec{f}_1) & (\vec{f}_1,\vec{f}_2) & \dots & (\vec{f}_1,\vec{f}_m) \\ (\vec{f}_2,\vec{f}_1) & (\vec{f}_2,\vec{f}_2) & \dots & (\vec{f}_2,\vec{f}_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\vec{f}_m,\vec{f}_1) & (\vec{f}_m,\vec{f}_2) & \dots & (\vec{f}_m,\vec{f}_m) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\vec{g}_1,\vec{g}_1) & (\vec{g}_1,\vec{f}_2) & \dots & (\vec{g}_1,\vec{f}_m) \\ (\vec{f}_2,\vec{g}_1) & (\vec{f}_2,\vec{f}_2) & \dots & (\vec{f}_2,\vec{f}_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\vec{f}_m,\vec{g}_1) & (\vec{f}_m,\vec{f}_2) & \dots & (\vec{f}_m,\vec{f}_m) \end{vmatrix}$$

Вычтем из второй строки первую строку, умноженную на α_{21}, а затем вычтем из второго столбца первый, умноженный на ту же самую константу α_{21}:

$$\det G(f_1, f_2, \dots, f_m) = \begin{vmatrix} (\vec{g}_1,\vec{g}_1) & (\vec{g}_1,\vec{f}_2) & \dots & (\vec{g}_1,\vec{f}_m) \\ (\vec{f}_2,\vec{g}_1) & (\vec{f}_2,\vec{f}_2) & \dots & (\vec{f}_2,\vec{f}_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\vec{f}_m,\vec{g}_1) & (\vec{f}_m,\vec{f}_2) & \dots & (\vec{f}_m,\vec{f}_m) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (\vec{g}_1,\vec{g}_1) & (\vec{g}_1,\vec{f}_2) & \dots & (\vec{g}_1,\vec{f}_m) \\ (\vec{f}_2 - \alpha_{21}\vec{g}_1,\vec{g}_1) & (\vec{f}_2 - \alpha_{21}\vec{g}_1,\vec{f}_2) & \dots & (\vec{f}_2 - \alpha_{21}\vec{g}_1,\vec{f}_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\vec{f}_m,\vec{g}_1) & (\vec{f}_m,\vec{f}_2) & \dots & (\vec{f}_m,\vec{f}_m) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\vec{g}_1,\vec{g}_1) & (\vec{g}_1,\vec{f}_2) & \dots & (\vec{g}_1,\vec{f}_m) \\ (\vec{g}_2,\vec{g}_1) & (\vec{g}_2,\vec{f}_2) & \dots & (\vec{g}_2,\vec{f}_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\vec{f}_m,\vec{g}_1) & (\vec{f}_m,\vec{f}_2) & \dots & (\vec{f}_m,\vec{f}_m) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (\vec{g}_1,\vec{g}_1) & (\vec{g}_1,\vec{f}_2 - \alpha_{21}\vec{g}_1) & \dots & (\vec{g}_1,\vec{f}_m) \\ (\vec{g}_2,\vec{g}_1) & (\vec{g}_2,\vec{f}_2 - \alpha_{21}\vec{g}_1) & \dots & (\vec{g}_2,\vec{f}_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\vec{f}_m,\vec{g}_1) & (\vec{f}_m,\vec{f}_2 - \alpha_{21}\vec{g}_1) & \dots & (\vec{f}_m,\vec{f}_m) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\vec{g}_1,\vec{g}_1) & (\vec{g}_1,\vec{g}_2) & \dots & (\vec{g}_1,\vec{f}_m) \\ (\vec{g}_2,\vec{g}_1) & (\vec{g}_2,\vec{g}_2) & \dots & (\vec{g}_2,\vec{f}_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\vec{f}_m,\vec{g}_1) & (\vec{f}_m,\vec{g}_2) & \dots & (\vec{f}_m,\vec{f}_m) \end{vmatrix}.$$

Продолжая действовать аналогичным образом на последнем шаге из последней строки вычтем первую домноженную на α_{m1}, вторую домноженную на α_{m2} и так далее.

$$\det G(f_1, f_2, \dots, f_m) = \begin{vmatrix} (\vec{g}_1, \vec{g}_1) & (\vec{g}_1, \vec{g}_2) & \dots & (\vec{g}_1, \vec{g}_{m-1}) & (\vec{g}_1, \vec{f}_m) \\ (\vec{g}_2, \vec{g}_1) & (\vec{g}_2, \vec{g}_2) & \dots & (\vec{g}_2, \vec{g}_{m-1}) & (\vec{g}_2, \vec{f}_m) \\ \hdotsfor{5} \\ (\vec{g}_{m-1}, \vec{g}_1) & (\vec{g}_{m-1}, \vec{g}_2) & \dots & (\vec{g}_{m-1}, \vec{g}_{m-1}) & (\vec{g}_{m-1}, \vec{f}_m) \\ (\vec{f}_m, \vec{g}_1) & (\vec{f}_m, \vec{g}_2) & \dots & (\vec{f}_m, \vec{g}_{m-1}) & (\vec{f}_m, \vec{f}_m) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (\vec{g}_1, \vec{g}_1) & (\vec{g}_1, \vec{g}_2) & \dots & (\vec{g}_1, \vec{g}_{m-1}) & (\vec{g}_1, \vec{f}_m) \\ (\vec{g}_2, \vec{g}_1) & (\vec{g}_2, \vec{g}_2) & \dots & (\vec{g}_2, \vec{g}_{m-1}) & (\vec{g}_2, \vec{f}_m) \\ \hdotsfor{5} \\ (\vec{g}_{m-1}, \vec{g}_1) & (\vec{g}_{m-1}, \vec{g}_2) & \dots & (\vec{g}_{m-1}, \vec{g}_{m-1}) & (\vec{g}_{m-1}, \vec{f}_m) \\ (\vec{f}_m - \sum_{j=1}^m \alpha_{mj}\vec{g}_j, \vec{g}_1) & (\vec{f}_m - \sum_{j=1}^m \alpha_{mj}\vec{g}_j, \vec{g}_2) & \dots & (\vec{f}_m - \sum_{j=1}^m \alpha_{mj}\vec{g}_j, \vec{g}_{m-1}) & (\vec{f}_m - \sum_{j=1}^m \alpha_{mj}\vec{g}_j, \vec{f}_m) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (\vec{g}_1, \vec{g}_1) & (\vec{g}_1, \vec{g}_2) & \dots & (\vec{g}_1, \vec{g}_{m-1}) & (\vec{g}_1, \vec{f}_m) \\ (\vec{g}_2, \vec{g}_1) & (\vec{g}_2, \vec{g}_2) & \dots & (\vec{g}_2, \vec{g}_{m-1}) & (\vec{g}_2, \vec{f}_m) \\ \hdotsfor{5} \\ (\vec{g}_{m-1}, \vec{g}_1) & (\vec{g}_{m-1}, \vec{g}_2) & \dots & (\vec{g}_{m-1}, \vec{g}_{m-1}) & (\vec{g}_{m-1}, \vec{f}_m) \\ (\vec{g}_m, \vec{g}_1) & (\vec{g}_m, \vec{g}_2) & \dots & (\vec{g}_m, \vec{g}_{m-1}) & (\vec{g}_m, \vec{f}_m) \end{vmatrix}$$

Теперь проделаем ту же процедуру с последним столбцом, т.е. вычтем первый столбец домноженный на α_{m1}, второй домноженный на α_{m2} и так далее.

$$\det G(f_1, f_2, \dots, f_m) = \begin{vmatrix} (\vec{g}_1, \vec{g}_1) & (\vec{g}_1, \vec{g}_2) & \dots & (\vec{g}_1, \vec{g}_{m-1}) & (\vec{g}_1, \vec{f}_m - \sum_{j=1}^m \alpha_{mj}\vec{g}_j) \\ (\vec{g}_2, \vec{g}_1) & (\vec{g}_2, \vec{g}_2) & \dots & (\vec{g}_2, \vec{g}_{m-1}) & (\vec{g}_2, \vec{f}_m - \sum_{j=1}^m \alpha_{mj}\vec{g}_j) \\ \hdotsfor{5} \\ (\vec{g}_{m-1}, \vec{g}_1) & (\vec{g}_{m-1}, \vec{g}_2) & \dots & (\vec{g}_{m-1}, \vec{g}_{m-1}) & (\vec{g}_{m-1}, \vec{f}_m - \sum_{j=1}^m \alpha_{mj}\vec{g}_j) \\ (\vec{g}_m, \vec{g}_1) & (\vec{g}_m, \vec{g}_2) & \dots & (\vec{g}_m, \vec{g}_{m-1}) & (\vec{g}_m, \vec{f}_m - \sum_{j=1}^m \alpha_{mj}\vec{g}_j) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (\vec{g}_1, \vec{g}_1) & (\vec{g}_1, \vec{g}_2) & \dots & (\vec{g}_1, \vec{g}_{m-1}) & (\vec{g}_1, \vec{g}_m) \\ (\vec{g}_2, \vec{g}_1) & (\vec{g}_2, \vec{g}_2) & \dots & (\vec{g}_2, \vec{g}_{m-1}) & (\vec{g}_2, \vec{g}_m) \\ \hdotsfor{5} \\ (\vec{g}_{m-1}, \vec{g}_1) & (\vec{g}_{m-1}, \vec{g}_2) & \dots & (\vec{g}_{m-1}, \vec{g}_{m-1}) & (\vec{g}_{m-1}, \vec{g}_m) \\ (\vec{g}_m, \vec{g}_1) & (\vec{g}_m, \vec{g}_2) & \dots & (\vec{g}_m, \vec{g}_{m-1}) & (\vec{g}_m, \vec{g}_m) \end{vmatrix}.$$

Остаётся заметить, что вектора g_j ортогональны и поэтому справедливо:

$$\det G(f_1, f_2, \dots, f_m) = \begin{vmatrix} (\vec{g}_1, \vec{g}_1) & (\vec{g}_1, \vec{g}_2) & \dots & (\vec{g}_1, \vec{g}_m) \\ (\vec{g}_2, \vec{g}_1) & (\vec{g}_2, \vec{g}_2) & \dots & (\vec{g}_2, \vec{g}_m) \\ \hdotsfor{4} \\ (\vec{g}_m, \vec{g}_1) & (\vec{g}_m, \vec{g}_2) & \dots & (\vec{g}_m, \vec{g}_m) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (\vec{g}_1, \vec{g}_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (\vec{g}_2, \vec{g}_2) & \dots & 0 \\ \hdotsfor{4} \\ 0 & 0 & \dots & (\vec{g}_m, \vec{g}_m) \end{vmatrix} = (g_1, g_1) \cdot (g_2, g_2) \cdot \dots \cdot (g_m, g_m).$$

□

Замечание 15 (Другое доказательство теоремы). Доказательство теоремы можно было бы провести несколько изящнее, например, доказать лемму:

Лемма 5. *Пусть даны вектора* $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_k, g_k$, *где*

$$\vec{g}_k = \alpha_1 \vec{f}_1 + \dots + \alpha_{k-1}\vec{f}_{k-1} + \vec{f}_k,$$

Тогда $\det G(f_1, f_2, \dots, f_k) = \det G(f_1, f_2, \dots, f_{k-1}, g_k)$.

Из данной леммы легко вывести, что если система векторов g получается из f методом ортогонализации, то $\det G(f_1, f_2, \dots, f_m) = \det G(g_1, g_2, \dots, g_m)$ (например, сославшись на индуктивный переход). Но мы предпочли привести более длинное доказательство.

Многомерный мерный объем параллелепипеда

Определение 3.4.6. Пусть f_1, f_2, ..., f_m — линейно независимая система векторов m-мерного евклидова (унитарного) пространства. Определим по индукции понятие многомерного объема. Обозначим через h_j - перпендикуляр, опущенный из конца вектора f_j на подпространство $\mathcal{L}(f_1, \ldots, f_{j-1})$, $j = 2, \ldots, m$. Обозначим

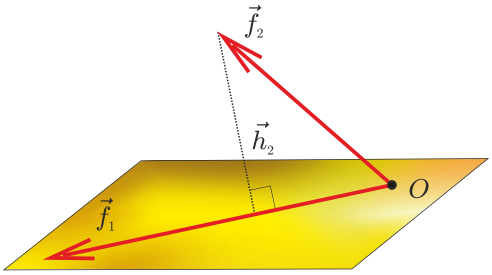


Рис. 3.6:

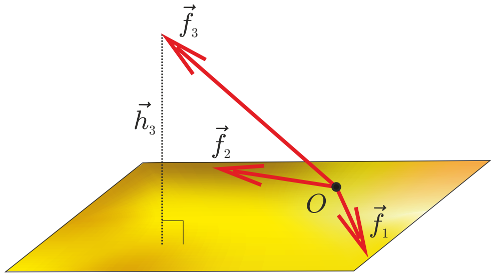


Рис. 3.7:

- $V_{f_1} = |f_1|$ — одномерный объем (длина вектора f_1);
- $V_{f_1,f_2} = V_{f_1}|h_2| = |f_1| \cdot |h_2|$ — двумерный объем (площадь параллелограмма, построенного на векторах f_1, f_2);
- $V_{f_1,f_2,f_3} = V_{f_1,f_2}|h_3| = |f_1| \cdot |h_2| \cdot |h_3|$ — трёхмерный объем (объём параллелепипеда, построенного на векторах f_1, f_2, f_3);
- $V_{f_1,\ldots,f_m} = V_{f_1,\ldots,f_{m-1}}|h_m| = |f_1| \cdot |h_2| \ldots |h_m|$ — m-мерный объем параллелепипеда (объём параллелепипеда, построенного на векторах f_1, f_2, ...,f_m);

Проводя ортогонализацию системы векторов f_1, f_2, ..., f_m, получаем ортогональные вектора $h_1 = f_1$, h_2, ..., h_m. Тогда по свойству определителя Грама имеем

$$V^2_{f_1,\ldots,f_m} = |h_1|^2 \cdot |h_2|^2 \ldots |h_m|^2 = \det G(f_1, f_2, \ldots, f_m),$$

т.е. определитель Грама векторов f_1, f_2, ..., f_m равен квадрату m-мерного объема параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Определение 3.4.7. Расстоянием от конца вектора $\vec{a}$ до подпространства L называется наименьшее значение длин векторов $(\vec{a} - \vec{l})$, где $\vec{l} \in L$, т.е.

$$d = \min_{\vec{l} \in L} |\vec{a} - \vec{l}|.$$

Аналогично определяется расстояние от конца вектора до многообразия.

Определение 3.4.8. Углом между ненулевым вектором $\vec{a}$ и подпространством L называется наименьший угол φ между вектором $\vec{a}$ и ненулевыми векторами подпространства, т.е.

$$\varphi = \min_{\vec{l} \in L} \left(\arccos \frac{(\vec{a}, \vec{l})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{l}|} \right).$$

Аналогично определяется угол между вектором и многообразием, как угол между вектором и однородной частью многообразия.

Из определений следует, что

- расстояние d от конца вектора $\vec{a}$ до подпространства L равно длине перпендикуляра $\vec{h}$, опущенного из конца вектора $\vec{a}$ на подпространство L, т.е. $d = |\vec{h}|$;
- угол между ненулевым вектором $\vec{a}$ и подпространством L равен углу между вектором $\vec{a}$ и его ортогональной проекцией на подпространство L.

Нахождения расстояний между произвольными многообразиями и углов в случае, когда одно из многообразий одномерно

Для нахождения расстояний и углов можно использовать определитель Грама. Поясним

1. Пусть задан вектор $\vec{a}$ и подпространство $L = \mathcal{L}(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_m)$ (линейная оболочка на этих векторах), причем векторы $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_m$ линейно независимы. Тогда $V_{\vec{f}_1,\dots,\vec{f}_m,\vec{a}} = V_{\vec{f}_1,\dots,\vec{f}_m} \cdot |\vec{h}|$, где $\vec{h}$ — ортогональная составляющая вектора $\vec{a}$ относительно подпространства L. Откуда длина $|\vec{h}|$ ортогональной составляющей (расстояние от конца вектора $\vec{a}$ до подпространства $L = \mathcal{L}(f_1, \dots, f_m)$ находится по формуле

$$h = \frac{V_{\vec{f}_1,\dots,\vec{f}_m,\vec{a}}}{V_{\vec{f}_1,\dots,\vec{f}_m}} = \sqrt{\frac{\det G(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_m, \vec{a})}{\det G(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_m)}},$$

а угол φ между ненулевым вектором $\vec{a}$ и подпространством L находится по формуле

$$\varphi = \arcsin \frac{|\vec{h}|}{|\vec{a}|}.$$

2. Пусть задано два линейных многообразия в пространстве $\mathbb{R}^m$.

$$H_1 = \vec{c}_1 + \mathcal{L}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k), \quad H_2 = \vec{c}_2 + \mathcal{L}(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_l).$$

причем векторы $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ линейно независимы, и векторы $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_l$ также линейно независимы. Тогда расстояния между многообразиями можно вычислить следующим образом: Найти объём параллелепипеда построенного на векторах $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_l, \vec{c}_1 - \vec{c}_2$. Если он равен нулю, то расстояние между многообразиями равно нулю. Если он отличен от нуля, то отличен от нуля и объём параллелепипеда построенного на векторах $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_l$, а расстояние можно вычислить по формуле

$$h = \frac{V_{\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_k,\vec{b}_1,\dots,\vec{b}_l,\vec{c}_1-\vec{c}_2}}{V_{\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_k,\vec{b}_1,\dots,\vec{b}_l}} = \sqrt{\frac{\det G(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_l, \vec{c}_1 - \vec{c}_2)}{\det G(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_l)}}.$$

П р и м е р 3.4.4. Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми:

$$\frac{x-9}{4} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{1} \qquad \text{и} \qquad \frac{x}{-2} = \frac{y+7}{9} = \frac{z-2}{2}.$$

Введём обозначения (см. рис. 3.8): $A(9, -2, 0)$, $C(0, -7, 2)$, $\vec{l_1} = (4, -3, 1)$, $\vec{l_2} = (-2, 9, 2)$, $\vec{s} = \vec{AC} = (-9, -5, 2)$.

$$\det G(\vec{l}_1, \vec{l}_2) = \begin{vmatrix} (\vec{l}_1, \vec{l}_1) & (\vec{l}_1, \vec{l}_2) \\ (\vec{l}_2, \vec{l}_1) & (\vec{l}_2, \vec{l}_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 26 & -33 \\ -33 & 89 \end{vmatrix} = 35^2,$$

$$\det G(\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{s}) = \begin{vmatrix} (\vec{l}_1, \vec{l}_1) & (\vec{l}_1, \vec{l}_2) & (\vec{l}_1, \vec{s}) \\ (\vec{l}_2, \vec{l}_1) & (\vec{l}_2, \vec{l}_2) & (\vec{l}_2, \vec{s}) \\ (\vec{s}, \vec{l}_1) & (\vec{s}, \vec{l}_2) & (\vec{s}, \vec{s}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 26 & -33 & -19 \\ -33 & 89 & -23 \\ -19 & -23 & 110 \end{vmatrix} = 7^2 \cdot 35^2.$$

Следовательно расстояние между прямыми равно:

$$h = \sqrt{\frac{\det G(\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{s})}{\det G(\vec{l}_1, \vec{l}_2)}} = 7.$$

Данный результат согласуется с формулой, полученной нами в курсе аналитической геометрии:

$$\varrho = \frac{|(\vec{s},\ \vec{l}_1,\ \vec{l}_2|)}{|\vec{l}_1 \times \vec{l}_2|}.$$

Хотя, конечно же понятно, что последняя формула проще формулы, использующей определители Грама.

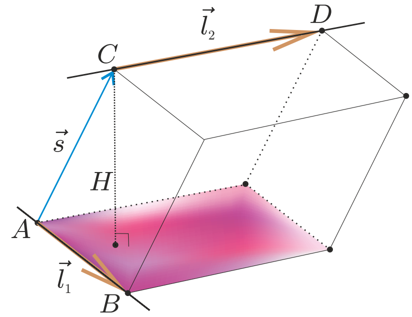


Рис. 3.8:

П р и м е р 3.4.5. В пространстве $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением известен вектор $\vec{a} = (-3, 2, 0, 0)^T$ и заданно подпространство L

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Найдите расстояние от конца вектора $\vec{a}$ до подпространства L и угол между вектором $\vec{a}$ и подпространством L.

Доказательство. Найдём базис подпространства L:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 - 2\vec{a}_1 \\ \vec{a}_3 - \vec{a}_2 - 2\vec{a}_1 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \vec{a}_1 - \vec{a}_2 \\ \vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Откуда

$$\begin{cases} x_1 = -6x_3 - 2x_4, \\ x_2 = 4x_3 + x_4 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

Откуда находим фундаментальную систему решений:

$$\vec{l}_1 = (-6, 4, 1, 0)^T, \quad \vec{l}_2 = (-2, 1, 0, 1)^T.$$

Для линейной оболочки $L = \mathcal{L}(\vec{l}_1, \vec{l}_2)$ составим определители Грама

$$\det G(\vec{l}_1, \vec{l}_2) = \begin{vmatrix} (\vec{l}_1, \vec{l}_1) & (\vec{l}_1, \vec{l}_2) \\ (\vec{l}_2, \vec{l}_1) & (\vec{l}_2, \vec{l}_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 53 & 16 \\ 16 & 6 \end{vmatrix} = 62,$$

$$\det G(\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{a}) = \begin{vmatrix} (\vec{l}_1, \vec{l}_1) & (\vec{l}_1, \vec{l}_2) & (\vec{l}_1, \vec{a}) \\ (\vec{l}_2, \vec{l}_1) & (\vec{l}_2, \vec{l}_2) & (\vec{l}_2, \vec{a}) \\ (\vec{a}, \vec{l}_1) & (\vec{a}, \vec{l}_2) & (\vec{a}, \vec{a}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 53 & 16 & 26 \\ 16 & 6 & 8 \\ 26 & 8 & 13 \end{vmatrix} = 14.$$

Тогда

$$|\vec{h}| = \sqrt{\frac{14}{62}} = \sqrt{\frac{7}{31}}, \quad \varphi = \arcsin \frac{|\vec{h}|}{|\vec{a}|} = \arcsin \sqrt{\frac{7}{403}}.$$

Второй способ решения. В примере 3.4.3 мы уже находили ортогональную проекцию $\vec{l} = \left(-\frac{92}{31}, \frac{60}{31}, \frac{14}{31}, \frac{4}{31}\right)^T$ и ортогональную составляющую $\vec{h} = \left(-\frac{1}{31}, \frac{2}{31}, -\frac{14}{31}, -\frac{4}{31}\right)^T$ вектора $\vec{a}$ на подпространства L. Вычисляя длину вектора $\vec{h}$, опять получаем $|\vec{h}| = \sqrt{\frac{7}{31}}$ и аналогичным образом находим угол φ. □

П р и м е р 3.4.6. В пространстве $\mathbb{R}^5$ со стандартным скалярным произведением найдите расстояние между скрещивающимися многообразиями:

$$H_1 = \vec{c}_1(2, 3, 4, 1, 3)^T + \mathcal{L}\{\vec{a}_1(1, 1, 0, -1, -1)^T, \vec{a}_2(1, -1, 0, -1, 1)^T\},$$
$$H_2 = \vec{c}_2(-1, 1, 2, -1, 3)^T + \mathcal{L}\{\vec{b}_1(1, 1, 0, 1, 1)^T, \vec{b}_2(1, -1, 0, 1, -1)^T\}.$$

Доказательство. Найдём вектор $\vec{c}_1 - \vec{c}_2 = (3,2,2,2,0)^T$. Найдём матрицы Грама

$$\det G(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{b}_1,\vec{b}_2) = \begin{vmatrix} (\vec{a}_1,\vec{a}_1) & (\vec{a}_1,\vec{a}_2) & (\vec{a}_1,\vec{b}_1) & (\vec{a}_1,\vec{b}_2) \\ (\vec{a}_2,\vec{a}_1) & (\vec{a}_2,\vec{a}_2) & (\vec{a}_2,\vec{b}_1) & (\vec{a}_2,\vec{b}_2) \\ (\vec{b}_1,\vec{a}_1) & (\vec{b}_1,\vec{a}_2) & (\vec{b}_1,\vec{b}_1) & (\vec{b}_1,\vec{b}_2) \\ (\vec{b}_2,\vec{a}_1) & (\vec{b}_2,\vec{a}_2) & (\vec{b}_2,\vec{b}_1) & (\vec{b}_2,\vec{b}_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 256,$$

$$\det G(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{c}_1-\vec{c}_2) = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 7 & 3 & 21 \end{vmatrix} = 256\cdot 4.$$

Тогда

$$|\vec{h}| = \sqrt{\frac{256\cdot 4}{256}} = 2.$$

□

Контрольные вопросы.

1. Сформулируйте критерий линейной зависимости векторов в терминах матрицы Грама.
2. Как найти объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}_1$, …, $\vec{a}_l$?
3. Как найти угол между многообразиями?
4. Как найти расстояние между многообразиями?
5. Из заданных векторов $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, …, $\vec{f}_n$ получены вектора $\vec{g}_1$, $\vec{g}_2$, …, $\vec{g}_n$ при помощи метода ортогонализации. Докажите, что если $\vec{g}_n = \vec{0}$, то $\vec{f}_n \in \mathcal{L}(\vec{f}_1,\vec{f}_2,\dots,\vec{f}_{n-1})$, т.е. вектор $\vec{f}_n$ является линейной комбинацией векторов $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, …, $\vec{f}_{n-1}$.

Упражнения к 3.4

Упражнение 3.4.1. *Найдите ортогональный базис подпространства, порождённого векторами* $\vec{g}_1 = (1,1,1,1)^T$, $\vec{g}_2 = (2,1,2,1)^T$, $\vec{g}_3 = (3,2,3,2)^T$, $\vec{g}_4 = (1,0,2,1)^T$.

Упражнение 3.4.2. *Найдите ортогональный базис подпространства, порождённого векторами* $\vec{g}_1 = (1,0,0,0,1)^T$, $\vec{g}_2 = (2,-1,0,0,0)^T$, $\vec{g}_3 = (1,0,1,2,3)^T$, $\vec{g}_4 = (4,-1,1,2,4)^T$.

Упражнение 3.4.3. *В пространстве M_3 со скалярным произведением $(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$ построить ортогональный базис линейного подпраcтранства L. Базисные многочлены в M_3:* $\vec{g}_1 = 1$, $\vec{g}_2 = x$, $\vec{g}_3 = x^2$, $\vec{g}_4 = x^3$.

Упражнение 3.4.4. *Найдите ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора* $\vec{a} = (4,-4,12,8)^T$ *на линейную оболочку векторов* $\vec{l}_1 = (1,1,1,1)^T$, $\vec{l}_2 = (2,3,2,3)^T$.

Упражнение 3.4.5. *В пространстве $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением найдите расстояние и угол между скрещивающимися многообразиями:*

$$H_1 : \begin{cases} x_2 - x_3 + 3x_4 = -1, \\ -2x_2 + 2x_3 - x_4 = 2; \end{cases}$$
$$H_2 = \vec{c}_2(-1,1,0,0)^T + \mathcal{L}\{\vec{b}_1(2,-1,0,1)^T\}.$$

Упражнение 3.4.6. *В пространстве $\mathbb{R}^5$ со стандартным скалярным произведением найдите расстояние между скрещивающимися многообразиями:*

$$H_1 = \vec{c}_1(47,37,150,0,51)^T + \mathcal{L}\{\vec{a}_1(1,1,0,-1,-1)^T, \vec{a}_2(1,-1,0,-1,1)^T\},$$
$$H_2 = \vec{c}_2(0,-16,0,58,0)^T + \mathcal{L}\{\vec{b}_1(1,1,0,1,1)^T, \vec{b}_2(1,-1,0,1,-1)^T\}.$$

Ответы: 3.4.1 $\vec{f}_1 = (1,1,1,1)$, $\vec{f}_2 = (\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$, $\vec{f}_3 = (-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. **3.4.2** $\vec{f}_1 = (1,0,0,0,1)$, $\vec{f}_2 = (1,-1,0,0,-1)$, $\vec{f}_3 = (-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},1,2,\frac{1}{3})$. *Указание:* вектор $\vec{f}_4$ получится при ортогонализации нулевым, т.е. $\vec{g}_4 \in \mathcal{L}(\vec{g}_1,\vec{g}_2,\vec{g}_3)$ **3.4.3** $\vec{f}_1 = 1$, $\vec{f}_2 = x - \frac{1}{2}$, $\vec{f}_3 = x^2 - x + \frac{1}{6}$, $\vec{f}_4 = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{1}{20}$. **3.4.4** $\vec{l} = (-4,-6,4,6)$, $\vec{h} = (8,2,8,2)$. **3.4.5** $d = 2/\sqrt{3}$, $\varphi = \arcsin(\sqrt{2}/3)$. **3.4.6** $d = 150$.

Глава 4

Линейные преобразования

4.1 Линейные преобразования. Определения и примеры

Определение 4.1.1. Обозначим через $\mathcal{A}(\vec{x})$ *линейное преобразование* пространства V, сопоставляющее вектору $\vec{x} \in V$ вектор $\mathcal{A}(\vec{x}) \in V$ и обладающее следующими свойствами:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{1}. & \mathcal{A}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \mathcal{A}(\vec{x}_1) + \mathcal{A}(\vec{x}_2), \\ \mathbf{2}. & \mathcal{A}(\alpha\vec{x}) = \alpha\mathcal{A}(\vec{x}). \end{array}$$

Пусть $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ — некоторый базис пространства V. Тогда для любого $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n$ вектор

$$\mathcal{A}(\vec{x}) = \mathcal{A}(x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n) = \mathcal{A}(x_1\vec{e}_1) + \cdots + \mathcal{A}(x_n\vec{e}_n) = x_1\mathcal{A}(\vec{e}_1) + \cdots + x_n\mathcal{A}(\vec{e}_n).$$

Это означает, что векторы $\mathcal{A}(\vec{e}_1), \ldots, \mathcal{A}(\vec{e}_n)$ порождают все множество значений $\mathcal{A}(\vec{x})$, $\vec{x} \in V$ и это множество значений само является векторным пространством. Разложим $\mathcal{A}(\vec{e}_1), \ldots, \mathcal{A}(\vec{e}_n)$ по базису $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$:

$$\begin{array}{c} \mathcal{A}(\vec{e}_1) = a_{11}\vec{e}_1 + \cdots + a_{n1}\vec{e}_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathcal{A}(\vec{e}_n) = a_{1n}\vec{e}_1 + \cdots + a_{nn}\vec{e}_n. \end{array}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\vec{x}) = x_1(a_{11}\vec{e}_1 + \cdots + a_{n1}\vec{e}_n) + \cdots + x_n(a_{1n}\vec{e}_1 + \cdots + a_{nn}\vec{e}_n) = \\ (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n)\vec{e}_1 + \cdots + (a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n)\vec{e}_n \end{aligned}$$

Поэтому координаты вектора $\mathcal{A}(\vec{x})$ можно получить, умножив матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

столбцы которой составлены из координат $\mathcal{A}(\vec{e}_1), \ldots, \mathcal{A}(\vec{e}_n)$ в базисе $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ на вектор-столбец $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ координат вектора $\vec{x}$ в базисе $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$, т.е. $\mathcal{A}(\vec{x}) = A\vec{x}$. Матрица A называется матрицей линейного преобразования в базисе $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$.

П р и м е р 4.1.1. Пусть $\mathcal{A}$ поворот вокруг начала координат на угол φ против часовой стрелки. Данное преобразование линейно, поскольку

- Результат останется неизменные: если мы сначала вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ сложим, а потом повернём, либо сначала вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ повернём, потом сложим (см. рис. 4.1).
- Результат останется неизменные: если мы сначала вектор $\vec{a}$ умножим на число λ, а потом повернём, либо сначала вектор $\vec{a}$ повернём, а потом умножим на число λ (см. рис. 4.2).

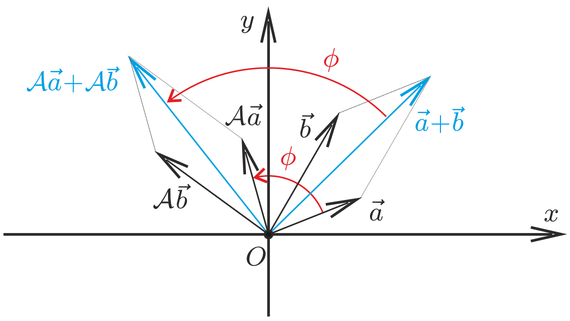


Рис. 4.1:

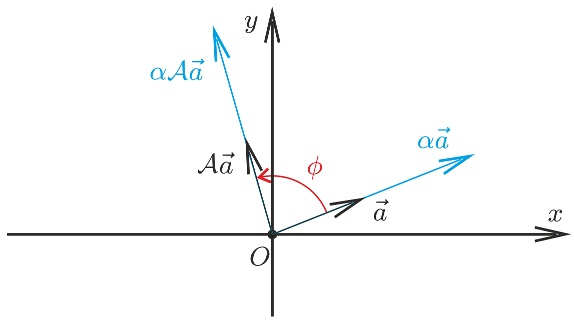


Рис. 4.2:

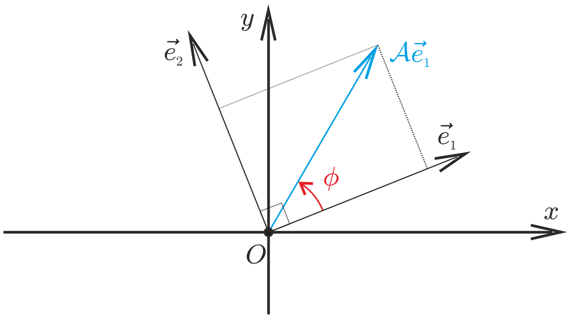


Рис. 4.3:

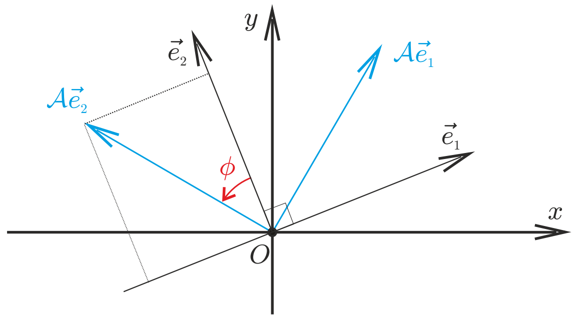


Рис. 4.4:

Найдём матрицу линейного преобразования (поворота) в предположении, что базисные вектора $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ — единичные и взаимноортогональные. Вектор $\mathcal{A}\vec{e}_1$ — единичный, образующий с $\vec{e}_1$ угол φ и с $\vec{e}_2$ угол $\pi/2-\varphi$ (см. рис. 4.3), т.е.

$$\mathcal{A}\vec{e}_1 = \cos\varphi\cdot\vec{e}_1 + \sin\varphi\cdot\vec{e}_2.$$

Аналогично (см. рис. 4.4)

$$\mathcal{A}\vec{e}_2 = -\sin\varphi\cdot\vec{e}_1 + \cos\varphi\cdot\vec{e}_2.$$

Таким образом, матрица линейного преобразования в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ принимает вид:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

П р и м е р 4.1.2. Пусть $\mathcal{P}$ — пространство всех многочленов, $\mathcal{A}$ — преобразование, которое переводит вектор из $\mathcal{P}$ (многочлен), в производную этого многочлена, которая естественно является многочленом, то есть вектором из $\mathcal{P}$. Пусть $x\in\mathcal{P}$, то есть $x = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \ldots + a_nt^n$. Тогда

$$\mathcal{A}(x) = x' = a_1 + 2a_2t + \ldots + na_nt^{n-1}.$$

Например, если $x = 1 - 3t + 5t^2 + 2t^3$, то $\mathcal{A}(x) = -3 + 10t + 6t^2$. Покажем, что преобразование $\mathcal{A}$ является линейным.

- Пусть $x, y \in \mathcal{P}$, α — число. Тогда в силу свойства линейности производной получим

$$\mathcal{A}(x+y) = (x+y)' = x' + y' = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y).$$

- Аналогично,

$$\mathcal{A}(\alpha x) = (\alpha x)' = \alpha x' = \alpha\mathcal{A}(x).$$

Следовательно, $\mathcal{A}$ — линейное преобразование.

1. Найдём матрицу этого линейного преобразования в базисе

$$\vec{e}_0 = 1, \quad \vec{e}_1 = t, \quad \vec{e}_2 = \frac{t^2}{2!}, \quad \ldots, \quad \vec{e}_n = \frac{t^n}{n!}.$$

Тогда

$$\mathcal{A}\vec{e}_0 = 0, \quad \mathcal{A}\vec{e}_1 = \vec{e}_0, \quad \mathcal{A}\vec{e}_2 = \vec{e}_1, \quad \ldots, \quad \mathcal{A}\vec{e}_n = \vec{e}_{n-1}.$$

Откуда

$$A_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

2. Найдём матрицу линейного преобразования $\mathcal{A}$ в базисе

$$\vec{f}_0 = 1, \quad \vec{f}_1 = t, \quad \vec{f}_2 = t^2, \quad \ldots, \quad \vec{f}_n = t^n.$$

Тогда

$$\mathcal{A}\vec{f}_0 = 0, \quad \mathcal{A}\vec{f}_1 = \vec{f}_0, \quad \mathcal{A}\vec{f}_2 = 2\vec{f}_1, \quad \ldots, \quad \mathcal{A}\vec{f}_n = n \cdot \vec{f}_{n-1}.$$

Откуда

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Сравнивая эти два результата о матрице преобразования мы можем сделать вывод, что матрица линейного преобразования принимает различный вид в различных базисах.

П р и м е р 4.1.3. Рассмотрим преобразование: проекция на плоскость $x + y + z = 0$.

(а) Докажите, что данное преобразование является линейным.

(б) Найдите явный координатный вид преобразования в базисе $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ и матрицы линейного преобразования в этом базисе.

Доказательство. **(а)** Равенства $\mathcal{A}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \mathcal{A}(\vec{x}_1) + \mathcal{A}(\vec{x}_2)$ и $\mathcal{A}(\lambda\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ вытекают из того, что проекция суммы векторов равна сумме проекций слагаемых и что проекция произведения вектора на число равна произведению проекции вектора на это число. Также данные формулы будут вытекаеть из формулы (4.1.1), доказанной ниже.

(б) Обозначим через (x_0, y_0, z_0) — проекцию произвольной точки (x, y, z) пространства на плоскость $x + y + z = 0$. Найдём выражение координат $P_0(x_0, y_0, z_0)$ через координаты точки (x, y, z). Для этого составим уравнение прямой, проходящей через две заданные точки:

$$\begin{cases} x = x_0 + t, \\ y = y_0 + t, \\ z = z_0 + t. \end{cases}$$

Откуда, выразив координаты точки P_0, и подставив, в уравнение плоскости $x + y + z = 0$ (точка P_0 принадлежит плоскости $x + y + z = 0$), получим

$$x_0 + y_0 + z_0 = 0 \Longleftrightarrow (x - t) + (y - t) + (z - t) = 0 \Longleftrightarrow t = \frac{x + y + z}{3}.$$

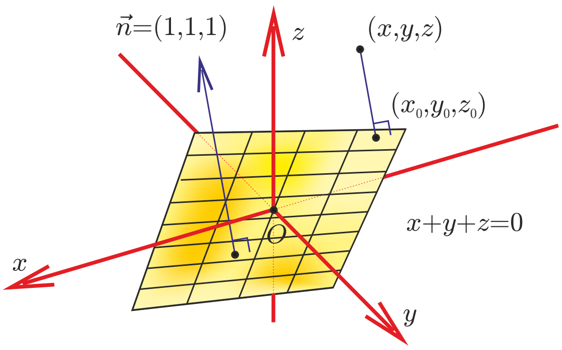


Рис. 4.5:

Следовательно

$$(x_0, y_0, z_0) = (x - t, y - t, z - t) = \left(\frac{2x - y - z}{3}, \frac{-x + 2y - z}{3}, \frac{-x - y + 2z}{3}\right).$$

Таким образом, нами доказано:

$$A(x, y, z) = \left(\frac{2x - y - z}{3}, \frac{-x + 2y - z}{3}, \frac{-x - y + 2z}{3}\right). \tag{4.1.1}$$

Поскольку

$$\mathcal{A}(\vec{e}_1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}\right),$$
$$\mathcal{A}(\vec{e}_2) = \left(\frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right),$$
$$\mathcal{A}(\vec{e}_3) = \left(\frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3}\right),$$

то матрица линейного преобразования в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

□

П р и м е р 4.1.4. Пусть V_n — n - мерное пространство. Пусть $\mathcal{A}$ — преобразование, которое переводит вектор $\vec{x}$ из V_n в вектор $\vec{x} + \vec{x}_0$, где $\vec{x}_0$ отличный от нуля вектор из V_n.

$$\mathcal{A}(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{x}_0.$$

Проверим, является ли преобразование $\mathcal{A}$ линейным?

- Пусть $\vec{x} \in V_n$, α — число, отличное от единицы. Тогда

$$\mathcal{A}(\alpha\vec{x}) = \alpha\vec{x} + \vec{x}_0 \neq \alpha(\vec{x} + \vec{x}_0) = \alpha\mathcal{A}(x),$$

  поскольку $\vec{x}_0$ отличный от нуля вектор.

Таким образом данное преобразование не является линейным.

Необходимое условие для линейности преобразования

Для любого линейного преобразования $\mathcal{A}$ образ нуля равен нулю, т.е. $\mathcal{A}(\vec{0}) = \vec{0}$.

Действительно, в силу линейности преобразования, справедливо:

$$\mathcal{A}(\vec{0}) = \mathcal{A}(0 \cdot \vec{x}) = 0 \cdot \mathcal{A}(\vec{x}) = \vec{0}.$$

П р и м е р 4.1.5. Используя, необходимое условие линейности преобразования, легко показать, что преобразование, построенное в примере 4.1.4 не является линейным. Действительно:

$$\mathcal{A}(\vec{0}) = \vec{0} + \vec{x}_0 = \vec{x}_0 \neq \vec{0},$$

поскольку $\vec{x}_0$ отличный от нуля вектор. Таким образом данное преобразование не является линейным.

4.1.1 Переход к другому базису

В предыдущем разделе мы установили, что как только в линейном пространстве выбран базис, то каждому линейному преобразованию соответствует матрица этого преобразования. Однако если выбрать в пространстве другой базис, то матрица преобразования, как правило, станет другой (см., пример 4.1.2). Выясним, как эти матрицы связаны между собой. Пусть V — n -мерное линейное пространство, $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ и $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$ — два базиса в этом пространстве. Первый из них назовем 'старым', а второй — 'новым' , причём

$$\vec{f}_1 = c_{11}\vec{e}_1 + \cdots + c_{n1}\vec{e}_n,$$
$$\ldots$$
$$\vec{f}_n = c_{1n}\vec{e}_1 + \cdots + c_{nn}\vec{e}_n.$$

Пусть $C = C_{e \to f}$ — матрица перехода от старого базиса к новому, т.е.

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 4.1.17. *Пусть $\mathcal{A}$ — линейное преобразование пространства V, A и A' — матрицы этого преобразования в старом и новом базисе соответственно. Тогда $A' = C^{-1}AC$.*

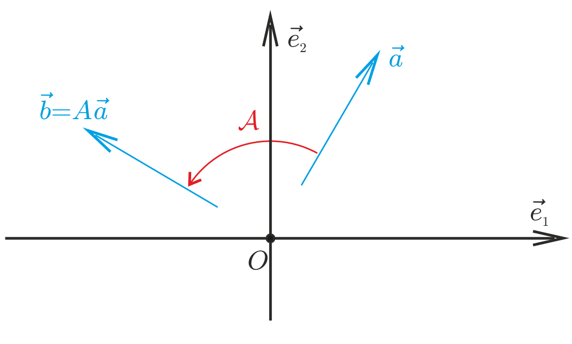


Рис. 4.6:

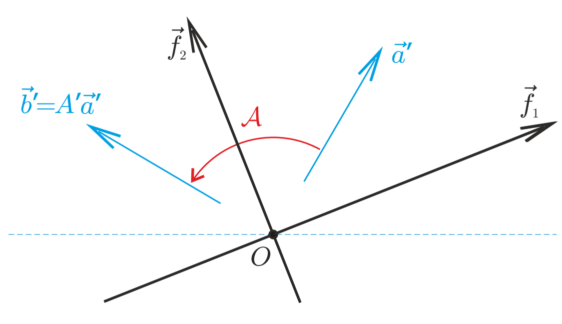


Рис. 4.7:

Доказательство. Пусть $\vec{x}$ — произвольный вектор пространства V. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — координатные столбцы векторов $\vec{x}$ и $\mathcal{A}(\vec{x})$ в старом базисе, а $\vec{a}'$, $\vec{b}'$ — в новом. Тогда

$$\vec{b} = A\vec{a}, \quad \vec{b}' = A'\vec{a}'.$$

По формуле перехода к другому базису имеем $\vec{a} = C\vec{a}'$, $\vec{b} = C\vec{b}'$. Подставим эти выражения в предыдущую формулу, получаем $C\vec{b}' = A(C\vec{a}')$. Откуда $\vec{b}' = (C^{-1}AC)\vec{a}'$. Сравнивая это равенство с $\vec{b}' = A'\vec{a}'$, получаем $A' = C^{-1}AC$. □

Определение 4.1.2. Две квадратных матрицы P и Q одного порядка называются *подобными*, если существует такая невырожденная матрица C, что $P = C^{-1}QC$.

Следствие 4.1.1. Матрицы одного линейного преобразования, соответствующие разным базисам, подобны друг другу, и наоборот, если матрицы подобны, то они являются матрицами одного и того же преобразования в разных базисах.

Ранг преобразования $\mathcal{A}$ — размерность пространства $\mathcal{A}(\vec{x})$, $\vec{x} \in V$. Пусть $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ — произвольный базис V, A — матрица $\mathcal{A}$ в этом базисе. Можно доказать, что ранг $\mathcal{A}$ равен rgA. Если ранг преобразования равен n — размерности V, то преобразование называется *невырожденным.* Такое преобразование переводит один базис пространства в другой базис.

Если A — матрица $\mathcal{A}$ в базисе $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$, A' —матрица в базисе $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$ и $\vec{f}_i = c_{1i}\vec{e}_1 + \cdots + c_{ni}\vec{e}_i$, то $A' = C^{-1}AC$ (это равенство оставим без доказательства).

Контрольные вопросы.

1. Какие из преобразований являются линейными в $\mathbb{R}^1$: $f : x \to 3x$, $g : x \to 2x + 3$, $h : x \to x^2$?

Упражнения к 4.1

Упражнение 4.1.1. *Молекула метана может быть описана в декартовой системе координат (в ангстрем[1]) следующем виде:*

$$
\begin{aligned}
&C(0.000000,\ 0.000000,\ 0.000000);\\
&H_1 = d \cdot (0,\ 0,\ 1) \approx (0.000000,\ 0.000000,\ 1.089000);\\
&H_2 = d \cdot (\sin\alpha,\ 0,\ \cos\alpha) \approx (1.026719,\ 0.000000,\ -0.363000);\\
&H_3 = d \cdot (\sin\alpha \cdot \cos(2\pi/3),\ -\cos\alpha \cdot \sin(2\pi/3),\ \cos\alpha) \approx (-.513360,\ -0.889165,\ -0.363000);\\
&H_4 = d \cdot (\sin\alpha \cdot \cos(2\pi/3),\ \cos\alpha \cdot \sin(2\pi/3),\ \cos\alpha) \approx (-.513360,\ 0.889165,\ -0.363000),
\end{aligned}
$$

где $d = 1.08900$, $\alpha = 109.4710^\circ$. *Здесь индексы у атомов водорода обозначают лишь нумерацию атомов. Даны следу-*

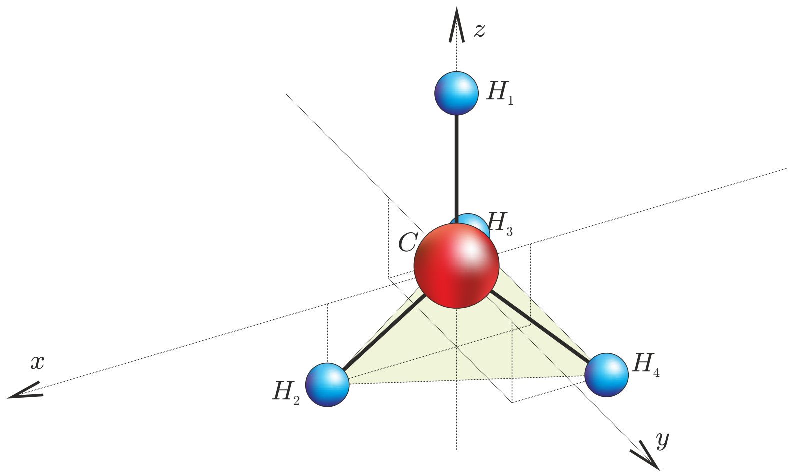


Рис. 4.8:

ющие отображения в пространстве: $\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$*:*

- f — *поворот на угол* 120° *против часовой стрелки (если смотреть с положительных значений на оси* Oz*) в плоскости* Oxy *относительно начала координат;*
- g — *симметрия относительно плоскости* Ozy.

(a) *Является ли каждое из отображений* f, g *линейным?*

[1] Ангстрем являются единицей длины, равной (одна десятимиллионная метра)

(b) *Нарисуйте образ молекулы метана относительно отображений f, g и композиций отображений fg, gf и задайте их координаты аналитически.*

(c) *Запишите матрицы отображений f, g, fg, gf в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^3$.*

Упражнение 4.1.2. *Даны следующие отображения на плоскости: $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$:*

- *f — поворот на угол 45° против часовой стрелки относительно начала координат;*
- *g — симметрия относительно прямой $y = -x$;*
- *h — растяжение вдоль оси y в 10 раз (т.е. такое отображение, при котором координата y любого вектора увеличивается в 10 раз, а координата x не меняется).*

(a) *Является ли каждое из отображений f, g, h линейным?*

(b) *Нарисуйте на плоскости образы прямых $y = x$, $y = -x$, $y = x/2$, $y = 0$, $y = 1$, $x = 0$, $x = -1$ относительно отображений f, g, h и композиций отображений fg, gf, fh, hf и задайте их аналитически.*

(c) *Запишите матрицы отображений f, g, h, fg, gf, fh, hf, gh в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^2$.*

(d) *Найдите образ окружности $x^2 + y^2 = 4$ относительно действия отображений fg, gf, fgh.*

Ответы: 4.1.1 (a) да, все линейные; (b) под действием f атомы и H_1 переходят в себя, а атомы H_2 в H_4, H_4 в H_3, H_3 в H_2, под действием g атомы и H_1 переходят в себя, у атомов H_2, H_3, H_4 меняются координаты при x на противоположные, образы под действием fg и gf одинаковые атом останется на месте, H_1 изменит координату z, атомы H_2, H_3, H_4 перейдут в положение, которое отличается обратным знаком по переменной x от H_4, H_3, H_2 соответственно; (c) $A_f = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_g = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_{fg} = A_f \cdot A_g = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_{gf} = A_g \cdot A_f = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **4.1.2** (a) да, все линейные; (b) под действием f прямая $y = x$ переходит в $x = 0$, $y = -x$ переходит в $y = 0$, $y = x/2$ переходит в $y = 3x$, $y = 0$ переходит в $y = x$, $y = 1$ переходит в $y = x + \sqrt{2}$, $x = 0$ переходит в $y = -x$, $x = -1$ переходит в $x + y = -\sqrt{2}$; под действием g прямая $y = x$ переходит в себя, $y = -x$ переходит в себя, $y = x/2$ переходит в $y = 2x$, $y = 0$ переходит в $x = 0$, $y = 1$ переходит в $x = -1$, $x = 0$ переходит в $y = 0$, $x = -1$ переходит в $y = 1$; под действием h прямая $y = x$ переходит в $y = 10x$, $y = -x$ переходит в $y = -10x$, $y = x/2$ переходит в $y = 5x$, $y = 0$ переходит в себя, $y = 1$ переходит в $y = 10$, $x = 0$ переходит в себя, $x = -1$ переходит в себя; под действием fg прямая $y = x$ переходит в $x = 0$, $y = -x$ переходит в $y = 0$, $y = x/2$ переходит в $y = -3x$, $y = 0$ переходит в $y = -x$, $y = 1$ переходит в $x + y = -\sqrt{2}$, $x = 0$ переходит в $y = x$, $x = -1$ переходит в $y = x + \sqrt{2}$; под действием gh прямая $y = x$ переходит в $y = 0$, $y = -x$ переходит в $x = 0$, $y = x/2$ переходит в $y = x/3$, $y = 0$ переходит в $y = x$, $y = 1$ переходит в $y = x + \sqrt{2}$, $x = 0$ переходит в $y = -x$, $x = -1$ переходит в $y + x = \sqrt{2}$; под действием fh прямая $y = x$ переходит в $y = -11x/9$, $y = -x$ переходит в $y = -9x/11$, $y = x/2$ переходит в $y = -3x/2$, $y = 0$ переходит в $y = x$, $y = 1$ переходит в $y = x + \sqrt{10}$, $x = 0$ переходит в $y = -x$, $x = -1$ переходит в $y + x = -\sqrt{2}$; под действием hf прямая $y = x$ переходит в $x = 0$, $y = -x$ переходит в $y = 0$, $y = x/2$ переходит в $y = 30x$, $y = 0$ переходит в $y = 10x$, $y = 1$ переходит в $y = 10(x + \sqrt{2})$, $x = 0$ переходит в $y = -10x$, $x = -1$ переходит в $y = -10(x + \sqrt{2})$; (c) $A_f = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $A_g = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$, $A_{fg} = A_f \cdot A_g = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $A_{gf} = A_g \cdot A_f = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $A_{fh} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{10}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{10}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $A_{hf} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{10}{\sqrt{2}} & \frac{10}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $A_{gh} = A_g \cdot A_h = \begin{pmatrix} 0 & -10 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. (d) образ окружности $x^2 + y^2 = 4$ относительно действия отображений fg, gf — будет та жа окружность, а образ относительно fgh будет эллипс $13x^2 + 12xy + 13y^2 = 50$.

4.2 Собственные числа, собственные значения

Пусть $\mathcal{A}$ — линейное преобразование пространства V.

Определение 4.2.1. Пусть существует такой вектор $\vec{x} \neq \vec{0}$, что для некоторого числа λ выполняется равенство $\mathcal{A}(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$. Тогда это λ называется *собственным* числом $\mathcal{A}$, вектор $\vec{x}$ — *собственным* вектором, соответствующим числу λ.

Теорема 4.2.18. *Множество собственных векторов, соответствующих одному и тому же числу, образует векторное пространство.*

Доказательство. Очевидно, что для любого α выполнено $\mathcal{A}(\alpha\vec{x}) = \alpha\mathcal{A}(\vec{x}) = \alpha\lambda\vec{x} = \lambda(\alpha\vec{x})$ кроме того, если $\vec{x_1}, \vec{x_2}$ — собственные векторы, то $\mathcal{A}(\vec{x_1}+\vec{x_2}) = \mathcal{A}(\vec{x_1}) + \mathcal{A}(\vec{x_2}) = \lambda\vec{x_1} + \lambda\vec{x_2} = \lambda(\vec{x_1}+\vec{x_2})$. Итак, $\alpha\vec{x}$ и $\vec{x_1}+\vec{x_2}$ — снова собственные векторы, соответствующие тому же самому значению λ. □

Пусть $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ — базис и A — матрица преобразования $\mathcal{A}$ в этом базисе. Как искать собственные числа и собственные векторы? Равенство $\mathcal{A}(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ равносильно равенству $A(\vec{x}) = \lambda E\vec{x}$ или $(A-\lambda E)\vec{x} = \vec{0}$. Так как, по определению, $\vec{x} \neq \vec{0}$, это означает, что система $(A-\lambda E)\vec{x} = \vec{0}$ имеет отличное от нуля решение. Значит $|(A-\lambda E)| = 0$. Это уравнение имеет вид

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение $\chi(\lambda) = 0$ называют *характеристическим* уравнением.

Независимость характеристического уравнения от базиса вытекает из равенств

$$|A' - \lambda E| = |C^{-1}AC - \lambda C^{-1}EC| = |C^{-1}| \cdot |A - \lambda E| \cdot |C| = |A - \lambda E|.$$

Оно позволяет найти собственные числа λ. Затем система $(A-\lambda E)\vec{x} = \vec{0}$ дает соответствующие собственные векторы.

П р и м е р 4.2.1. Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Характеристическое уравнение:

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскроем определитель:

$$(1-\lambda)(3-\lambda) - 0 \cdot 1 = 0, \quad (1-\lambda)(3-\lambda) = 0,$$

откуда $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$. Итак, собственые числа — это $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 3$.

- Найдем собственные векторы, соответствующие $\lambda_1 = 1$. Урвавнение $(A - 1 \cdot E)\vec{x} = \vec{0}$ запишем в виде системы

$$\begin{cases} 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0, \\ 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = 0, \end{cases}$$

  или $x_1 = -2x_2$. Собственные векторы

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

  Все они пропорциональны вектору $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Найдем собственные векторы, соответствующие $\lambda_2 = 3$. Уравнение $(A - 3 \cdot E)\vec{x} = \vec{0}$ запишем в виде системы

$$\begin{cases} -2 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0, \\ 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0, \end{cases}$$

  или $x_1 = 0$, x_2 — произвольное, отличное от нуля. Собственные векторы

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

  Все они пропорциональны вектору $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Таким образом вектор $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ соответствует собственному числу $\lambda_1 = 1$, а вектор $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ соответствует собственному числу $\lambda_2 = 3$. Заметим, что вектора $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ линейно независимы. Матрица перехода от канонического базиса $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ к базису $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, имеет вид $C = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ обратная матрица $C^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. Исходное линейное преобразование в базисе из собственных веторов будет иметь вид:

$$A' = C^{-1}AC = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Теорема 4.2.19. *Если $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ — собственные векторы, соответствующие различным собственным числам $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, то эти векторы линейно независимы.*

Доказательство. Используем метод математической индукции. При $k = 1$, по определению собственного вектора $\vec{x}_1 \neq 0$. Предположим, что $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{l-1}$ — линейно независимые векторы и пусть

$$c_1\vec{x}_1 + \dots + c_{l-1}\vec{x}_{l-1} + c_l\vec{x}_l = \vec{0}. \tag{4.2.2}$$

Требуется доказать, что $c_1 = c_2 = \dots = c_{l-1} = c_l = 0$ (это и будет означать линейную независимость векторов $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_l$). Для этого применим преобразование $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A}(c_1\vec{x}_1 + \dots + c_{l-1}\vec{x}_{l-1} + c_l\vec{x}_l) = \mathcal{A}(\vec{0}) = \vec{0}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}(c_1\vec{x}_1) + \dots + \mathcal{A}(c_{l-1}\vec{x}_{l-1}) + \mathcal{A}(c_l\vec{x}_l) = \vec{0}, \quad \Longrightarrow \\ &c_1\mathcal{A}(\vec{x}_1) + \dots + c_{l-1}\mathcal{A}(\vec{x}_{l-1}) + c_l\mathcal{A}(\vec{x}_l) = \vec{0}, \quad \Longrightarrow \\ &\lambda_1 c_1\vec{x}_1 + \dots + \lambda_{l-1}c_{l-1}\vec{x}_{l-1} + \lambda_l c_l\vec{x}_l = \vec{0}. \end{aligned}$$

Кроме того, из (4.2.2) получаем, умножая на λ_l,

$$\lambda_l c_1\vec{x}_1 + \dots + \lambda_l c_{l-1}\vec{x}_{l-1} + \lambda_l c_l\vec{x}_l = \vec{0}.$$

Вычитая из первого из этих равенств второе, получаем

$$(\lambda_1 - \lambda_l)c_1\vec{x}_1 + \dots + (\lambda_{l-1} - \lambda_l)c_{l-1}\vec{x}_{l-1} = \vec{0}.$$

Поскльку, по индуктивному предположению, векторы $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{l-1}$ линейно независимы,

$$(\lambda_1 - \lambda_l)c_1 = 0, \dots, (\lambda_{l-1} - \lambda_l)c_{l-1} = 0.$$

Но, по условию, $\lambda_1 - \lambda_l \neq 0, \dots, \lambda_{l-1} - \lambda_l \neq 0$. Поэтому $c_1 = 0, \dots, c_{l-1} = 0$. Но тогда $c_l\vec{x}_l = \vec{0}$ и $c_l = 0$, так как $\vec{x}_l \neq 0$ по определению собственного вектора.

Пусть $\mathcal{A}$ имеет n различных собственных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Тогда собственные векторы, соответствующие этим числам линейно независимы и, значит, образуют базис. В этом базисе матрица A линейного преобразования имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

□

4.2.1 Жорданова форма матрицы линейного преобразования в комплексном пространстве

Алгебраическая и геометрическая кратность собственного значения. Пусть линейный оператор A действует в линейном пространстве $\mathbb{R}^n$ над числовым полем $\mathbb{K}$ (мы будем рассматривать либо поле действиетльных чисел $\mathbb{R}$, либо поле комплексных чисел $\mathbb{C}$). Предположим, что все корни характеристического многочлена принадлежат полю $\mathbb{K}$. Рассмотрим характеристический многочлен оператора

$$\chi(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1}(\lambda_2 - \lambda)^{m_2} \dots (\lambda_p - \lambda)^{m_p},$$

где $\lambda_k \neq \lambda_j$ при $k \neq j$, $k, j = 1, 2, \dots, p$. Здесь

$$m_1 + m_2 + \dots + m_p = n.$$

Определение 4.2.2. Число m_k называется *алгебраической кратностью* собственного значения λ_k. Максимальное число линейно независимых собственных векторов, соответствующих собственному значению λ_k, называется его *геометрической кратностью* и обозначается s_k.

Лемма 6. *Геометрическая кратность собственного числа всегда меньше либо равна алгебраической кратности* $s_k \leqslant m_k$.

П р и м е р 4.2.2. Линейное преобразование в каноническом базисе пространства $\mathbb{R}^3$, заданно при помощи матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Найдите ортонормированный базис в котором матрица линейного преобразования примет Жорданов вид.

Доказательство. Составим характеристическое уравнение для матрицы квадратичной формы

$$\chi(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -5-\lambda & -3 \\ -1 & -3 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Решив уравнение третьей степени $-\lambda^3 - 13\lambda^2 - 44\lambda - 32 = 0$, находим

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -4, \quad \lambda_3 = -8.$$

Найдём собственные вектора, отвечающие собственым числам.

1. Пусть $\lambda_1 = -1$. Тогда уравнение $(A - \lambda_1 \cdot E)\vec{x} = \vec{0}$ принимает вид:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & -3 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0}.$$

Преобразуем данную систему при помощи метода Гаусса

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & -3 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 + \vec{a}_2 \\ \vec{a}_1 + \vec{a}_2 - \vec{a}_3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 0 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2/(-7) \\ \vec{a}_3 \end{matrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{a}_1 + 4\vec{a}_2 \\ \vec{a}_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, уравнение на нахождение собственного вектора принимает вид:

$$\begin{cases} x_1 + \quad x_3 = 0 \\ \quad x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Откуда все вектора вида $c \cdot (1, 1, -1)$, $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ будут собственными для собственного числа $\lambda_1 = -1$. Возьмём нормированный: $\vec{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

2. Пусть $\lambda_2 = -4$. Тогда уравнение $(A - \lambda_2 \cdot E)\vec{x} = \vec{0}$ принимает вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0}.$$

Преобразуем данную систему при помощи метода Гаусса

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 - \vec{a}_1 \\ \vec{a}_3 + \vec{a}_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2/(-2) \\ \vec{a}_3 - \vec{a}_2 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{a}_1 - \vec{a}_2 \\ \vec{a}_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, уравнение на нахождение собственного вектора принимает вид:

$$\begin{cases} x_1 - \quad 2x_3 = 0 \\ \quad x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Откуда все вектора вида $c \cdot (2, -1, 1)$, $c \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ будут собственными для собственного числа $\lambda_2 = -4$. Возьмём нормированный: $\vec{e}_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

3. Пусть $\lambda_3 = -8$. Тогда уравнение $(A - \lambda_3 \cdot E)\vec{x} = \vec{0}$ принимает вид:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0}.$$

Преобразуем данную систему при помощи метода Гаусса

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{a}_2 \\ \vec{a}_1 - 5\vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 + \vec{a}_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & -14 & 14 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2/(-14) \\ \vec{a}_3 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{a}_1 - 3\vec{a}_2 \\ \vec{a}_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, уравнение на нахождение собственного вектора принимает вид:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ \quad x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Откуда все вектора вида $c \cdot (0, 1, 1)$, $c \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ будут собственными для собственного числа $\lambda_3 = -8$. Возьмём нормированный: $\vec{e}_3 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Таким образом Жорданов вид линейного преобразования $\mathcal{A}$ будет иметь вид:

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

в ортонормированном базисе $\vec{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\vec{e}_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\vec{e}_3 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Действительно, можно проверить, что для матрицы перехода[2]

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \implies C^{-1} = C^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

а также $C^{-1}AC = J$. □

[2]Заметим, что поскольку матрица C получена из ортонормированного базиса, то она ортогональна, т.е. $C^{-1} = C^T$.

П р и м е р 4.2.3. Найдите собственные числа и собственные вектора оператора $T: X \mapsto X^T$, где $X \in M_3$ — пространство матриц порядка 3×3, X^T — транспонированная матрица.

Доказательство. Для удобства каждой матрице $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ мы будем сопоставлять вектор-столбец $\vec{a} = (a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33})^T$. Тогда матрице A будет соответствовать матрица A^T или вектор столбец $\vec{a}_T = (a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{12}, a_{22}, a_{32}, a_{13}, a_{23}, a_{33})^T$. Выберем в качестве базиса вектора $\vec{e}_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, где единица стоит на k-ом месте. В базисе $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_9$ матрица преобразования T принимает вид:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)$$

Найдём собственные значения. Для этого рассмотрим уравнение $T - \lambda E = 0$:

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\lambda & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 1 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 1 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\lambda & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda
\end{array}\right| = 0.$$

Для того, чтобы вычислить данный определитель удобно поменять местами третий и четвёртый столбец, затем третью и четвёртую строку. Потом поменяем местами шестой и седьмой столбец, затем шестую и седьмую строку. В итоге получили:

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda
\end{array}\right| = (1-\lambda)^3(\lambda^2-1)^3 = (1-\lambda)^6(\lambda+1)^3 = 0.$$

Откуда $\lambda_{1,2,3,4,5,6} = 1$, $\lambda_{7,8,9} = -1$. Найдём собственные вектора. Предлагаем читателю, в качестве упражнения найти их самостоятельно (это будет прекрасным упражнением). Выпишем собственные вектора. Собственному значению $\lambda_{1,2,3,4,5,6} = 1$ отвечают шесть собственных векторов (т.е. шесть матриц):

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Собственному значению $\lambda_{7,8,9} = -1$ отвечают три собственных вектора (т.е. три матрицы)

$$E_7 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Несколько слов о Жордановой форме линейного преобразования.

$$\begin{pmatrix} \boxed{J_1} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \ \boxed{J_2} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{J_3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{J_1} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \ \boxed{J_2} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\ddots} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \qquad \boxed{J_3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{J(1)} & & & \\ & \boxed{J(2)} & & \\ & & \dots & \\ & & & \boxed{J(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

4.2.2 Вещественный аналог Жордановой формы матрицы линейного преобразования

Пусть матрица $A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ имеет жорданову клетку $J_q(\lambda_j)$ порядка q для комплексного собственного значения $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ с мнимой частью $\beta_j \neq 0$. Следовательно существует жорданова цепочка:

$$\begin{cases} Ae_1 & = \lambda_j e_1, \\ Ae_2 & = \lambda_j e_2 + e_1, \\ Ae_3 & = \lambda_j e_3 + e_2, \\ \dots & \\ Ae_q & = \lambda_j e_q + e_{q-1} \end{cases}$$

Представим e_j в виде $e_j = x_j + iy_j$, где x_j, $y_j \in \mathbb{R}^n$. Тогда справедливо

$$A[x_1, y_1, \dots, x_q, y_q] = [x_1, y_1, \dots, x_q, y_q] M_{2q},$$

где

$$M_{2q} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 & 0 & & & & \\ -\beta & \alpha & 0 & 1 & & & & \\ & & \alpha & \beta & 1 & 0 & & \\ & & -\beta & \alpha & 0 & 1 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & \alpha & \beta & 1 & 0 \\ & & & & -\beta & \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Линейная оболочка $\mathcal{L}(x_1, y_1, \ldots, x_q, y_q) \subset \mathbb{R}^n$ является инвариантным подпространством размерности $2q$, совпадающим с прямой суммой двух подпространств — корневого пространства матрицы для собственного значения $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ и корневого пространства для сопряженного собственного значения $\overline{\lambda}_j = \alpha_j - i\beta_j$ (в силу вещественности коэффициентов характеристического многочлена, λ_j и $\overline{\lambda}_j$ оба являются собственными значениями матрицы одинаковой кратности). Из сказанного вытекает

Теорема 4.2.20. *Любая матрица $A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ с помощью вещественного преобразования подобия приводится к прямой сумме вещественных жордановых блоков и вещественных блоков вида M_{2q}.*

Контрольные вопросы.

1. Сформулируйте необходимые и достаточные условия для существования обратной матрицы к заданной матрицы размера 3×3.
2. Выпишите все возможные виды жордановой формы оператора у которого собственные значения равны $\lambda_{1,2} = 2$, $\lambda_3 = 5$.
3. Выпишите все возможные виды жордановой формы оператора у которого собственные значения равны $\lambda_{1,2,3} = \pi$.

Упражнения к 4.2

Упражнение 4.2.1. *Известно, что для матрицы $A_{3\times 3}$ характеристический многочлен имеет вид*

$$\chi(\lambda) = -\lambda^3 + 7\lambda + 1.$$

Диагонализируема ли матрица A над полем действительных чисел? Получите ответ не вычисляя характеристические корни.

Упражнение 4.2.2. *Известно, что матрица $A_{3\times 3}$ невырождена. Докажите, что*

1. λ^{-1} *собственное число матрицы A^{-1}.*

2. *Алгебраическая кратность λ собственного числа матрицы A совпадает с алгебраическая кратность λ^{-1} собственного числа матрицы A^{-1}.*

3. *Геометрическая кратность λ собственного числа матрицы A совпадает с геометрическая кратность λ^{-1} собственного числа матрицы A^{-1}.*

Упражнение 4.2.3. *Известно, что матрица A обладает свойством $A^2 = \mu \cdot A$, $\mu \in \mathbb{R}$. Для всех ли таких матриц справедливо:*

1. $\lambda = \mu$ *собственное число матрицы A.*

2. *Матрица A может иметь собственные числа, отличные от μ.*

3. *Матрица $B = E - \mu A$ удовлетворяет уравнению: $B^2 = \mu \cdot B$ (такому же как и матрица A).*

Упражнение 4.2.4. *Рассмотрим отображения, заданные в примере 4.1.2, т.е. отображения на плоскости: $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$:*

- *f — поворот на угол 45° против часовой стрелки относительно начала координат;*
- *g — симметрия относительно прямой $y = -x$;*
- *h — растяжение вдоль оси y в 10 раз (т.е. такое отображение, при котором координата y любого вектора увеличивается в 10 раз, а координата x не меняется).*

(a) *Для каждого отображения $\rho \in \{f, g, h, fg, fh, gh\}$ найдите собственные вектора, отображения ρ или докажите их отсутствие.*

(b) *Для тех отображений ρ, для которых существует два линейно-независимых вектора, отвечающих условиям предыдущего пункта, запишите действие отображения ρ в базисе, составленном из этих векторов.*

Упражнение 4.2.5. *Линейные операторы на пространстве $\mathbb{R}^3$, заданны следующими матрицами:*

$$A_1 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 0 & -6 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -27 & 0 \\ 0 & 0 & -27 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдите минимальный и характеристический многочлены, собственные числа и векторы каждой из этих матриц, Найдите все инвариантные подпространства при действии каждого оператора.

Упражнение 4.2.6. *Найдите собственные значения и собственные векторы над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ линейных операторов на пространстве $\mathbb{R}^3$, заданных следующими матрицами:*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 8 & -8 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -4 & -8 & 0 \\ 8 & 12 & 0 \\ 10 & -5 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -4 & 6 & -8 \\ -3 & 6 & -8 \end{pmatrix}.$$

Для собственных чисел укажите их геометрическую и алгебраическую кратность.

Упражнение 4.2.7. *Найдите собственные значения, собственные и присоединённые вектора над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ линейных операторов на пространстве $\mathbb{R}^3$, заданных следующими матрицами:*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 9 \\ 3 & -5 & 9 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 8 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 9 & -4 & 3 \\ -9 & 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -6 \\ 4 & 0 & 4 \\ 8 & 4 & -10 \end{pmatrix}.$$

Для собственных чисел укажите их геометрическую и алгебраическую кратность. Найдите Жорданову нормальную форму и матрицу перехода к ней.

Упражнение 4.2.8. *Найдите собственные векторы и собственные значения*

(a) *оператора дифференцирования в пространстве $\mathbb{R}_n[x]$ — алгебраических многочленов, степени не выче, чем n;*

(b) *оператора $X \mapsto X^T$ в пространстве $M_n(R)$ — всех матриц порядка n;*

(c) *оператора $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$ в пространстве $\mathbb{R}_n[x]$;*

(d) *оператора $D^n : f \mapsto \frac{d^n f}{dx^n}$ в пространстве, порождённым векторами $\{1, \cos x, \sin x, \dots, \cos mx, \sin mx\}$.*

Ответы: 4.2.1 *Указание:* докажите, что существуют значения $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4$ такие, что $\operatorname{sign}(\lambda_k) = (-1)^k$, $k = 1, 2, 3, 4$. **4.2.2** . **4.2.3** везде ответ да. **4.2.4** **(a)** для f нет собственных векторов; для отображения g вектор $\vec{e}_1 = (1; 1)$ переходит в $-\vec{e}_1$, $\vec{e}_2 = (1; -1)$ переходит в $\vec{e}_2$, т.е. вектора $\vec{e}_{1,2}$ — собственные; для отображения h вектор $\vec{e}_1 = (0; 1)$ переходит в $10\vec{e}_1$, $\vec{e}_2 = (1; 0)$ переходит в $\vec{e}_2$, т.е. вектора $\vec{e}_{1,2}$ — собственные; для отображения fg, положим $\varphi = 22,5^\circ$ вектор $\vec{e}_1 = (\cos\varphi; -\sin\varphi)$ переходит в $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2 = (-\cos\varphi; \sin\varphi)$ переходит в $\vec{e}_2$, т.е. вектора $\vec{e}_{1,2}$ — собственные; для отображения fh матрица отображения $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{10}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{10}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ собственные числа $\lambda_\pm = \frac{11 \pm \sqrt{41}}{2\sqrt{2}}$, для λ_- собственный вектор $\vec{e}_1 = (9 + \sqrt{41}; -2)$, для λ_+ собственный вектор $\vec{e}_2 = (9 - \sqrt{41}; -2)$; для отображения gh матрица отображения $\begin{pmatrix} 0 & -10 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ собственные числа $\lambda_\pm = \pm\sqrt{10}$, для λ_+ собственный вектор $\vec{e}_1 = (\sqrt{10}; -1)$, для λ_- собственный вектор $\vec{e}_2 = (\sqrt{41}; 1)$. **(b)** для f нет собственных векторов; для отображения g в базисе $\vec{e}_1 = (1; 1)$, $\vec{e}_2 = (1; -1)$ матрица отображения $A'_g = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; для отображения h в базисе $\vec{e}_1 = (0; 1)$, $\vec{e}_2 = (1; 0)$ матрица отображения $A'_h = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; для отображения fg в базисе ($\varphi = 22,5^\circ$) $\vec{e}_1 = (\cos\varphi; -\sin\varphi)$,$\vec{e}_2 = (-\cos\varphi; \sin\varphi)$ матрица отображения $A'_{fg} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; для отображения fh в базисе $\vec{e}_1 = (9 + \sqrt{41}; -2)$, $\vec{e}_2 = (9 - \sqrt{41}; -2)$ матрица отображения $A'_{fg} = \begin{pmatrix} \frac{11-\sqrt{41}}{2\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{11+\sqrt{41}}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$; для отображения gh в базисе $\vec{e}_1 = (\sqrt{10}; -1)$, $\vec{e}_2 = (\sqrt{10}; 1)$ матрица отображения $A'_{gh} = \begin{pmatrix} \sqrt{10} & 0 \\ 0 & -\sqrt{10} \end{pmatrix}$. **4.2.5 Для** A_1**:** характеристический многочлен $\chi(\lambda) = (-7 - \lambda)(-2 - \lambda)(1 - \lambda)$ совпадает с минимальным (поскольку все корни характеристического многочлена совпадают с минимальным), т.е. $\varphi(\lambda) = (\lambda + 7)(\lambda + 2)(\lambda - 1)$. Собственные числа и собственные вектора $\lambda_1 = -7$, $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$; $\lambda_2 = -7$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$; $\lambda_3 = 1$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$. Инвариантные подпространства: $\mathcal{L} < \vec{e}_1 >$, $\mathcal{L} < \vec{e}_2 >$, $\mathcal{L} < \vec{e}_3 >$, $\mathcal{L} < \vec{e}_1, \vec{e}_2 >$, $\mathcal{L} < \vec{e}_1, \vec{e}_3 >$, $\mathcal{L} < \vec{e}_2, \vec{e}_3 >$, нулевое подпространство и $\mathbb{R}^3$. **Для** A_2**:** характеристический многочлен $\chi(\lambda) = (-6 - \lambda)^3$. Минимальный $\varphi(\lambda) = 6 + \lambda$. Собственные числа и собственные вектора $\lambda_{1,2,3} = -6$, $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$. Инвариантные подпространства будут любые одномерные и двумерные подпространства, нулевое подпространство и $\mathbb{R}^3$. **Для** A_3**:** характеристический многочлен $\chi(\lambda) = (6 - \lambda)(6 + \lambda)^2$. Минимальный $\varphi(\lambda) = \lambda^2 - 6^2$. Собственные числа и собственные вектора $\lambda_1 = 6$, $\vec{e}_1 = (-1; 0; 1)$; $\lambda_{2,3} = -6$, то $\vec{e}_2 = (1, 0, 1)$, $\vec{e}_3 = (0, 1, 0)$. Инвариантные подпространства будут $\mathcal{L} < \vec{e}_1 >$, $\mathcal{L} < \vec{e}_2, \vec{e}_3 >$, нулевое подпространство и $\mathbb{R}^3$. **Для** A_4**:** характеристический многочлен $\chi(\lambda) = -\lambda^3$. Минимальный $\varphi(\lambda) = \lambda^3$. Собственные числа и собственные вектора $\lambda_{1,2,3} = 0$, $\vec{e}_1 = (1; 0; 0)$. Инвариантные подпространства будут $\mathcal{L} < \vec{e}_1 >$, $\mathcal{L} < (0, 1, 0), (0, 0, 1) >$, нулевое подпространство и $\mathbb{R}^3$. **4.2.6 Для** A_1**:** собственные числа $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2 + \sqrt{3}i$, $\lambda_3 = 2 - \sqrt{3}i$, собственные вектора $\vec{e}_1 = (-1; 1; 4)$, $\vec{e}_2 = ((1 - \sqrt{3}i)/4; 1; 2 + \sqrt{3}i)$, $\vec{e}_3 = ((1 + \sqrt{3}i)/4; 1; 2 - \sqrt{3}i)$. Геометрическая и алгебраическая кратность всех собственных чисел равна 1; **Для** A_2**:** собственные числа $\lambda_{1,2,3} = 4$, собственный вектор $\vec{e}_1 = (0; 0; 1)$. Геометрическая кратность собственного числа $\lambda = 4$ равна 1, алгебраическая кратность равна 3; **Для** A_3**:** собственные числа $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -i$, собственные вектора $\vec{e}_1 = (0; 1; 1)$, $\vec{e}_2 = (-i; 4; 3)$, $\vec{e}_3 = (i; 4; 3)$. Геометрическая и алгебраическая кратность всех собственных чисел равна 1. **4.2.7 Для** A_1**:** собственные числа $\lambda_{1,2,3}=1$, собственные вектора $\vec{e}_1=(3;3;1)$, $\vec{e}_3=(2;1;0)$ присоединённый вектор $\vec{e}_3=(1;0;0)$. Геометрическая кратность $\lambda=1$ равна 2 и алгебраическая кратность собственного числа $\lambda=1$ равна 3. Жорданова нормальнай форма в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ имеет вид $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$; **Для** A_2**:** собственные числа $\lambda_{1,2,3}=2$, собственные вектора $\vec{e}_1=(1;4;2)$, $\vec{e}_3=(0;0;1)$ присоединённый вектор $\vec{e}_3=(1;2;0)$. Геометрическая кратность $\lambda=2$ равна 2 и алгебраическая кратность собственного числа $\lambda=2$ равна 3. Жорданова нормальнай форма в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ имеет вид $\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$; **Для** A_3**:** ???; **Для** A_4**:** ??.

4.2.8 (a) В базисе $\vec{e}_1=1$, $\vec{e}_2=x$, $\dots$, $\vec{e}_{n+1}=x^n$: собственные числа $\lambda_{1,2,\dots,n+1}=0$, собственный вектор $\vec{e}=(1,0\dots,0)=1$; **(b)** Удобнее матрицы порядка $n\times n$ "выпрямить"в столбцы. Тогда харакеристическое уравнение принимает вид: $(-1)^n(\lambda-1)^{\frac{n^2+n}{2}}(\lambda+1)^{\frac{n^2-n}{2}}$, собственные числа $\lambda_{1,2,\dots,\frac{n^2+n}{2}}=1$, $\lambda_{\frac{n^2+n}{2}+1,\dots,n^2}=-1$, собственные вектора отвечающие собственному числу 1 будут матрицы

$$E_1=\begin{pmatrix}1&0&\dots&0\\0&0&\dots&0\\ \dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&0\end{pmatrix},\quad E_2=\begin{pmatrix}0&0&\dots&0\\0&1&\dots&0\\ \dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&0\end{pmatrix},\quad \dots,\quad E_n=\begin{pmatrix}0&0&\dots&0\\0&0&\dots&0\\ \dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&1\end{pmatrix},$$

$$E_{n+1}=\begin{pmatrix}0&1&\dots&0\\1&0&\dots&0\\ \dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&0\end{pmatrix},\quad \dots,\quad E_{2n-1}=\begin{pmatrix}0&0&\dots&1\\0&0&\dots&0\\ \dots&\dots&\dots&\dots\\1&0&\dots&0\end{pmatrix},\quad \dots,\quad E_{\frac{n^2+n}{2}}=\begin{pmatrix}0&\dots&0&0\\ \dots&\dots&\dots&\dots\\0&\dots&0&1\\0&\dots&1&0\end{pmatrix}$$

собственные вектора отвечающие собственному числу -1 будут матрицы

$$E_{\frac{n^2+n}{2}+1}=\begin{pmatrix}0&-1&\dots&0\\1&0&\dots&0\\ \dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&0\end{pmatrix},\quad \dots,\quad E_{\frac{n^2+n}{2}+n-1}=\begin{pmatrix}0&0&\dots&-1\\0&0&\dots&0\\ \dots&\dots&\dots&\dots\\1&0&\dots&0\end{pmatrix},\quad \dots,\quad E_{n^2}=\begin{pmatrix}0&\dots&0&0\\ \dots&\dots&\dots&\dots\\0&\dots&0&-1\\0&\dots&1&0\end{pmatrix}.$$

(c) В базисе $\vec{e}_1=1$, $\vec{e}_2=x$, $\dots$, $\vec{e}_{n+1}=x^n$: собственные числа $\lambda_k=1/k$, $k=1,\dots,n+1$ собственные вектора $\vec{f}_1=(1,0,\dots,0)=1$, $\vec{f}_2=(0,1,\dots,0)=x$, $\dots$, $\vec{f}_{n+1}=(0,0\dots,1)=x^n$; **(d)** Собственные числа $\lambda_1=1$, $\lambda_{2k}=k^ni$, $\lambda_{2k+1}=-k^ni$, $k=1,\dots,m$ собственные вектора ?????

Глава 5

Билинейные функции и квадратичные формы

5.1 Билинейные функции и квадратичные формы

Определение 5.1.1. Пусть V — векторное пространство. Назовем функцию $\mathcal{F}(\vec{x},\vec{y})$ от векторов $\vec{x},\vec{y}$ со значениями в $\mathbb{R}$ билинейной, если

1) $\mathcal{F}(\vec{x_1}+\vec{x_2},\vec{y})=\mathcal{F}(\vec{x_1},\vec{y})+\mathcal{F}(\vec{x_2},\vec{y}), \quad \forall \vec{x_1},\vec{x_2},\vec{y}\in V;$
   $\mathcal{F}(\alpha\vec{x},\vec{y})=\alpha\mathcal{F}(\vec{x},\vec{y}), \quad \forall\alpha\in\mathbb{R}, \forall\vec{x},\vec{y}\in V;$

2) $\mathcal{F}(\vec{x},\vec{y_1}+\vec{y_2})=\mathcal{F}(\vec{x},\vec{y_1})+\mathcal{F}(\vec{x},\vec{y_2}), \quad \forall \vec{x},\vec{y_1},\vec{y_2}\in V;$
   $\mathcal{F}(\vec{x},\alpha\vec{y})=\alpha\mathcal{F}(\vec{x},\vec{y}), \quad \forall\alpha\in\mathbb{R}, \forall\vec{x},\vec{y}\in V.$

Пусть $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ — базис V. Для того, чтобы найти значения $\mathcal{F}(\vec{x},\vec{y})$ для любых $\vec{x},\vec{y}\in V$ достаточно знать значения $\mathcal{F}(\vec{e}_i,\vec{e}_j), 1\le i\le n, 1\le j\le n$. Покажем это на примере двумерного пространства V. Пусть $\vec{x}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2$, $\vec{y}=y_1\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2$. Тогда

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\vec{x},\vec{y})&=\mathcal{F}(x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2,y_1\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2)=\mathcal{F}(x_1\vec{e}_1,y_1\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2)+\mathcal{F}(x_2\vec{e}_2,y_1\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2)=\\&=x_1\mathcal{F}(\vec{e}_1,y_1\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2)+x_2\mathcal{F}(\vec{e}_2,y_1\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2)=\end{aligned}$$

(мы использовали линейность по первому аргументу)

$$\begin{aligned}&=x_1(\mathcal{F}(\vec{e_1},y_1\vec{e_1})+\mathcal{F}(\vec{e_1},y_2\vec{e_2}))+x_2(\mathcal{F}(\vec{e_2},y_1\vec{e_1})+\mathcal{F}(\vec{e_2},y_2\vec{e_2}))=\\&=x_1(y_1\mathcal{F}(\vec{e_1},\vec{e_1})+y_2\mathcal{F}(\vec{e_1},\vec{e_2}))+x_2(y_1\mathcal{F}(\vec{e_2},\vec{e_1})+y_2\mathcal{F}(\vec{e_2},\vec{e_2}))=\\&=x_1y_1\mathcal{F}(\vec{e_1},\vec{e_1})+x_1y_2\mathcal{F}(\vec{e_1},\vec{e_2})+x_2y_1\mathcal{F}(\vec{e_2},\vec{e_1})+x_2y_2\mathcal{F}(\vec{e_2},\vec{e_2}).\end{aligned}$$

Пример 5.1.1. Скалярное произведение (x,y) на евклидовом (или унитарном) пространстве V является билинейной функцией на V.

Пример 5.1.2. Функция $F(f,g)=\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt$ является билинейной функцией на пространстве функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$.

5.1.1 Задание билинейной функции с помощью матрицы. Переход к другому базису

Матрица A с элементами $a_{ij}=\mathcal{F}(\vec{e}_i,\vec{e}_j)$ называется *матрицей билинейной функции* в базисе $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\vec{x},\vec{y})&=x_1(y_1\mathcal{F}(\vec{e_1},\vec{e_1})+y_2\mathcal{F}(\vec{e_1},\vec{e_2}))+x_2(y_1\mathcal{F}(\vec{e_2},\vec{e_1})+y_2\mathcal{F}(\vec{e_2},\vec{e_2}))=\\&=(x_1x_2)\begin{pmatrix}y_1\mathcal{F}(\vec{e_1},\vec{e_1})+y_2\mathcal{F}(\vec{e_1},\vec{e_2})\\y_1\mathcal{F}(\vec{e_2},\vec{e_1})+y_2\mathcal{F}(\vec{e_2},\vec{e_2})\end{pmatrix}=\\&=(x_1x_2)\begin{pmatrix}\mathcal{F}(\vec{e_1},\vec{e_1})&\mathcal{F}(\vec{e_1},\vec{e_2})\\\mathcal{F}(\vec{e_2},\vec{e_1})&\mathcal{F}(\vec{e_2},\vec{e_2})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\vec{x}^TA\vec{y}.\end{aligned}$$

П р и м е р 5.1.3. Если $\mathcal{F}(\vec{x},\vec{y}) = (\vec{x},\vec{y})$ — обычное скалярное произведение в евклидовом пространстве, то $\mathcal{F}(\vec{x},\vec{y})$ будет билинейной функцией, а ее матрица A будет просто матрицей Грама. Действительно,

$$A = G(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n) = \begin{pmatrix} (\vec{e}_1,\vec{e}_1) & (\vec{e}_1,\vec{e}_2) & \ldots & (\vec{e}_1,\vec{e}_n) \\ (\vec{e}_2,\vec{e}_1) & (\vec{e}_2,\vec{e}_2) & \ldots & (\vec{e}_2,\vec{e}_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\vec{e}_n,\vec{e}_1) & (\vec{e}_n,\vec{e}_2) & \ldots & (\vec{e}_n,\vec{e}_n) \end{pmatrix}.$$

Поэтому на матрицу билинейной функции можно смотреть как на обобщение матрицы Грама.

Лемма 7. *Пусть при переходе от базиса $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ к другому базису $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$ билинейная функция*

$$\mathcal{F}(x,y) = \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl} x_k y_l$$

переходит в

$$\mathcal{F}'(x',y') = \sum_{k,l=1}^{n} a'_{kl} x'_k y'_l.$$

Тогда матрица A' отвечающая билинейной функции $\mathcal{F}'(x',y')$, связана с матрицами A, $C = C_{e\to f}$, отвечающие билинейной функции $\mathcal{F}(x,y)$ и матрице перехода от базиса e к f соотношением:

$$A' = C^T A C.$$

Доказательство. Действительно, пусть вектора $\vec{x}$, $\vec{y}$ имеет в базисе $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ координаты $\vec{x}_e = (x_1, \ldots, x_n)$, $\vec{y}_e = (y_1, \ldots, y_n)$ а в базисе $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$ — координаты $\vec{x}_f = (x'_1, \ldots, x'_n)$, $\vec{y}_f = (y'_1, \ldots, y'_n)$. Тогда, как нам известно

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = C_{e\to f} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \ldots \\ x'_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} = C_{e\to f} \begin{pmatrix} y'_1 \\ \ldots \\ y'_n \end{pmatrix},$$

где $C = C_{e\to f}$ матрица перехода. Следовательно,

$$\mathcal{F}'(x',y') = \mathcal{F}(x(x',y'), y(x',y')) = \vec{x}^T A \vec{y} = (C\vec{x}\,')^T A (C\vec{y}\,') =$$
$$= \vec{x}\,'^T C^T A C \vec{y}\,' = \vec{x}\,'^T (C^T A C)\vec{y}\,' = \vec{x}\,'^T A' \vec{y}\,'.$$

□

Таким образом, при переходе к базису $\vec{f}'_1, \ldots, \vec{f}'_n$ матрица A' билинейной функции в этом базисе равна $A' = C^T A C$, где C^T — транспонированная матрица, т.е. если

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix}, \quad \text{то} \quad C^T = \begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{1n} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определение 5.1.2. Если для любых $\vec{x}, \vec{y}$ из векторного пространства V имеет место равенство $\mathcal{F}(\vec{x},\vec{y}) = \mathcal{F}(\vec{y},\vec{x})$, то билинейная функция называется *симметрической* (соответствующая ей матрица A — *симметрическая*, т.е. $a_{ij} = a_{ji}$ для всех i, j). Пусть $\mathcal{F}(\vec{x},\vec{y})$ — симметрическая билинейная функция. Тогда положим $Q(\vec{x}) = \mathcal{F}(\vec{x},\vec{x})$. Функция $Q(\vec{x})$ называется квадратичной формой от $\vec{x}$.

Определение 5.1.3. Билинейная форма $\mathcal{F}(\vec{x},\vec{y})$ называется кососимметричной (антисимметричной), если $\mathcal{F}(\vec{x},\vec{y}) = -\mathcal{F}(\vec{y},\vec{x})$, для любых векторов $\vec{x}$, $\vec{y} \in V$.

Общий вид квадратичной формы

- в двумерном пространстве $\mathbb{R}^2$:
$$Q(\vec{x}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 :$$
- в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$:
$$Q(\vec{x}) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3;$$

- В пространстве $\mathbb{R}^n$:

$$Q(\vec{x}) = \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl} x_k x_l.$$

Замечание 16. Заметим, что если Q — квадратичная функция, построенная по симметричной билинейной функции $\mathcal{F}$, то

$$Q(a+b) = \mathcal{F}(a+b, a+b) = \mathcal{F}(a,a) + \mathcal{F}(a,b) + \mathcal{F}(b,a) + \mathcal{F}(b,b),$$

следовательно,

$$\mathcal{F}(a,b) = \frac{1}{2}(Q(a+b) - Q(a) - Q(b)).$$

Таким образом, симметричные билинейные функции и квадратичные функции находятся во взаимно однозначном соответствии.

Теорема 5.1.21. *Любая билинейная функция допускает единственное разложение в сумму симметричной и кососимметричной билинейных функций.*

Доказательство. Докажем сначала существование, потом единственность.

Существование. Существование указанного разложения очевидно, т.к.

$$\mathcal{F}(a,b) = \frac{1}{2}(\mathcal{F}(a,b) + \mathcal{F}(b,a)) + \frac{1}{2}(\mathcal{F}(a,b) - \mathcal{F}(b,a)).$$

Единственность. Сначала убедимся, что если билинейная функция одновременно симметрична и кососимметрична, то она нулевая. Действительно, если $\mathcal{F}(a,b) = \mathcal{F}(b,a) = -\mathcal{F}(b,a)$, то $2\mathcal{F}(b,a) = 0$, поэтому $\mathcal{F}(b,a) = 0$ для всех a, b.

Пусть теперь функция $\mathcal{F}$ обладает двумя разложениями указанного вида,

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 = \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2,$$

где $\mathcal{F}_1, \mathcal{G}_1$ симметричны, а $\mathcal{F}_2, \mathcal{G}_2$ кососимметричны. Тогда $0 = (\mathcal{F}_1 - \mathcal{G}_1) + (\mathcal{F}_2 - \mathcal{G}_2)$, откуда следует, что как функция $\mathcal{F}_1 - \mathcal{G}_1$, так и функция $\mathcal{F}_2 - \mathcal{G}_2$, должна быть одновременно симметричной и кососимметричной, поэтому обе эти функции равны нулю.

□

Контрольные вопросы.

1. Какая из билинейных функций $f_1(x,y) = x_1y_1 + 3x_3y_1 - x_2y_3 - 11x_2y_2 + 3x_1y_3 - x_3y_2$ и $f_2(x,y) = 5x_3y_1 - x_2y_3 - 5x_1y_3 + x_3y_2$ является симметрической и кососимметрической?
2. Может ли билинейная функция быть одновременно симметрической и кососимметрической?

Упражнения к 5.1

Упражнение 5.1.1. *Какие из следующих функций двух аргументов являются билинейными функциями в соответствующих пространствах?*

a. *Функция* $f(\vec{x},\vec{y}) = 20\vec{x}^T \cdot \vec{y} + \alpha$, $\vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^d$, $\alpha \in \mathbb{R}$. *Здесь* α — *параметр, а под умножением векторов понимаем умножение матриц размера* $1 \times d$ *и* $d \times 1$.

b. *Функция* $f(A,B) = \mathrm{tr}(AB)$, A, B *элементы пространстранства матриц* $M_n(\mathbb{R})$. *Здесь* $\mathrm{tr}\, A$ *след матрицы* A, *т.е. сумма всех диагональных элементов матрицы* A.

c. *Функция* $f(A,B) = \mathrm{tr}(AB - BA)$, A, B *элементы пространстравнства матриц* $M_n(\mathbb{R})$.

d. *Функция* $f(A,B) = \det(AB)$, A, B *элементы пространстранства матриц* $M_n(\mathbb{R})$.

e. *Функция* $f(A,B) = \mathrm{tr}(17A + 2B)$, A, B *элементы пространстранства матриц* $M_n(\mathbb{R})$.

f. *Функция* $f(A,B) = \mathrm{tr}(AB^T)$, A, B *элементы пространстранства матриц* $M_n(\mathbb{R})$.

g. *Функция* $f(A,B) = \mathrm{tr}(A^T B)$, A, B *элементы пространстранства матриц* $M_n(\mathbb{R})$.

h. *Функция $f(A,B)$ равна коэффициенту $c_{9,7}$ матрицы $C = AB$, где $= A \cdot B$, A, B элементы пространстранства матриц $M_n(\mathbb{R})$, $n \geqslant 9$.*

i. *Функция $f(x,y) = \int_1^3 x(t)y(t)\,dt$, где $x, y \in C[1;3]$ (т.е. непрерывные функции).*

j. *Функция $f(x,y) = \int_0^5 x(t)y'(t)\,dt$, где $x \in C[0;5]$, $y \in C^1[0;5]$, причём $x(0) = y(0) = x(5) = y(5) = 0$.*

k. *Функция $f(x,y) = \int_1^7 (x(t) + y(t))^3\,dt$, где $x, y \in C[1;7]$.*

Упражнение 5.1.2. *Найдите матрицу билинейной функции f в новом базисе, если заданы её матрица в старом базисе и формулы перехода:*

$$(a)\quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} e_1' &= e_1 - 2e_2, \\ e_2' &= e_1 + 5e_3, \\ e_3' &= e_1 + 5e_2 + 4e_3; \end{aligned} \qquad (b)\quad F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} e_1' &= e_1 - e_2 + 2e_3, \\ e_2' &= e_1 - e_3, \\ e_3' &= e_1 + 3e_2 + 3e_3; \end{aligned}$$

$$(c)\quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} e_1' &= e_1 - 2e_2, \\ e_2' &= e_1 + 5e_3, \\ e_3' &= e_1 + 5e_2 + 4e_3; \end{aligned} \qquad (d)\quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} e_1' &= e_1 - e_2 + 2e_3, \\ e_2' &= e_1 - e_3, \\ e_3' &= e_1 + 3e_2 + 3e_3; \end{aligned}$$

Упражнение 5.1.3. *В пространстве матриц размера 20×20 с базисом*

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad , e_{20} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad , e_{20^2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

найдите матрицу билинейных функций в этом базисе для функции:

1. *$f(A,B)$ равной коэффициенту $c_{6,8}$ матрицы $C = AB$, где $= A \cdot B$, A, B элементы пространстранства матриц $M_{20}(\mathbb{R})$.*
2. *$f(A,B) = \operatorname{tr}(A \cdot B^T)$.*

Упражнение 5.1.4. *Приведите к каноническому виду*

(a) *кососимметрическую билинейную функцию (в $\mathbb{R}$)*

$$x_1y_2 + x_4y_1 + 2x_2y_3 - 2x_3y_2 + 5x_3y_4 - x_1y_4 - 5x_4y_3,$$

(b) *симметрическую билинейную функцию*

$$3x_1y_2 + 2x_1y_3 + 3x_2y_1 - x_2y_3 + 2x_3y_1 - x_3y_2 + 6x_3y_3.$$

Ответы: 5.1.1 (a) Если $\alpha = 0$, то билинейная, если $\alpha \neq 0$, то нет; (b) билинейна; (c) билинейна; (d) нет; (e) нет; (f) билинейна; (g) билинейна; (h) билинейна; (i) билинейна; (j) билинейна; (k) нет. **5.1.2** (a) $F = \begin{pmatrix} 0 & -13 & -5 \\ 8 & 25 & 0 \\ 1 & -15 & -28 \end{pmatrix}$; (b) $F = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 1 \\ -9 & 8 & -6 \\ -5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$; (c) $F = \begin{pmatrix} 7 & 18 & 5 \\ 1 & 21 & 17 \\ -14 & -39 & -7 \end{pmatrix}$; (d) $F = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -25 \\ -7 & 5 & 2 \\ -19 & 0 & -21 \end{pmatrix}$. **5.1.3** (a) матрица $F = (f_{m\,j})_{m,j=1,\dots,400}$, где $f_{m\,j} = 1$, если $m = \{101, 102, \dots, 120\}$ и $j = 8 + 20 \cdot s$, $s = 0, 1, \dots, 19$ остальные элементы матрицы F нулевые, т.е. $f_{m\,j} = 0$ если $m \notin \{101, 102, \dots, 120\}$ либо $j \notin 8 + 20 \cdot s$, $s = 0, 1, \dots, 19$; (b) матрица $F = (f_{m\,j})_{m,j=1,\dots,400}$, где $f_{m\,j} = 1$, если $m = j$ и $f_{m\,j} = 0$ иначе, т.е. для $m \neq j$. **5.1.4** (a) $F' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. *Указание:* Надо искать новый базис в виде $\vec{e}_1' = \vec{e}_1$, $\vec{e}_2' = \vec{e}_2$, $\vec{e}_3' = \vec{e}_3 + \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2$, $\vec{e}_4' = \vec{e}_4 + \delta\vec{e}_1 + \gamma\vec{e}_2$. Константы α, β, γ, δ находим из условия $\mathcal{F}(\vec{e}_1', \vec{e}_3') = 0$, $\mathcal{F}(\vec{e}_1', \vec{e}_4') = 0$, $\mathcal{F}(\vec{e}_2', \vec{e}_3') = 0$, $\mathcal{F}(\vec{e}_2', \vec{e}_4') = 0$, отткуда получим $\beta = \gamma = 0$, $\alpha = 2$, $\delta = 1$; (b) $F' = \begin{pmatrix} -2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 16,5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

5.2 Приведение квадратичных форм к каноническому и нормальному виду

5.2.1 Метод Лагранжа

Метод последовательного выделения полных квадратов носит название *метода Лагранжа.*

П р и м е р 5.2.1. Дана квадратичная форма

$$Q(\vec{x}) = 2x_1^2 + 21x_2^2 + 6x_3^2 + 6x_4^2 - 12x_1x_2 + 4x_1x_3 - 18x_2x_3 + 2x_3x_4.$$

Привести данную форму к каноническому виду и найти вид невырожденного преобразования приводящего квадратичную форму к каноническому виду.

Доказательство. Выделим полный квадрат по первой переменной, затем по второй и т.д.:

$$\begin{aligned}
&[2x_1^2 - 12x_1x_2 + 4x_1x_3] + 21x_2^2 + 6x_3^2 + 6x_4^2 - 18x_2x_3 + 2x_3x_4 = \\
&\quad = [2(x_1 - 3x_2 + x_3)^2 - 2(-3x_2 + x_3)^2] + 21x_2^2 + 6x_3^2 + 6x_4^2 - 18x_2x_3 + 2x_3x_4 = \\
&\quad = 2(x_1 - 3x_2 + x_3)^2 + [3x_2^2 - 6x_2x_3] + 4x_3^2 + 6x_4^2 + 2x_3x_4 = \\
&\quad = 2(x_1 - 3x_2 + x_3)^2 + [3(x_2 - x_3)^2 - 3x_3^2] + 4x_3^2 + 6x_4^2 + 2x_3x_4 = \\
&\quad = 2(x_1 - 3x_2 + x_3)^2 + 3(x_2 - x_3)^2 + (x_3 + x_4)^2 + 5x_4^2.
\end{aligned}$$

Таким образом канонический вид квадратичной формы:

$$Q'(\vec{x}\,') = 2(x_1')^2 + 3(x_2')^2 + (x_3')^2 + 5(x_4')^2,$$

где $x_1' = x_1 - 3x_2 + x_3$, $x_2' = x_2 - x_3$, $x_3' = x_3 + x_4$, $x_4' = x_4$. Таким образом матрица перехода к базису, в котором квадратичная форма принимает канонический вид может быть найдена из уравнения

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\vec{x} = C\vec{x}\,'$. □

Сформулируем теорему.

Теорема 5.2.22. *Всякая квадратичная форма в n -мерном векторном пространстве может быть приведена некоторым невырожденным преобразованием к каноническому виду, т.е. виду*

$$\lambda_1(x_1')^2 + \dots + \lambda_m(x_m')^2,$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, $m \leqslant n$.

Доказательство. Докажем при помощи метода Лагранжа (выделения полных квадратов). Воспользуемся индукцией.

- Если в квадратичную форму входит лишь одна переменная, то $Q(x) = a_{11}x_1^2$ и тогда всё доказано.
- Предположим, что наше утверждение справедливо для всех квадратичных форм, зависящих от $s-1$ переменной (в n -мерном векторном пространстве).
- Рассмотрим

  $$Q(\vec{x}) = \sum_{k,l=1}^{s} a_{kl}x_kx_l.$$

  Возможны два случая:

1. Если существует хотя бы один квадрат с отличным от нуля коэффициентом, например, $a_{11} \neq 0$, то выделив полный квадрат по переменной x_1, получаем

$$Q(\vec{x}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1s}x_1x_s + \sum_{k,l=2}^{s} a_{kl}x_kx_l =$$

$$= a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \cdots + \frac{a_{1s}}{a_{11}}x_s\right)^2 - a_{11}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \cdots + \frac{a_{1s}}{a_{11}}x_s\right)^2 + \sum_{k,l=2}^{s} a_{kl}x_kx_l =$$

$$= a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \cdots + \frac{a_{1s}}{a_{11}}x_s\right)^2 + \sum_{k,l=2}^{s} a'_{kl}x_kx_l = a_{11}\cdot x_1'^2 + \tilde{Q}(x_2, \ldots, x_s).$$

Проверим, что преобразование $x_1' = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1s}x_s$, $x_k' = x_k$, $k = 2, \ldots n$ — невырождено. Но это очевидно, т.к. определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1s} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \hdotsfor{8} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hdotsfor{8} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = a_{11} \neq 0$$

отличен от нуля. Далее, поскольку квадратичная форма $\tilde{Q}(x_2, \ldots, x_s)$ зависит только $s-1$ переменной, то достаточно воспользоваться предположением индукции.

2. Если все коэффициенты при полных квадратах равны нулю, т.е. $a_{kk} = 0$, то существует коэффициент (если это не так, то квадратичная форма просто нулевая и следовательно всё доказано), например, $a_{12} \neq 0$. Сделаем замену переменного

$$\begin{cases} x_1 = x_1' - x_2' \\ x_2 = x_1' + x_2' \\ x_3 = x_3' \\ \ldots \\ x_n = x_n' \end{cases} \iff \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}\,' \iff \vec{x} = C\vec{x}\,',$$

что соответствует переходу от старого базиса $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ к новому базису $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$ при помощи матрицы перехода C. Для которой справедливо $\det C = -2$, т.е. преобразование невырождено. При этом произведение x_1x_2 обратится в $x_1'^2 - x_2'^2$, и мы приходим к первому случаю.

□

5.2.2 Метод Гаусса

П р и м е р 5.2.2. Вернёмся ещё раз уже разобранному примеру 5.2.1. Рассмотрев матрицу квадратичной формы

$$Q(\vec{x}) = 2x_1^2 + 21x_2^2 + 6x_3^2 + 6x_4^2 - 12x_1x_2 + 4x_1x_3 - 18x_2x_3 + 2x_3x_4,$$

мы привели её к каноническому виду

$$Q'(\vec{x}\,') = 2(x_1')^2 + 3(x_2')^2 + (x_3')^2 + 5(x_4')^2,$$

где $x_1' = x_1 - 3x_2 + x_3$, $x_2' = x_2 - x_3$, $x_3' = x_3 + x_4$, $x_4' = x_4$.

Попробуем применить к матрице исходной квадратичной формы метод Гаусса приведения к треугольному виду:

$$\begin{pmatrix} 2 & -6 & 2 & 0 \\ -6 & 21 & -9 & 0 \\ 2 & -9 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 + 3\vec{a}_1 \\ \vec{a}_3 - \vec{a}_1 \\ \vec{a}_4 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 2 & -6 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 + \vec{a}_2 \\ \vec{a}_4 \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -6 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 \\ \vec{a}_4 - \vec{a}_3 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 2 & -6 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Обратим внимание на два обстоятельства: диагональные элементы последней матрицы совпадают с коэффициентами канонического вида квадратичной формы, а коэффициенты замены переменных, приводящей к этому каноническому виду, совпадают с элементами строк этой матрицы, если их разделить на соответствующие диагональные элементы. Возникает подозрение, что метод Лагранжа является просто некоторой версией метода Гаусса.

Наше наблюдение оформим в виде следующей теоремы:

Теорема 5.2.23. *Метод Лагранжа приведения квадратичной формы $Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$ к каноническому виду эквивалентен методу Гаусса приведения матрицы A к верхнетреугольному виду.*

Доказательство. В предположении $a_{11} \neq 0$, проследим к чему приводит первый шаг метода Лагранжа при выделении полного квадрата по переменной x_1:

$$Q(\vec{x}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + \sum_{k,l=2}^{n} a_{kl}x_kx_l =$$

$$= a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 - a_{11}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 + \sum_{k,l=2}^{n} a_{kl}x_kx_l =$$

$$= a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 + \tilde{Q}(x_2, \dots, x_n).$$

После выделения полного квадрата, содержащего переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ в правой части тождества образовалась квадратичная форма $\tilde{Q}(x_2, \dots, x_s)$, не содержащая x_1. Она равна

$$\tilde{Q}(x_2, \dots, x_s) = -a_{11}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 + \sum_{2 \leqslant j,k \leqslant n} a_{jk}x_jx_k =$$

$$= -a_{11}\sum_{2 \leqslant j,k \leqslant n} \frac{a_{1j}a_{1k}}{a_{11}^2}x_jx_k + \sum_{2 \leqslant j,k \leqslant n} a_{jk}x_jx_k = \sum_{2 \leqslant j,k \leqslant n} \left(a_{jk} - \frac{a_{1j}}{a_{11}}a_{1k}\right)x_jx_k\ .$$

Если теперь выписать матрицу этой квадратичной формы (она имеет порядок $n-1$), то ее элементы образуются по точно такому же правилу, как и коэффициенты матрицы, получающейся из матрицы A в результате первого шага метода Гаусса.

Первый шаг метода исключения переменных Гаусса преобразует матрицу A следующим образом:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \dots & \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{[1]} & \dots & a_{2n}^{[1]} \\ & \dots & & \dots \\ 0 & a_{n2}^{[1]} & \dots & a_{nn}^{[1]} \end{pmatrix};$$

здесь

$$a_{jk}^{[1]} = a_{jk} - \frac{a_{j1}a_{1k}}{a_{11}}\ .$$

Поскольку матрица A симметрична ($a_{jk} = a_{kj}$), то и матрица

$$\begin{pmatrix} a_{22}^{[1]} & \dots & a_{2n}^{[1]} \\ \dots & & \dots \\ a_{n2}^{[1]} & \dots & a_{nn}^{[1]} \end{pmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

оказывается симметричной. Если $a_{22}^{[1]} \neq 0$, то к этой новой матрице можно снова применить ту же процедуру, и т.д., и в конце концов придем к матрице первого порядка. Собирая все промежуточные результаты в одну матрицу, получим ее в треугольном виде

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,r-1} & a_{1r} & a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{[1]} & \dots & a_{2,r-1}^{[1]} & a_{2r}^{[1]} & a_{2,r+1}^{[1]} & \dots & a_{2n}^{[1]} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{r-1,r-1}^{[r-2]} & a_{r-1,r}^{[r-2]} & a_{r-1,r+1}^{[r-2]} & & a_{r-1,n}^{[r-2]} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{rr}^{[r-1]} & a_{r,r+1}^{[r-1]} & \dots & a_{rn}^{[r-1]} \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right) \tag{5.2.1}$$

при условии, что ни одно из чисел на диагонали не обратилось в нуль:

$$a_{11} \neq 0,\ a_{22}^{[1]} \neq 0, \dots,\ a_{r-1,r-1}^{[r-2]} \neq 0,\ a_{rr}^{[r-1]} \neq 0\ .$$

Если теперь обратиться к методу Лагранжа, то увидим, что полученная матрица как раз и определяет замену переменных

$$\left\{\begin{array}{lllllllll} x_1' = & x_1 + & \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + & \dots + & \frac{a_{1,r-1}}{a_{11}}x_{r-1} + & \frac{a_{1r}}{a_{11}}x_r & \dots + & \frac{a_{1,n-1}}{a_{11}}x_{n-1} + & \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n \\ x_2' = & & x_2 + & \dots + & \frac{a_{2,r-1}^{[1]}}{a_{22}^{[1]}}x_{r-1} + & \frac{a_{2r}^{[1]}}{a_{22}^{[1]}}x_r & \dots + & \frac{a_{2,n-1}^{[1]}}{a_{22}^{[1]}}x_{n-1} + & \frac{a_{2n}^{[1]}}{a_{22}^{[1]}}x_n \\ \vdots & & & \ddots & \dots & & & & \\ x_{r-1}' = & & & & x_{r-1} + & \frac{a_{r-1,r+1}^{[r-2]}}{a_{r-1,r-1}^{[r-2]}}x_r & \dots + & \frac{a_{r-1,n-1}^{[r-2]}}{a_{r-1,r-1}^{[r-2]}}x_{n-1} + & \frac{a_{r-1,n}^{[r-2]}}{a_{r-1,r-1}^{[r-2]}}x_n \\ x_r' = & & & & & x_r + & \dots + & +\frac{a_{n-1,r}^{[r-1]}}{a_{r,r}^{[r-2]}}x_{n-1} & \frac{a_{n-1,r}^{[r-1]}}{a_{r,r}^{[r-2]}}x_n \end{array}\right. ,$$

приводящую квадратичную форму к каноническому виду:

$$Q'(\vec{x}\,') = a_{11}(x_1')^2 + a_{22}^{[1]}(x_2')^2 + \dots + a_{r-1,r-1}^{[r-2]}(x_{r-1}')^2 + a_{rr}^{[r-1]}(x_r')^2\ .$$

□

Замечание 17. Если окажется, что, например, $a_{11} = 0$, то тогда согласно методу Лагранжа надо найти ненулевой коэффициент a_{kk} и применять данный метод начиная с этой переменной. Можно записать как это действие выглядит в терминах матрицы A (относительно метода Гаусса), это означает, что нужно поменять местами 1-ую строчку с k-ой строкой и 1-ый столбец с k-ым столбцом и начинать сначала. Но вместе перемен в матрице можно вернуться к методу Лагранжа напрямую.

Покажем на примере как поступать в случаях, когда всё же находится один из коэффициентов, равный нулю.

П р и м е р 5.2.3. Дана квадратичная форма

$$Q(\vec{x}) = x_1^2 + 5x_2^2 + 10x_3^2 + 3x_4^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 10x_2x_3 + 8x_3x_4.$$

Привести данную форму к каноническому виду и найти вид невырожденного преобразования приводящего квадратичную форму к каноническому виду.

Доказательство. Применим к матрице исходной квадратичной формы метод Гаусса приведения к треугольному виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & -5 & 1 \\ 3 & -5 & 10 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2+\vec{a}_1 \\ \vec{a}_3-3\vec{a}_1 \\ \vec{a}_4-\vec{a}_1 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vec{a}_3+(1/2)\vec{a}_2 \\ \vec{a}_4-(1/2)\vec{a}_2 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обратим внимание, что на диагонали $a_{33}^{[2]} = 0$. Следовательно, мы не можем далее продолжать выделять квадраты, описанным способом. Тогда вернёмся к квадратичной форме, которой соответствует матрица 2×2 в нижнем правом квадрате:

$$\tilde{Q}(x_3, x_4) = 4x_3x_4 + x_4^2 = (x_4 + 2x_3)^2 - 4x_3^2.$$

Таким образом мы привели квадратичную форму $\tilde{Q}$ к каноническому виду, а следовательно и Q:

$$Q'(\vec{x}\,') = (x_1')^2 + 4(x_2')^2 - 4(x_3')^2 + (x_4')^2,$$

где $x_1' = x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4$, $x_2' = x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4$, $x_3' = x_3$, $x_4' = x_3 + x_4$. □

5.2.3 Формула Якоби. Явный вид коэффициентов $a_{kk}^{[k-1]}$

Лемма 8. *На каждом шаге метода Гаусса (см. предыдущий параграф) все угловые миноры матрицы квадратичной формы A не меняются.*

Доказательство. Данная лемма очевидна, поскольку каждый шаг метода Гаусса использует элементарные преобразования над матрицей A третьего типа, т.е. к строке мы прибавляем другую строку, умноженную на некоторое действительное число. Как нам известно, определители при данном преобразовании не меняются. □

Теорема 5.2.24 (Формула Якоби)**.** *Пусть ранг квадратичной формы Q равен r и, более того, первые r диагональных миноров матрицы A квадратичной формы Q отличны от нуля, т.е.*

$$\Delta_1 = a_{11} \neq 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \dots, \quad \Delta_r = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1r} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Положим $\Delta_0 = 1$. Тогда канонический вид квадратичной формы Q принимает вид[1]*:*

$$Q'(\vec{x}\,') = \sum_{k=1}^{r} \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}} (x_k')^2,$$

где

$$x_k' = x_k + \frac{a_{k,k+1}^{[k-1]}}{a_{kk}^{[k-1]}} x_{k+1} + \dots + \frac{a_{k,n-1}^{[k-1]}}{a_{kk}^{[k-1]}} x_{n-1} + \frac{a_{kn}^{[k-1]}}{a_{kk}^{[k-1]}} x_n, \quad k = 1, \dots r,$$

а константы $a_{jk}^{[l]}$ определены в предыдущем параграфе при помощи метода Гаусса.

Доказательство. Из леммы 8 и предыдущего параграфа, вытекает, что если обозначить все угловые миноры матрицы (5.2.1) через Δ_1', Δ_2', …, Δ_n', то

$$a_{kk}^{[k-1]} = \frac{\Delta_k'}{\Delta_{k-1}'} = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}.$$

Следовательно справедливо

$$Q'(\vec{x}\,') = \sum_{k=1}^{r} a_{kk}^{[k-1]} (x_k')^2 = \sum_{k=1}^{r} \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}} (x_k')^2.$$

□

[1] Данная формула носит названия *формулы Якоби.* В некоторых учебниках эту формулу можно найти в виде $Q'(\vec{x}\,') = \sum_{k=1}^{r} \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}(x_k')^2$, или даже в виде $Q'(\vec{x}\,') = \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{\Delta_{k-1}\Delta_k}(x_k')^2$. Но в действительности это одна и та же формулу, а различные её виды отличаются тем, что по разному записывается выражение на коэффициенты x_k' через переменные x_1, …, x_k.

П р и м е р 5.2.4. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Якоби

$$Q(\vec{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2^2 - x_2x_3 + x_3^2.$$

Доказательство. Воспользуемся методом Якоби.

1. Матрица квадратичной формы имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1/2 \\ -1 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем угловые миноры

$$\Delta_1 = 1 \neq 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Но существует минор порядка 2×2, отличный от нуля, например,

$$M_{12}^{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

то метод Якоби для рассматриваемой формы применить нельзя.

2. Воспользуемся перенумерацией переменных. Сделаем замену x_1 на x_3, т.е. меняем местами 1-ю и 3-ю строки и 1-й и 3-й столбцы матрицы A. Матрица квадратичной формы в переменных $x_1' = x_3$, $x_2' = x_2$, $x_3' = x_1$ примет вид:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1 \\ -1/2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Применим для нее метод Якоби. Вычислим угловые миноры

$$\Delta_1 = 1, \quad \Delta_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{4}, \quad \Delta_3 = \det A' = -\frac{1}{4}.$$

Все угловые миноры отличны от нуля. Следовательно применим метод Якоби и искомый канонический вид:

$$Q'(\vec{y}) = \frac{\Delta_1}{\Delta_0} y_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} y_2^2 + \frac{\Delta_3}{\Delta_2} y_3^2 = y_1^2 + \frac{3}{4} y_2^2 - \frac{1}{3} y_3^2.$$

□

П р и м е р 5.2.5. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Якоби

$$Q(\vec{x}) = -2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 5x_2^2 - 6x_2x_3 - 2x_3^2.$$

Доказательство. Воспользуемся методом Якоби. Матрица квадратичной формы имеет вид

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -3 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем угловые миноры

$$\Delta_1 = -2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -11, \quad \Delta_3 = \det A = 29.$$

Все угловые миноры отличны от нуля. Следовательно применим метод Якоби и искомый канонический вид:

$$Q'(\vec{x}\,') = -2(x_1')^2 + \frac{11}{2}(x_2')^2 - \frac{29}{11}(x_3')^2.$$

□

П р и м е р 5.2.6. Методом Якоби найти канонический вид и невырожденное преобразование, приводящее к этому виду, для квадратичной формы

$$Q(\vec{x}) = 3x_1^2 - 6x_1x_2 + 12x_1x_3 - 16x_2x_3 + x_2^2 + 3x_3^2.$$

Доказательство. Воспользуемся методом Якоби. Матрица квадратичной формы имеет вид

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ -3 & 1 & -8 \\ 6 & -8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем угловые миноры

$$\Delta_1 = 3, \quad \Delta_2 = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = -6, \quad \Delta_3 = \det A = 42.$$

Все угловые миноры отличны от нуля. Следовательно применим метод Якоби и искомый канонический вид:

$$Q'(\vec{x}\,') = 3(x_1')^2 - 2(x_2')^2 - 7(x_3')^2. \tag{5.2.2}$$

Для того, чтобы указать преобразование применим метод Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ -3 & 1 & -8 \\ 6 & -8 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 + \vec{a}_1 \\ \vec{a}_3 - 2\vec{a}_1 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -9 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 - \vec{a}_2 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

Откуда ещё раз получаем вид квадратичной формы (5.2.2) и преобразование, приводящее к нему: $x_1' = x_1 - x_2 + 2x_3$, $x_2' = x_2 + x_3$, $x_3' = x_3$. ☐

5.2.4 Знакоопределённые квадратичные формы

Определение 5.2.1.

- Квадратичная форма $Q(\vec{x})$ называется *положительно определенной*, если для всех $\vec{x} \neq \vec{0}$ выполнено $Q(\vec{x}) > 0$. В этом случае все $\lambda_i > 0$.
- Квадратичная форма $Q(\vec{x})$ называется *отрицательно определенной*, если для всех $\vec{x} \neq \vec{0}$ выполнено $Q(\vec{x}) < 0$. В этом случае все $\lambda_i < 0$.
- Квадратичная форма $Q(\vec{x})$ называется *неотрицательно определенной*, если для всех $\vec{x}$ выполнено $Q(\vec{x}) \geqslant 0$.
- Квадратичная форма $Q(\vec{x})$ называется *неположительно определенной*, если для всех $\vec{x}$ выполнено $Q(\vec{x}) \leqslant 0$.

Для положительно определенной формы все $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ в каноническом виде. А для отрицательно определенной формы все $\lambda_i < 0$.

Определение 5.2.2. Миноры, примыкающие к левому верхнему углу матрицы, называются *угловыми*.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Миноры, имеющие своей диагональю главную диагональ матрицы, называются *главными*.

П р и м е р 5.2.7. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

выписать все (a) угловые миноры; (b) все главные миноры.

Доказательство. **(a)** Все угловые миноры

$$M_1^1 = 1, \quad M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}.$$

(b) Все главные миноры:

$$M_1^1 = 1, \quad M_2^2 = 0, \quad M_3^3 = 6,$$
$$M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad M_{13}^{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}, \quad M_{23}^{23} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix},$$
$$M_{123}^{123} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}.$$

□

Замечание 18. Для матрицы размера $n \times n$ угловых миноров n, а главных $2^n - 1$.

Для заданной матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ напомним обозначения

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad , \dots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Имеет место *критерий Сильвестра*:

Теорема 5.2.25 (критерий Сильвестра)**.** *Пусть заданна матрица A. Тогда*

1. *Если матрица A такова, что*

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 > 0, \quad \dots, \quad |A| = \Delta_n > 0.$$

Тогда квадратичная форма

$$Q(\vec{x}) = \sum_{k,l=1}^{s} a_{kl} x_k x_l.$$

положительно определена.

2. *Если*

$$\Delta_1 < 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 < 0, \quad \dots, \quad (-1)^n |A| = (-1)^n \Delta_n > 0.$$

то соответствующая квадратичная форма $Q(\vec{x})$ отрицательно определена.

Доказательство. Положим $\Delta_0 = 1$. Тогда согласно теореме Якоби см. теорему 5.2.24 существует невырожденное преобразование, из $\vec{x}$ в $\vec{x}\,'$ такое, что

$$Q'(\vec{x}\,') = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}} (x_k')^2.$$

Докажем, что в случае $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$, $\dots$, $|A| = \Delta_n > 0$ квадратичная форма положительна определена. На любом векторе $\vec{x} \neq \vec{0}$ будет выполнено $\vec{x}\,' \neq \vec{0}$ (это в силу невырожденности преобразования, см. теорему Якоби). Откуда для любого $\vec{x} \neq \vec{0}$ получаем желаемую оценку

$$Q(\vec{x}) = \vec{x}^{\,T} A \vec{x} = \vec{x}\,'^{\,T} C^T A C \vec{x}\,' = \vec{x}\,'^{\,T} A' \vec{x}\,' = Q'(\vec{x}\,') > 0.$$

Аналогично доказывается для отрицательно определенной формы. □

Вспомним пример. Второй диффернциал

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2$$

представляет собой квадратичную форму от dx, dy. Вспомним правило для определения, есть ли в стационарной точке, т.е. точке x_0, y_0, удовлетворяющей уравнениям

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)=(x_0,y_0)} = 0, \\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)=(x_0,y_0)} = 0. \end{cases}$$

экстремум? Для этого мы заметили, что наличие экстремума означает постоянство знака $d^2 f$, т.е. знакоопределенность квадратичной формы. Правила

1. Если

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0\right|_{(x,y)=(x_0,y_0)}, \quad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2\right|_{(x,y)=(x_0,y_0)} > 0,$$

то (x_0, y_0) — точка минимума.

2. Если

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0\right|_{(x,y)=(x_0,y_0)}, \quad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2\right|_{(x,y)=(x_0,y_0)} > 0,$$

то (x_0, y_0) — точка максимума непосредственно следуют из критерия Сильвестра. Ясно, что этот критерий использовать и в случае большего, чем 2 числа переменных.

определённость формы		**знакоопределёность квадратичной формы**	
		по минорам матрицы	**по собственным значениям**
Положительно	$Q(\vec{x}) > 0$ $\forall \vec{x} \neq \vec{0}$	Угловые миноры положительны $M_k > 0$, $k = 1, \ldots, n$	Все собственные значения $\lambda > 0$
Отрицательно	$Q(\vec{x}) < 0$ $\forall \vec{x} \neq \vec{0}$	Угловые миноры положительны $(-1)^k M_k > 0$, $k = 1, \ldots, n$	Все собственные значения $\lambda < 0$
Неотрицательно	$Q(\vec{x}) \geqslant 0$	Все главные миноры неотрицательны $M_k \geqslant 0$, $k = 1, \ldots, 2^n - 1$	Все собственные значения $\lambda \geqslant 0$
Неположительно	$Q(\vec{x}) \leqslant 0$	Все главные миноры удовлетворяют $(-1)^r M_k \geqslant 0$, $k = 1, \ldots, 2^n - 1$ здесь r — порядок минора	Все собственные значения $\lambda \leqslant 0$
Неопределённая	$Q(\vec{x}) \gtreqless 0$		Существуют собственные значения с различными знаками
Равная нулю	$Q(\vec{x}) = 0$		Все собственные значения равны нулю

5.2.5 Примеры на определение знакоопределённости квадратичной формы

П р и м е р 5.2.8. Квадратичную форму $Q(\vec{x}) = x_1^2 + 10x_2^2 + 2x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 8x_2x_3$ исследовать на знакоопределённость.

Доказательство. **1 способ** Найдём все главные миноры матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 10 & -4 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Справедливо

$$
\begin{gathered}
M_1^1 = 1 > 0, \quad M_2^2 = 10 > 0, \quad M_3^3 = 2 > 0, \\
M_{1\,2}^{1\,2} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 10 \end{vmatrix} = 1 > 0, \quad M_{1\,3}^{1\,3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0, \quad M_{2\,3}^{2\,3} = \begin{vmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0, \\
M_{1\,2\,3}^{1\,2\,3} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 10 & -4 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 0.
\end{gathered}
$$

Поскольку все главные миноры неотрицательны (их $2^3 - 1 = 7$ штук), то квадратичная форма неотрицательно определена.

2 способ Составим характеристическое уравнение для матрицы квадратичной формы

$$
\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 1 \\ -3 & 10-\lambda & -4 \\ 1 & -4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0.
$$

Решив уравнение третьей степени, находим

$$
\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \frac{13 \pm \sqrt{145}}{2}.
$$

Поскольку все собственные числа неотрицательны, то квадратичная форма неотрицательно определена.

3 способ Сгруппируем слагаемые входящие в квадратичную форму

$$
Q(\vec{x}) = x_1^2 + 10x_2^2 + 2x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 8x_2x_3 = (x_1 - 3x_2 + x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 = (x_1')^2 + (x_2')^2,
$$

где $x_1' = x_1 - 3x_2 + x_3$, $x_2' = x_2 - x_3$. Откуда хорошо видно, что $Q(\vec{x}) \geqslant 0$, причём на любом векторе $(x_1', x_2', x_3') = (0, 0, t)$, где t любое число $Q'(\vec{x}\,') = 0$. Следовательно квадратичная форма неотрицательно определена.

4 способ Группировку 3 способа в общем случае угадать бывает достаточно трудно, но можно последовательно, по каждой переменной, выделять полные квадраты. Метод последовательного выделения полных квадратов носит название *метода Лагранжа.*

$$
\begin{aligned}
Q(\vec{x}) &= x_1^2 + 10x_2^2 + 2x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 8x_2x_3 = (x_1^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3) + 10x_2^2 + 2x_3^2 - 8x_2x_3 = \\
&= \big((x_1 - 3x_2 + x_3)^2 - 9x_2^2 - x_3^2 + 6x_2x_3\big) + 10x_2^2 + 2x_3^2 - 8x_2x_3 = (x_1 - 3x_2 + x_3)^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 = \\
&= (x_1 - 3x_2 + x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2.
\end{aligned}
$$

Откуда делаем вывод, что квадратичная форма неотрицательно определена. Заметим, что выражения полученные способом 3 и 4 получились одинаковыми, но в общем случае они могут отличаться.

5 способ *Метод Якоби.* Поскольку последний угловой минор (т.е. определитель квадратичной формы) равен нулю (см. ниже), а все остальные миноры отличны от нуля

$$
\Delta_1 = M_1^1 = 1 > 0, \quad \Delta_2 = M_{1\,2}^{1\,2} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 10 \end{vmatrix} = 1 > 0, \quad \Delta_3 = M_{1\,2\,3}^{1\,2\,3} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 10 & -4 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 0,
$$

то ранг квадратичной формы равен 2. Квадратичная форма имеет следующий канонический вид

$$
Q(\vec{x}\,') = \frac{\Delta_1}{\Delta_0}(x_1')^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1}(x_2')^2 = (x_1')^2 + (x_2')^2
$$

и, следовательно, неотрицательно определена. Связь между переменными x_1', x_2' и x_1, x_2, x_3 устанавливаем, используя метод Гаусса для матрицы квадратичной формы (см. следующий способ).

6 способ *Метод Гаусса.*

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 10 & -4 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 + 3\vec{a}_1 \\ \vec{a}_3 - \vec{a}_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 + \vec{a}_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно диагональные элементы дают вид квадратичной формы: $Q = (x_1')^2 + (x_2')^2$. Причём $x_1' = x_1 - 3x_2 + x_3$, $x_2' = x_2 - x_3$ (замену мы выписываем исходя из матрицы, преобразованной к верхнетреугольному виду).

□

П р и м е р 5.2.9. Квадратичную форму $Q(\vec{x}) = -3x_1^2 - 5x_2^2 - 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 6x_2x_3$ исследовать на знакоопределённость.

Доказательство. **1 способ** Найдём все диагональные миноры матрицы

$$A = \begin{vmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & -3 & -5 \end{vmatrix}.$$

Справедливо

$$\Delta_1 = -3 < 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 14 > 0, \quad \Delta_3 = \det A = -32 < 0.$$

Поскольку диагональные миноры чередуют знак, начиная с отрицательного, то квадратичная форма отрицательно определена.

2 способ Составим характеристическое уравнение для матрицы квадратичной формы

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -5-\lambda & -3 \\ -1 & -3 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Решив уравнение третьей степени $-\lambda^3 - 13\lambda^2 - 44\lambda - 32 = 0$, находим

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -4, \quad \lambda_3 = -8.$$

Поскольку все собственные числа отрицательны, то квадратичная форма отрицательно определена.

3 способ Сгруппируем слагаемые входящие в квадратичную форму

$$Q(\vec{x}) = -\frac{1}{3}(x_1 + x_2 - x_3)^2 - \frac{2}{3}(2x_1 - x_2 + x_3)^2 - 4(x_2 + x_3)^2 = -\frac{1}{3}(x_1')^2 - \frac{2}{3}(x_2')^2 - 4(x_3')^2,$$

где $x_1' = x_1 + x_2 - x_3$, $x_2' = 2x_1 - x_2 + x_3$, $x_3' = x_2 + x_3$. Откуда следует, что квадратичная форма отрицательно определена.

4 способ *Метод Лагранжа.* Группировку 3 способа в общем случае угадать бывает достаточно трудно, но можно последовательно, по каждой переменной, выделять полные квадраты.

$$Q(\vec{x}) = -3\left(x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3\right)^2 - \frac{14}{3}x_2^2 - \frac{14}{3}x_3^2 - \frac{20}{3}x_2x_3 =$$
$$= -3\left(x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3\right)^2 - \frac{14}{3}\left(x_2 + \frac{5}{7}x_3\right)^2 - \frac{16}{7}x_3^2.$$

Откуда делаем вывод, что квадратичная форма отрицательно определена.

5 способ *Метод Якоби.* Находим все угловые миноры

$$\Delta_1 = -3, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 14, \quad \Delta_3 = \det A = -32.$$

Квадратичная форма имеет следующий канонический вид

$$Q(\vec{x}\,') = -3(x_1')^2 - \frac{14}{3}(x_2')^2 - \frac{16}{7}(x_3')^2$$

и, следовательно, отрицательно определена. Связь между переменными x_1', x_2', x_3', и x_1, x_2, x_3 устанавливаем, используя метод Гаусса для матрицы квадратичной формы (см. следующий способ).

6 способ *Метод Гаусса.*

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & -3 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 + \frac{1}{3}\vec{a}_1 \\ \vec{a}_3 - \frac{1}{3}\vec{a}_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 0 & -\frac{14}{3} & -\frac{10}{3} \\ 0 & -\frac{10}{3} & -\frac{14}{3} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 - \frac{5}{7}\vec{a}_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 0 & -\frac{14}{3} & -\frac{10}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{16}{7} \end{pmatrix}.$$

Следовательно диагональные элементы дают вид квадратичной формы: $Q' = -3(x_1')^2 - \frac{14}{3}(x_2')^2 - \frac{16}{7}(x_3')^2$. Причём $x_1' = x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3$, $x_2' = x_2 + \frac{5}{7}x_3$, $x_3' = x_3$ (замену мы выписываем исходя из матрицы, преобразованнной к верхнетреугольному виду).

□

5.2.6 Закон инерции квадратичных форм

Определение 5.2.3. *Рангом квадратичной формы* называется ранг ее матрицы.

Корректность данного определения вытекает из того, что из формулы перехода к другому базису $A' = C^T AC$ в силу невырожденности матрицы C согласно утверждению о ранге матрице следует, что ранг матрицы не меняется. Следовательно справедливо:

Замечание 19. При неособой замене переменных ранг квадратичной формы не изменяется.

Как и ранее, здесь рассматриваются только формы над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел. Законом инерции квадратичных форм называется следующее утверждение:

Теорема 5.2.26. *Пусть Q — квадратичная форма над полем $\mathbb{R}$. Тогда при любом способе приведения Q к нормальному виду число квадратов с коэффициентом 1 получается одно и то же, ровно как и число квадратов с коэффициентом −1.*

Доказательство. Пусть $Q(x) = x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots x_r^2$ и $Q(x) = y_1^2 + \dots + y_m^2 - y_{m+1}^2 - \dots y_s^2$ — две формы в нормальном виде, полученные в различных базисах e и f. Из замечания[2] имеем $r = s$. Покажем, что $k = m$. Этим теорема будет доказана. Предположим, что $k > m$, и приведем это предположение к противоречию.

Рассмотрев подпространство V_1 и V_2 порождённое векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k$ и $\vec{f}_{m+1}, \dots, \vec{f}_n$ соответсвенно. Поскольку $\dim V_1 + \dim V_2 = k + (n - m) > n$ и $\dim V_1 \cup V_2 \leqslant n$, то на основании формулы Грассмана легко сделать вывод, что пересечение $V_1 \cap V_2$ не пусто. Поскольку $\dim V_1 \cap V_2 = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim V_1 \cup V_2 > n - n = 0$. Пусть $\vec{x} \in V_1 \cap V_2$ произвольный ненулевой вектор. Тогда справедливо

$$\vec{x} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \dots + \alpha_k\vec{e}_k = \beta_{m+1}\vec{f}_{m+1} + \dots + \beta_n\vec{f}_n,$$

где хотя бы одно из чисел α_i, $i = 1, \dots k$ отлично от нуля. Поэтому

$$Q(\vec{x}) = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_k^2 > 0,$$
$$Q(\vec{x}) = -\beta_{m+1}^2 - \dots - \beta_n^2 \leqslant 0.$$

Получили противоречие. Таким образом, $k \leqslant m$. Аналогично доказывается, что $k \geqslant m$. Таким образом, $k = m$. □

[2] Для доказательства закона инерции свойство $r = s$ можно не обосновывать, т.к. оно для доказательства не имеет значения. Здесь мы лишь подчеркнули, что данное свойство выполняется.

Определение 5.2.4. Число положительных (или отрицательных) коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы $Q(x)$ называется её *положительным* (соответственно, *отрицательным*) *индексом инерции.* Будем обозначать эти индексы

$$n_+(Q) \quad \text{и} \quad n_-(Q) \ .$$

Разность

$$\sigma(Q) = n_+(Q) - n_-(Q)$$

называется *сигнатурой квадратичной формы.*

Закон инерции можно переформулировать в слудющих видах (оформим их в качестве замечаний):

Замечание 20 (закон инерции). Индексы инерции не зависят от способа приведения квадратичной формы к каноническому виду.

Замечание 21 (закон инерции). Ранг и сигнатура квадратичной формы не зависят от способа приведения квадратичной формы к каноническому виду.

Доказательство. Эквивалентность этой формулировки исходной очевидно следует из формул

$$\mathrm{rang}(Q) = n_+(Q) + n_-(Q), \ \sigma(Q) = n_+(Q) - n_-(Q) \ .$$

□

Контрольные вопросы.

1. Сформулируйте определение того, что квадратичная форма положительно определена, неотрицательна определена.
2. Сформулируйте закон инерции.

Упражнения к 5.2

Упражнение 5.2.1. *Методом Лагранжа найти нормальный вид и невырожденное преобразование, приводящее к этому виду, для следующей квадратичной формы:*

$$Q(\vec{x}) = 3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 3x_1x_3 - x_2x_3.$$

Упражнение 5.2.2. *Методом Гаусса найти канонический вид и невырожденное преобразование, приводящее к этому виду, для квадратичной формы:*

$$(a) \qquad Q(\vec{x}) = x_1^2 + 6x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 6x_2x_3;$$
$$(b) \qquad Q(\vec{x}) = x_1^2 + 10x_2^2 + 3x_3^2 + 6x_4^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 8x_2x_3 + 2x_3x_4;$$

Для пункта (a) найдите все симметричные билинейные функции, которые задают данную квадратичную функцию. Найдите её матрицу.

Упражнение 5.2.3. *Методом Гаусса и методом Лагранжа найти канонический вид и невырожденное преобразование, приводящее к этому виду, для квадратичной формы:*

$$(a) \qquad Q(\vec{x}) = x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3;$$
$$(b) \qquad Q(\vec{x}) = .$$

Для пункта (a) найдите все симметричные билинейные функции, которые задают данную квадратичную функцию. Найдите её матрицу.

Упражнение 5.2.4. *При каких значениях λ квадратичная функция*

(a) $Q(\vec{x}) = 2x_1^2 + x_2^2 + 6x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 6x_1x_3$ *является положительно определённой?*

(b) $Q(\vec{x}) = \lambda x_1^2 - 4x_2^2 - 4x_3^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$ *является отрицательно определённой?*

Ответы: 5.2.1 $Q(\vec{z}) = z_1^2 - z_2^2 + z_3^2$, невырожденное преобразование $z_1 = \sqrt{3}\left(x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{2}x_3\right)$, $z_2 = \sqrt{\frac{53}{15}}x_2$, $z_3 = \frac{\sqrt{5}}{2}\left(x_3 - \frac{2}{5}x_2\right)$. **5.2.2** (a) $Q(\vec{z}) = (x_1')^2 + 2(x_2')^2 - \frac{25}{2}(x_3')^2$, где $x_1' = x_1 + 2x_2 + 3x_3$, $x_2' = x_2 - \frac{3}{2}x_3$, $x_3' = x_3$, билинейная симметрическая функция $f(x,y) = x_1y_1 + 6x_2y_2 + x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_1y_3 + 3y_1x_3 + 3x_2y_3 + 3y_2x_3$ матрица этой функции имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; (b) $Q(\vec{z}) = (x_1')^2 + (x_2')^2 + (x_3')^2 + 5(x_4')^2$, где $x_1' = x_1 - 3x_2 + x_3$, $x_2' = x_2 - x_3$, $x_3' = x_3 + x_4$, $x_4' = x_4$. **5.2.3** (a) $Q(\vec{z}) = (x_1')^2 - (x_2')^2 + 32(x_3')^2$, где $x_1' = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 2x_3$, $x_2' = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - 6x_3$, $x_3' = x_3$, билинейная симметрическая функция $f(x,y) = \frac{1}{2}x_1y_2 + \frac{1}{2}x_2y_1 - 2x_1y_3 - 2y_1x_3 + 4x_2y_3 + 4y_2x_3$ матрица этой функции имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$; **5.2.4** (a) $\lambda \in (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$; (b) $\lambda < -\frac{16}{7}$.

Глава 6

Введение в теорию групп

6.1 Определения и примеры

Определение 6.1.1. Множество G с заданной на нем бинарной операцией $\circ : G \times G \mapsto G$ называется *группой*, если выполнены следующие свойства:

1. Ассоциативность: $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$.
2. Существует элемент $e \in G$, называемый нейтральным элементом, или единицей, такой что $a \circ e = e \circ a = a$ для любого $a \in G$.
3. Для любого элемента $a \in G$ существует обратный элемент, то есть такой $a^{-1} \in G$, что $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$.

Лемма 9. *Нейтральный и обратные элементы в группе* $(G, \circ)$ *единственны.*

Доказательство. • В самом деле, пусть e_1, $e_2 \in G$ два нейтральных элемента в группе. Тогда

$$e_1 = e_1 \circ e_2 = e_2.$$

• Пусть a_1^{-1}, $a_2^{-1} \in G$ два обратных элемента в группе G к элементу a. Тогда

$$(a_1^{-1}) = a_1^{-1} \circ (a \circ a_2^{-1}) = (a_1^{-1} \circ a) \circ a_2^{-1} = a_2^{-1}.$$

□

Определение 6.1.2. Группа G называется коммутативной, или абелевой, если $a \circ b = b \circ a$ для любых $a, b \in G$ (говорят еще, что операция в G является коммутативной, иными словами, что для этой операции справедлив закон коммутативности или перестановочности).

П р и м е р 6.1.1. Будут ли следующие множества с определённой операцией группами?

1. Множество $\mathbb{Z}$ целых чисел, относительно сложения $(\mathbb{Z}, +)$.

2. Множество $\mathbb{Z}$ целых чисел, относительно умножения $(\mathbb{Z}, \cdot)$.

3. Множество невырожденных матриц порядка 2, относительно операции матричного умножения над полем действительных чисел $(GL_2(\mathbb{R}), \cdot)$.

Доказательство. **1.** Рассмотрим $(\mathbb{Z}, +)$.

- Действительно, свойство ассоциативности выполнено: $(a + b) + c = a + (b + c)$ для любых $a, b, c \in \mathbb{Z}$.
- Нейтральный элемент здесь будет 0, поскольку справедливо $a + 0 = 0 + a$ для любого $a \in \mathbb{Z}$.
- Для любого $a \in \mathbb{Z}$ существует обратный $-a$ такой, что $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Таким образом проверено, что $(\mathbb{Z}, +)$ — группа.

2. Рассмотрим $(\mathbb{Z}, \cdot)$.

- Свойство ассоциативности выполнено: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ для любых $a, b, c \in \mathbb{Z}$.
- Нейтральный элемент здесь будет 1, поскольку справедливо $a \cdot 1 = 1 \cdot a$ для любого $a \in \mathbb{Z}$.
- Для $0 \in \mathbb{Z}$ не существует обратного элемента. Следовательно 3 свойство группы не выполнено.

Таким образом $(\mathbb{Z}, \cdot)$ не удовлетворяет условиям группы.

3. Рассмотрим $(GL_2(\mathbb{R}), \cdot)$. Здесь $GL_2(\mathbb{R}$ — невырожденые квадратные матрицы порядка 2, рассматриваемые над полем $\mathbb{R}$ по умножению.

- Действительно, свойство ассоциативности выполнено:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

для любых матриц $A, B, C \in GL_2(\mathbb{R})$. (Данное свойство предлагается читателю проверить самостоятельно).

- Нейтральный элемент здесь будет E — единичная матрица, поскольку справедливо

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = A$$

для любого $A \in GL_2(\mathbb{R})$.

- Для любого $A \in GL_2(\mathbb{R})$ существует обратный

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

такой, что $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Таким образом проверено, что $(GL_2(\mathbb{R}), \cdot)$ — группа.

□

П р и м е р 6.1.2. Конечная группа может быть задана при помощи таблицы умножения. Так, множество $G = \{e, a, b, c\}$ с таблицей умножения является абелевой.

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Доказательство.
- Из таблицы видно, что элемент e является нейтральным элементом.
- Каждый элемент группы является обратным к самому себе.
- Свойство коммутативности проверяется непосредственно по таблицы. Например, справедливо

$$a \circ b = c = b \circ a, \quad b \circ c = a = c \circ b, \quad a \circ c = b = c \circ a,$$
$$e \circ a = a = a \circ e, \quad e \circ b = b = b \circ e, \quad e \circ c = c = c \circ e.$$

- Свойство ассоциативности, с учётом доказанного свойства коммутативности и тривиальных перестановок группы сводится к проверке следующих соотношений:

$$(a \circ a) \circ b = a \circ (a \circ b) = b, \quad (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) = e.$$

□

Определение 6.1.3. *Подгруппой* группы G называется подмножество $H \subset G$, удовлетворяющее следующим условиям:

1. $a \circ b \in H$ для любых $a, b \in H$.
2. Нейтральный элементом принадлежит H, т.е. $e \in H$.
3. Для любого элемента $a \in H$ существует обратный элемент, то есть такой $a^{-1} \in H$.

Определение 6.1.4. Пусть X — какое-либо множество. Всякое подмножество $\rho \subset X \times X$ называется *отношением* на множестве X. Пусть $x, y \in X$, если $(x, y) \in \rho$, то говорят, что элементы x и y находятся в отношении ρ, и пишут $x\rho y$. Последняя запись читается: «элемент x находится в отношении ρ с элементом y».

П р и м е р 6.1.3. Пусть X — множество людей; $x\rho y$, если x живёт в одном городе с y.

Определение 6.1.5. *Отношение* ρ на множестве X называется:

- *рефлексивным*, если $x\rho x$ для любого $x \in X$;
- *симметричным*, если для любых $x, y \in X$ из $x\rho y$ следует, что $y\rho x$;
- *транзитивным*, если для любых $x, y, z \in X$ из $x\rho y$ и $y\rho z$ следует, что $x\rho z$.

Рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение на множестве X называется отношением эквивалентности на множестве X и обозначается символом $\sim$.

П р и м е р 6.1.4. Даны отношения:

1. отношение $=$ ($x = y$ — x равен y) на множестве действительных чисел;
2. отношение $<$ ($x < y$ — x меньше y) на множестве действительных чисел;
3. отношение $\leqslant$ ($x \leqslant y$ — x не больше y) на множестве действительных чисел.
4. отношение $x\rho y$, если x живёт в одном доме с y на множестве людей.

Установить, являются ли заданные отношения рефлексивными, симметричными, транзитивными, отношениями эквивалентности.

Доказательство. 1. Так как $x = x$ для любого действительного числа x, то отношение $=$ рефлексивное. Поскольку из $x = y$ следует, что $y = x$, то отношение симметричное. Так как из равенств $x = y$ и $y = z$ следует, что $x = z$, то отношение транзитивное. Таким образом, отношение равенства является отношением эквивалентности.

2. Отношение "меньше"не является рефлексивным (неравенство $x < x$ неверно) и симметричным (из $x < y$ не следует $y < x$ но является транзитивным (так как из неравенств $x < y$ и $y < z$ следует $x < z$). Это отношение не является отношением эквивалентности.

3. Отношение "не больше"является рефлексивным (неравенство $x \leqslant x$ справедливо для любых действительных чисел) и транзитивным (из неравенств $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$ следует $x \leqslant z$), но не является симметричным (например, из $1 \leqslant 3$ не следует, что $3 \leqslant 1$). Это отношение не является отношением эквивалентности.

4. Это отношение является отношением эквивалентности. Предлагаем проверить читателю самостоятельно.

□

Пусть ρ — отношение эквивалентности на множестве X. Для каждого $x \in X$ положим

$$\rho(x) = \{y \in X : \ x \underset{\rho}{\sim} y\}.$$

Из свойств эквивалентоности легко вытекает, что $x \in \rho(x)$ и

$$\rho(x) \cap \rho(y) \neq \emptyset \Longrightarrow \rho(x) = \rho(y).$$

Таким образом, подмножество $\rho(x)$ образуют разбиение множества X, т.е. покрывают его и попарно не пересекаются. Они называются классами эквивалентностями отношения $\rho(x)$. Два элемента эквивалентны тогда и только тогда, когда они принадлежат одному классу.

6.1.1 Группа классов вычетов по модулю n

Определение 6.1.6. Пусть a и b — произвольные целые числа и n — натуральное число. Будем говорить, что a сравнимо с b по модулю n, и будем писать $a = b \pmod{n}$, если разность $a - b$ делится на n, т. е. если $a = b + kn$ для некоторого целого числа k.

Легко проверяется, что сравнимость по модулю n является отношением эквивалентности на множестве $\mathbb{Z}$ целых чисел. Рефлексивность и симметричность его очевидны. Транзитивность тоже проверяется несложно: если $a = b+kn$ и $b = c+ln$ для некоторых целых чисел k и $l \in \mathbb{Z}$, то $a = c+(k+l)n$, так что из $a = b \pmod{n}$ и $b = c \pmod{n}$ следует $a = c \pmod{n}$.

Рассмотрим теперь классы эквивалентности, на которые отношение сравнимости по модулю n разбивает множество $\mathbb{Z}$ (они называются *классами вычетов* по модулю n). Ими являются множества

$$\begin{aligned}
[0] &= \{\dots, -2n, -n, 0, n, 2n, \dots\},\\
[1] &= \{\dots, -2n+1, -n+1, 1, n+1, 2n+1, \dots\},\\
[2] &= \{\dots, -2n+2, -n+2, 2, n+2, 2n+2, \dots\},\\
&\dots,\\
[n-1] &= \{\dots, -2n-1, -n-1, -1, n-1, 2n-1, \dots\},
\end{aligned}$$

Определим на множестве $\{[0], [1], \dots, [n-1]\}$ классов вычетов по модулю n некоторую бинарную операцию (которую мы снова обозначим знаком $+$, хотя она, конечно, не является обычным сложением), положив

$$[a] + [b] = [a + b],$$

где a и b — произвольные элементы соответствующих классов $[a]$ и $[b]$, а сумма $a+b$ справа является обычной суммой чисел a и b. Для того чтобы показать, что мы действительно определили некоторую операцию, т. е. что наше определение корректно, мы должны проверить, что класс вычетов $[a] + [b]$ однозначно определяется классами $[a]$ и $[b]$ и не зависит от выбора их представителей a и b. Доказательство этого мы оставляем читателю в качестве упражнения.

- Ассоциативность операции $[a] + [b] = [a + b]$ следует из ассоциативности обычного сложения.
- Нейтральным элементом является $[0]$.
- Обратным элементом для $[a]$ будет $[-a]$.

Итак, множество элементов $\{[0], [1], \dots, [n-1]\}$ образует группу относительно операции $+$.

Определение 6.1.7. Группа, образованная множеством $\{[0], [1], \dots, [n-1]\}$ классов вычетов по модулю n с операцией (1.1), называется *группой классов вычетов по модулю* n и обозначается $\mathbb{Z}_n$.

Умножение в $\mathbb{Z}_n$ вводится при помощи правила:

$$[a] \cdot [b] = [a \cdot b].$$

П р и м е р 6.1.5. Приведём таблицы сложения и умножения для $\mathbb{Z}_5$ и $\mathbb{Z}_4$.

Доказательство. Ради простоты квадратные скобки в обозначениях пропущены.

$(\mathbb{Z}_5, +)$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$(\mathbb{Z}_5, \cdot)$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

□

$(\mathbb{Z}_4,+)$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	4
2	2	3	4	0
3	3	4	0	1

$(\mathbb{Z}_4,\cdot)$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Определение 6.1.8. *Кольцом* называется множество K с операциями сложения и умножения, обладающими следующими свойствами:

1. относительно сложения K — абелева группа (называемая *аддитивной группой кольца* K);

2. для любых a, b, $c \in K$ выполняется *(дистрибутивность умножения относительно сложения)*

$$a(b+c) = ab + ac, \quad (a+b)c = ac + bc.$$

Определение 6.1.9. *Полем* называется коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, в котором всякий ненулевой элемент обратим.

Приведённые выше таблицы показывают, что $\mathbb{Z}_5$ — поле, а $\mathbb{Z}_4$ — нет, поскольку элемент [2] необратим.

Определение 6.1.10. Группа называется конечной (соответственно бесконечной), если она состоит из конечного (соответственно бесконечного) числа элементов. Число элементов конечной группы называется ее порядком. Для порядка конечной группы G будем использовать обозначение $|G|$.

Группа $\mathbb{Z}_n$ является циклической группой с образующим элементом [1], и эта группа имеет порядок n в соответствии со

6.1.2 Подстановки. Симметрическая группа S_n (группа подстановок)

Определение 6.1.11. Всякое взаимно однозначное отображение τ множества $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ первых n натуральных чисел на себя называется *подстановкой* n-й степени, причем, очевидно, всякая подстановка τ может быть записана при помощи двух перестановок, подписанных одна под другой

$$\tau = \begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_n \\ \tau(1) & \ldots & \tau(n) \end{pmatrix}, \tag{6.1.1}$$

Через τ_k здесь обозначается то число, в которое при подстановке τ переходит число i_k , $k = 1, 2, \ldots, n$.

П р и м е р 6.1.6. Рассмотрим подстановку для $n = 5$:

$$\tau = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Мы скажем, что число 3 переходит в число 2, число 5 переходит в 4, число 1 переходит в 1 (или остаётся на месте), число 4 переходит в 3, и, наконец, число 2 переходит в 5. Таким образом, две перестановки, записанные друг под другом в виде (6.1.1), определяют некоторое взаимно однозначное отображение множества из первых пяти натуральных чисел на себя, т. е. отображение, которое каждому из натуральных чисел 1, 2, 3, 4, 5 ставит в соответствие одно из этих же натуральных чисел, причем разным числам ставятся в соответствие различные же числа.

Взаимно однозначное отображение множества их первых пяти натуральных чисел, которые мы получили при помощи (6.1.1), можно было получить, записывая одну под другой и некоторые другие пары перестановок из пяти символов. Эти записи получаются из (6.1.1) путем нескольких транспозиций (перестановок) столбиков; таковы, например,

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \tau = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Во всех этих записях 3 переходит в число 2, число 5 переходит в 4, и т. д.

Таким образом подстановку τ (6.1.1) можно записать различными способами.

Определение 6.1.12 (Канонический вид подстановки)**.** Всякую подстановку n-й степени τ можно быть записана в виде

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \tau(1) & \dots & \tau(n) \end{pmatrix}, \tag{6.1.2}$$

который будем называть ***каноническим видом подстановки***. При такой записи различные подстановки отличаются друг от друга перестановками, стоящими в нижней строке.

Записав подстановку в каноническом виде, мы в том числе, получаем уже изученный нами объект — перестановки (см. параграф 2.1.5).

Примером подстановки n-й степени служит тождественная подстановка (также тождественная перестановка)

$$e = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ 1 & \dots & n \end{pmatrix},$$

при котором на месте остаются все символы.

Структура подстановки. Понятие цикла

Определение 6.1.13. Подстановка $\tau \in S_n$ называется *циклом* длины p и обозначается через $(i_1, i_2, \dots, i_p)$, если она циклически переставляет $i_1, i_2, \dots, i_p$, т.е. $\tau(i_1) = i_2$, $\tau(i_2) = i_3, \dots, \tau(i_p) = i_1$, а все остальные числа оставляет на месте. Очевидно, что порядок цикла длины p равен p. Циклы τ_1 и τ_2 называются *независимыми*, если среди фактически переставляемых ими чисел нет общих; в этом случае $\tau_1\tau_2 = \tau_2\tau_1$.

Замечание 22. Всякая подстановка однозначно разлагается в произведение независимых циклов.

Доказательство. Алгоритм составления цикла:

- Берем подстановку, смотрим, во что переходит первый элемент.
- Полученный элемент пишем за первым элементом и находим его образ под действием подстановки.
- Как только образ совпадает с элементом, с которого началось построение цикла, закрываем цикл.
- Дальше берем любой элемент, не входящий в уже выписанные циклы и начинаем построение нового цикла.

□

П р и м е р 6.1.7. Рассмотрим следующую подстановку

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 7 & 4 & 8 & 3 & 2 & 1 & 9 \end{pmatrix} = (158)(2637)(4)(9) = (158)(2637).$$

Так как $1 \to 5 \to 8 \to 1$, то получаем цикл (158). Цепочка $2 \to 6 \to 3 \to 7 \to 2$ дает цикл (2637), а 9 остается на месте.

Умножение подстановок

Определение 6.1.14. Операция умножения на подстановках определяется как композиция отображений, причем знак композиции $\circ$ обычно опускают

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix}.$$

П р и м е р 6.1.8. Пусть

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (125)(364),$$

$$\tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 3 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix} = (1462)(3)(5).$$

Тогда

$$\tau_1\tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 3 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 6 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

или

$$\tau_1\tau_2 = (125)(364)(1462) = (1365)(2)(4) = (1365).$$

П р и м е р 6.1.9. Перемножим две перестановки из предыдущего примера в обратном порядке:

$$\tau_2\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 3 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 2 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

или

$$\tau_2\tau_1 = (1462)(125)(364) = (1)(2543)(6) = (2543).$$

Умножение подстановок, вообще говоря, некоммутативно. Действительно, для рассмотренных выше подстановок τ_1 и τ_2 нами получено $\tau_1\tau_2 \neq \tau_2\tau_1$.

Теорема 6.1.27. *Множество S_n относительно введённой бинарной операции умножения $\circ$ образует группу.*

Доказательство. Проверим три свойства, которые задают группу.

- Умножение подстановок ассоциативно. Действительно, пусть

  $$\tau_1 = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}.$$

  Тогда

  $$(\tau_1\tau_2)\,\tau_3 = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix}$$

  и

  $$\tau_1\,(\tau_2\tau_3) = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix}.$$

  Откуда $(\tau_1\tau_2)\,\tau_3 = \tau_1\,(\tau_2\tau_3)$.

- Существует нейтральный элемент e (тождественная подстановка). Очевидно, что произведение любой подстановки τ на тождественную подстановку e, а также произведение e на τ, равно τ:

  $$\tau e = e\tau = \tau.$$

- Для любого элемента $\tau \in S_n$ существует $\tau^{-1} \in S_n$. Действительно, пусть

  $$\tau = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix},$$

  Тогда, как легко проверить, подстановка

  $$\tau^{-1} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix},$$

  получающаяся из τ переменой мест верхней и нижней строк, удовлетворяет равенствам

  $$\tau\tau^{-1} = \tau^{-1}\tau = e.$$

□

П р и м е р 6.1.10. Найти подстановку, обратную данной

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 7 & 4 & 8 & 3 & 2 & 1 & 9 \end{pmatrix} = (158)(2637)(4)(9).$$

Доказательство. Подстановка τ^{-1}, обратная подстановке τ будет иметь вид

$$\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 4 & 8 & 3 & 2 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Приведем её к каноническому виду:

$$\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 7 & 6 & 4 & 1 & 2 & 3 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

□

П р и м е р 6.1.11. Найти порядок элемента

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

в группе S_5.

Доказательство. Поскольку

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (123)(45),$$

то

$$\tau^2 = (123)(45)(123)(45) = (132), \quad \tau^3 = (123)(45)(132) = (45), \quad \tau^4 = (45)(123)(45) = (123),$$
$$\tau^5 = (123)(45)(123) = (132)(45), \quad \tau^6 = (132)(45)(123)(45) = e.$$

Поскольку, получили тождественную подстановку, то порядок элемента τ равен 6.

Ответ: $\operatorname{ord}\tau = 6$. □

6.1.3 Разбиение на смежные классы

Определение 6.1.15. Пусть G — группа и H — ее подгруппа. Будем говорить, что элементы $g_1, g_2 \in G$ сравнимы по модулю H, и писать

$$g_1 \equiv g_2 \pmod H,$$

если

$$g_1^{-1} g_2 \in H,$$

т.е. $g_2 = g_1 h$, где $h \in H$.

Это определение обобщает определение сравнимости целых чисел по модулю n, которое получается в случае $G = \mathbb{Z}$, $H = \mathbb{Z}_n$.

Покажем, что определенное таким образом отношение сравнимости по модулю H является отношением эквивалентности:

- $g \equiv g \pmod H$, поскольку $g^{-1}g = e \in H$;
- если $g_1 \equiv g_2 \pmod H$, т.е. $g_1^{-1}g_2 \in H$, тогда и $g_2 \equiv g_1 \pmod H$, поскольку $g_2^{-1}g_1 = (g_1^{-1}g_2)^{-1} \in H$;
- если $g_1 \equiv g_2 \pmod H$ и $g_2 \equiv g_3 \pmod H$, т.е. $g_1^{-1}g_2, g_2^{-1}g_3 \in H$, тогда и $g_1 \equiv g_3 \pmod H$, поскольку $g_1^{-1}g_3 = (g_1^{-1}g_2)(g_2^{-1}g_3) \in H$.

Классы этой эквивалентности называются *(левыми) смежными классами группы* G по подгруппе H. Ясно, что смежный класс, содержащий элемент g, имеет вид

$$gH = \{gh :\ h \in H\}.$$

Одним из смежных классов является сама подгруппа H.

Поскольку умножение в группе не обязано быть коммутативным, мы получим, вообще говоря, другое отношение эквивалентности, взяв вместо условия (10) аналогичное ему условие

$$g_2^{-1} g_1 \in H$$

Классы этой эквивалентности называются *правыми смежными классами группы* G по подгруппе H. Они имеют вид

$$Hg = \{hg :\ h \in H\}.$$

Заметим, что инверсия $g \mapsto g^{-1}$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами левых и правых смежных классов. А именно,

$$(gH)^{-1} = Hg^{-1}.$$

Лемма 10. *Левые смежные классы G по подгруппе H либо не пересекаются, либо совпадают.*

Доказательство. Достаточно доказать, что если классы пересекаются, то они совпадают. Рассмотрим два класса aH и bH с общим элементом c. Докажем, что $aH \subseteq bH$. Пусть $g = a \cdot h$, $h \in H$ принадлежит aH.

Известно:

$$c = a \cdot h_a = b \cdot h_b,\ h_a, h_b \in H\ \Rightarrow a = b \cdot h_b \cdot h_a^{-1}.$$

Тогда

$$g = a \cdot h = b \cdot h_b \cdot h_a^{-1} \cdot h \in bH,$$

поскольку

$$h_b \cdot h_a^{-1} \cdot h \in H.$$

Значит, $aH \subseteq bH$. Аналогично $bH \subseteq aH$. $\square$

П р и м е р 6.1.12. Смежные классы аддитивной группы $\mathbb{C}$ по подгруппе $\mathbb{R}$ изображаются на комплексной плоскости прямыми, параллельными вещественной оси (см. рис. 6.1(a)).

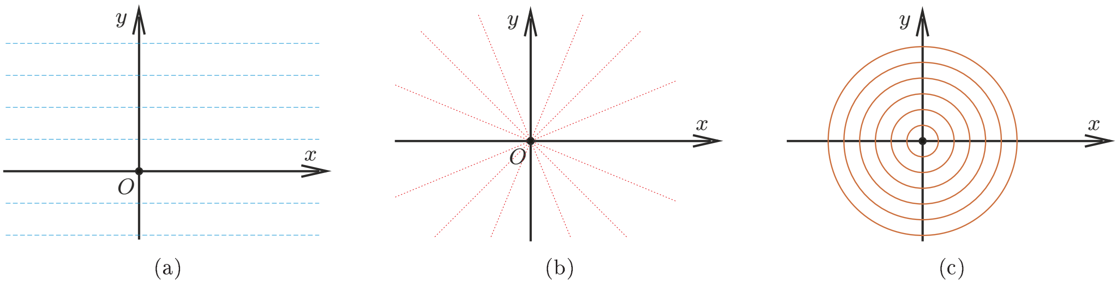


Рис. 6.1: (a): $(\mathbb{C}, +)$ по подгруппе $\mathbb{R}$; (b): $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ по подгруппе $\mathbb{R}_+^*$; (c): $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ по подгруппе $\mathbb{T}$.

П р и м е р 6.1.13. Смежные классы мультипликативной[1] группы $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ по подгруппе $\mathbb{R}_+^*$ положительных чисел — это лучи, исходящие из начала координат (см. рис. 6.1(b)).

П р и м е р 6.1.14. Смежные классы аддитивной группы $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ по подгруппе $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}^*;\ |z| = 1\}$ на комплексной плоскости — окружности с центром в начале координат (см. рис. 6.1(c)).

[1]Множество $(G^*, \circ)$ — множество обратимых элементов G относительно некоторой бинарной операции $\circ$. Таким образом звездочка над неким кольцом означает, что рассматриваются только обратимые элемента этого кольца. Например, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \backslash \{0\}$.

П р и м е р 6.1.15. Рассмотрим симметрическую группу S_3. Положим

$$\tau_1 = e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$
$$\tau_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tau_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Приведите таблицу умножения для группы S_3.
- Доказать, что подмножества $H_1 = \{e, \tau_2\}$, $H_2 = \{e, \tau_4, \tau_5\}$ — подгруппы. (подгруппа H_2 называется *подгруппой четных перестановок* $A_3 = H_2 \subset S_3$).
- Найдите правые и левые смежные классы для H_1 и для H_2.

Доказательство. **1.** Ради простоты вместо τ_k будем писать просто k.

$(S_3,\circ\ )$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	1	5	6	3	4
3	3	4	1	2	6	5
4	4	3	6	5	1	2
5	5	6	2	1	4	3
6	6	5	4	3	2	1

2. Из таблицы легко видеть, что $H_1 = \{e, \tau_2\}$, $H_2 = \{e, \tau_4, \tau_5\}$ — подгруппы. Действительно, из равенств

$$e\tau_2 = \tau_2 e = \tau_2, \quad \tau_2\tau_2 = e,$$

вытекает, что H_1 подгруппа, а из равенств

$$e\tau_4 = \tau_4 e = \tau_4, \quad e\tau_5 = \tau_5 e = \tau_5, \quad \tau_4\tau_5 = e = \tau_5\tau_4, \quad \tau_4\tau_4 = \tau_5, \quad e\tau_5\tau_5 = \tau_4,$$

что H_2 — подгруппа.

3. Пользуясь таблицей умножения находим левые смежные классы:

Таким образом, для $H_1 = \{e, \tau_2\}$ имеем 3 различных левых смежных класса $\{\tau_1, \tau_2\}$, $\{\tau_3, \tau_4\}$, $\{\tau_5, \tau_6\}$. Действительно, Аналогично строятся правые смежные классы: $\{\tau_1, \tau_2\}$, $\{\tau_3, \tau_5\}$, $\{\tau_4, \tau_6\}$.

$eH_1 = \{\tau_1, \tau_2\}$	$\tau_3 H_1 = \{\tau_3, \tau_4\}$	$\tau_5 H_1 = \{\tau_5, \tau_6\}$
$\tau_2 H_1 = \{\tau_1, \tau_2\}$	$\tau_4 H_1 = \{\tau_4, \tau_3\}$	$\tau_6 H_1 = \{\tau_6, \tau_5\}$

Возьмем теперь $H_2 = \{e, \tau_4, \tau_5\}$ — подгруппу четных перестановок. Тогда опять из таблицы, построенной для группы S_3 получаем

Левые смежные классы			*Правые смежные классы*	
$eH_2 = \{\tau_1, \tau_4, \tau_5\}$	$\tau_2 H_2 = \{\tau_2, \tau_3, \tau_6\}$		$H_2 e = \{\tau_1, \tau_4, \tau_5\}$	$H_2\tau_2 = \{\tau_2, \tau_3, \tau_6\}$
$\tau_4 H_2 = \{\tau_1, \tau_4, \tau_5\}$	$\tau_3 H_2 = \{\tau_2, \tau_3, \tau_6\}$		$H_2\tau_4 = \{\tau_1, \tau_4, \tau_5\}$	$H_2\tau_3 = \{\tau_2, \tau_3, \tau_6\}$
$\tau_5 H_2 = \{\tau_1, \tau_4, \tau_5\}$	$\tau_6 H_2 = \{\tau_2, \tau_3, \tau_6\}$		$H_2\tau_5 = \{\tau_1, \tau_4, \tau_5\}$	$H_2\tau_6 = \{\tau_2, \tau_3, \tau_6\}$

Для нее левые и правые смежные классы совпадают и состоят из элементов $\{\tau_1, \tau_4, \tau_5\}$ и $\{\tau_2, \tau_3, \tau_6\}$. □

6.1.4 Теорема Лагранжа

Лемма 11. *В каждом левом (правом) смежном классе группы по конечной подгруппе число элементов совпадает с порядком этой подгруппы.*

Доказательство. Пусть $H = \{h_1 = e, h_2, \dots, h_m\}$ — конечная подгруппа группы $(G, \circ)$. Тогда для элемента $a \in G$ левый смежный класс aH состоит из элементов вида

$$a \circ h_1, \ a \circ h_2, \ \dots, \ a \circ h_m.$$

Поэтому $|aH| \leqslant |H|$. Предположим, что $|aH| < |H|$. Т.е. найдутся такие элементы $h_k \neq h_m$, $h_k \in H$, $h_m \in H$, что

$$a \circ h_k = a \circ h_m,$$

т.е. существует $g \in G$, что $a \circ h_k = a \circ h_m = g$. Откуда $h_k = h_m = a^{-1} \circ g$ — противоречие. Следовательно, $|aH| = |H|$. □

Теорема 6.1.28 (Теорема Лагранжа)**.** *Порядок каждой подгруппы конечной группы делит порядок группы.*

Доказательство. Пусть $(G, \cdot)$ — конечная группа, а H — ее подгруппа. Рассмотрим левостороннее разложение группы G по подгруппе H. Тогда по лемме все левые смежные классы равномощны, и их мощность равна порядку подгруппы H. Каждый элемент множества G лежит ровно в одном левом смежном классе, поэтому

$$|G| = |H| \cdot \ \{\text{число левых смежных классов}\}.$$

Отсюда $|H|$ делит $|G|$. □

Определение 6.1.16. Число смежных классов группы G по H (левых или правых, безразлично), если оно конечно, называется *индексом* подгруппы H и обозначается через $|G : H|$.

Тогда теорему Лагранжа можно записать в виде:

$$|G| = |H| \cdot |G : H|.$$

Контрольные вопросы.

1. Сформулируйте определение группы.
2. Чему равен порядок группы S_5?
3. Сформулируйте теорему Лагранжа.

Упражнения к 6.1

Упражнение 6.1.1. *Какие из следующих множеств образуют группу относительно операции сложения* $(+)$*? Умножения* $(\cdot)$*?*

(a) *Множество натуральных чисел* $\mathbb{N}$;

(b) *Множество целых чисел* $\mathbb{Z}$;

(c) *Множество вещественных чисел* $\mathbb{R}$;

(d) *Множество рациональных чисел* $\mathbb{Q}$;

(e) *Множество иррациональных чисел* $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$;

(f) *Множество ненулевых вещественных чисел* $\mathbb{R}^*$;

(g) *Множество ненулевых рациональных чисел* $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}^*$;

(h) *Множество четных целых чисел* $2\mathbb{Z}$;

(i) *Множество нечетных целых чисел* $2\mathbb{Z} + 1$;

(j) *Множество невырожденных матриц* GL_n;

Упражнение 6.1.2. *Какие группы из предыдущего примера будут коммутативны?*

Упражнение 6.1.3. *Рассмотрим множество целых чисел с операцией* $\circ$*, определённой следующим образом:* $m \circ n = m + (-1)^m \cdot n$*, для любых* m*,* $n \in \mathbb{Z}$*. Докажите, что* $(\mathbb{Z}, \circ)$ *— группа. Будет ли эта группа Абелевой?*

Упражнение 6.1.4. *Приведите пример множества G с операцией $\circ$, в котором существует элемент $g \in G$ для которого существует только правый обратный элемент, а левый обратный не существует (или наоборот). При этом в множестве G с операцией $\circ$ существует нейтральный элемент и свойство ассоциативности выполняется (иначе говоря, выполнены свойства группы, кроме существования обратного элемента).*

Упражнение 6.1.5. *Определите порядки всех элементов группы $\mathbb{Z}_8$. каков порядок элемента a группы $\mathbb{Z}_n$?*

Упражнение 6.1.6. *Определите порядки всех элементов мультипликативной*[2] *группы $\mathbb{Z}_{10}^*$. Является ли группа $\mathbb{Z}_{10}^*$ циклической?*

Упражнение 6.1.7. *Определите порядки всех элементов мультипликативной группы $\mathbb{Z}_{21}^*$. Является ли группа $\mathbb{Z}_{21}^*$ циклической?*

Упражнение 6.1.8. *Определите порядки всех элементов группы S_4.*

Упражнение 6.1.9. *Определите порядок элементов $g_1 = (i_1 \dots i_k)$, $g_2 = (i_1 \dots i_k)(j_1 \dots j_l)$, $g_3 = (i_1 \dots i_k) \cdot (j_1 \dots j_l) \cdot (s_1 \dots s_r)$ группы S_n, представленных в виде независимых циклов.*

Упражнение 6.1.10. *Опишите все подстановки группы S_n (a) чётного порядка; (b) нечётного порядка. Каких подстановок больше в S_n чётного порядка или нечётного порядка?*

Упражнение 6.1.11. *Образует ли группу по сложению каждое из следующих множеств:*

a) $G_1 = \{\frac{m}{126} :\ m \in \mathbb{N}\}$;

b) $G_2 = \{\frac{m}{126} :\ m \in \mathbb{Z}\}$;

c) $G_3 = \{\frac{m}{126} :\ m \in \mathbb{Q}\}$;

d) $G_4 = \{\frac{m}{126} :\ m \in \mathbb{Z},\ (m, 126) = 1\}$. *Последнее условие в определении множества G_4 означает, что рассматриваются только несократимые дроби.*

Упражнение 6.1.12. *Образуют ли какие-либо множества из задания 6.1.11*

1. *Кольцо относительно стандартных сложения и умножения;*

2. *Поле относительно стандартных сложения и умножения.*

Определение 6.1.17. Элементы a, b кольца K называются *делителями нуля*, если $a \neq 0$, $b \neq 0$, $ab = 0$ в кольце K.

Определение 6.1.18. Элемент a кольца K называется нильпотентным, если найдется такое натуральное число n, что $a^n = 0$ в кольце K. В частности, 0 — нильпотентный элемент любого кольца.

Упражнение 6.1.13. *В кольцах вычетов по модулям* 99, 77, 65, 127, 173, 197, 202 *найдите все делители нуля и все нильпотентные элементы. Есть ли среди перечисленных колец поля? Ответ обоснуйте.*

Упражнение 6.1.14. *Укажите какие-нибудь делители нуля и нильпотентные элементы кольца* 12×12 *матриц над полем комплексных чисел. Покажите, что это кольцо не является коммутативным.*

Упражнение 6.1.15. *Приведите пример кольца без делителей нуля, не являющегося полем.*

Ответы: 6.1.1 ???? **6.1.2** Все, кроме $(GL_n, \cdot)$. **6.1.3** В группе нет коммутативности, например $1 \circ 2 \neq 2 \circ 1$. **6.1.4** Рассмотрим множество матриц бесконечной размерности (как по строкам, так и по столбцам) со стандартной операцией умножения матриц. Тогда нейтральным элементом будет единичная матрица. Свойство ассоциативности выполнено. Рассмотрим два элемента $g_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$ и $g_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$. Тогда для матрицы g_1 существует правая обратная матрица, а левая обратная не существует. Аналогично для g_2 существует левая обратная (поскольку $g_1 \cdot g_2 = e$), но правая обратная не существует. **6.1.5** $\mathrm{ord}(1,3,5,7) = 8$, $\mathrm{ord}(2,6) = 4$, $\mathrm{ord}(4) = 2$; $\mathrm{ord}\, a = \frac{n}{(n,a)}$. **6.1.6** Группа $\mathbb{Z}_{10}^* = \{1,3,7,9\}$ — циклическая, т.к. $\mathrm{ord}(1) = 1$, $\mathrm{ord}(3) = 4$, $\mathrm{ord}(7) = 4$, $\mathrm{ord}(9) = 2$. Откуда[3] $\mathbb{Z}_{10}^* =< 3 >$ и $\mathbb{Z}_{10}^* =< 7 >$. **6.1.7** Группа $\mathbb{Z}_{21}^*$ состоит из $12 = (3-1)(7-1)$ элементов: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 11, 13, 16, 17, 19, 20. Группа не является циклической, $\mathrm{ord}(1) = 1$, $\mathrm{ord}(8,13,20) = 2$, $\mathrm{ord}(4,16) = 3$, $\mathrm{ord}(2,5,10,11,17,19) = 6$. **6.1.8** $\mathrm{ord}(e) = 1$, $\mathrm{ord}((12),(13),(14),(23),(24),(34),(12)(34),(13)(24),(14)(23)) = 2$, $\mathrm{ord}((123),(124),(132),(134),(234),(243),(142),(143)) = 3$, $\mathrm{ord}((1234),(1243),(1342),(1324),(1432),(1423)) = 4$. **6.1.9** $\mathrm{ord}\, g_1 = k$, $\mathrm{ord}\, g_2 = \text{НОК}(k,l)$, $\mathrm{ord}\, g_3 = \text{НОК}(k,l,r)$. **6.1.10** (a) Подстановка чётного порядка содержит хотя бы один цикл чётной длины. (b) Подстановка нечётного порядка состоит из независимых циклов только нечётной длины. Чётных больше. **6.1.11** (a) нет; (b) да; (c) да; (d) нет. **6.1.12** (1-a) нет; (1-b) нет; (1-c) да; (1-d) нет. (2-a) нет; (2-b) нет; (2-c) да; (2-d) нет. **6.1.13** Нильпотентные элементы везде это 0, а в $\mathbb{Z}_{99}$ ещё 33, 66. ????? **6.1.14** ????? **6.1.15** $\mathbb{Z}$.

[2] Множество $\mathbb{Z}_n^*$ состоит из элементов, которые взаимнопросты с n, т.е. для них существует обратный элемент.

[3] Число элементов N в группе $\mathbb{Z}_{10}^*$ можно подсчитать, исходя из формулы $N = \varphi(n)$, где $\varphi(n)$ — функция Эйлера. Например $\varphi(p_1 \cdot p_2) = (p_1 - 1)(p_2 - 1)$, $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$.

Глава 7

Вопросы к зачёту

1. Алгебраическая, тригонометрическая, показательная форма комплексного числа. Формула Эйлера. Извлечение корня n-ой степени.

2. Перестановки, транспозиция, инверсия. Определитель $n \times n$. Знак произвольного слагаемого $a_{\alpha_1\beta_1}a_{\alpha_2\beta_2}\ldots a_{\alpha_n\beta_n}$ из определителя.

3. Свойства определителей $n \times n$. Разложение определителя по строке, столбцу. Теорема Лапласа (теорема Лапласа б/д).

4. Обратная матрица. Правила Крамера.

5. Матрицы элементарных преобразований. Метод Гаусса-Жордана построения обратной матрицы.

6. Размерность, базис. Переход к новому базису. Связь координат вектора в различных базисах.

7. Ранг матрицы. Элементарные преобразования и ранг матрицы. Теорема о базисном миноре.

8. Метод Гаусса. Теорема Кронекера-Капелли.

9. Линейное пространства. Способы задания.

10. Пересечение и сумма подпространств. Формула Гроссмана.

11. Линейное многообразие, способы задания. Размерность многообразий и их взаимное расположение.

12. Скалярное произведение. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта.

13. Матрица Грама. Критерий линейной зависимости. Вычисление матрицы Грама при помощи метода ортогонализации. Расстояния между многообразиями.

14. Линейные преобразования. Переход к новому базису.

15. Собственные числа и собственные вектора.

16. Билинейная функция. Симметричная и кососимметричная функция. Переход к другому базису.

17. Приведение квадратичных форм к каноническому виду: метод Лагранжа и Гаусса.

18. Формула Якоби. Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.

19. Закон инерции квадратичных форм.

20. Понятие группы. Группа классов вычетов по модулю n.

21. Симметрическая группа S_n.

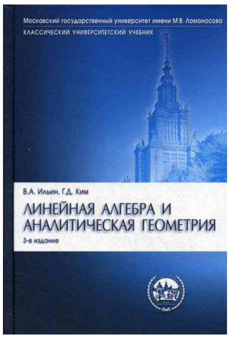
22. Разбиение на смежные классы. Теорема Лагранжа.

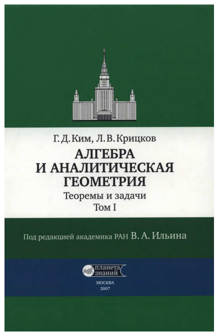
Литература

[1] *В. И. Арнольд.* Динамика, статистика и проективная геометрия полей Галуа // МЦНМО, 2005.

[2] *Л. И. Головина.* Линейная алгебра и некоторые ее приложения // Москва: Наука, 1985.

[3] *В. А. Ильин, Г.Д. Ким.* Линейная алгебра и аналитическая геометрия // Москва: Московский университет, 1998. — 320 с.





[4] *И. В. Проскуряков.* Сборник задач по линейний алгебре // Москва: Наука, 1966. — 381 с.

[5] *Г. Д. Ким, Л. В. Крицков.* Алгебра и аналитическая геометрия (Теоремы и задачи) (тт. I, II-2) // (тт. I, II-2)-Год: 2007 / 2003, Москва: Планета знаний / ИКД “Зерцало-М”

[6] *Р. Лидл, Г. Нидеррайтер.* Конечные поля: Том 1-2 // М.: Книга по Требованию, 2013. — 812 с.

[7] *Ken Habgood, Itamar Arel.* A condensation-based application of Cramer’s rule for solving large-scale linear systems// Journal of Discrete Algorithms (2011) Elsevier. p. 1-12. doi:10.1016/j.jda.2011.06.007

[8] *Kenneth C Habgood.* A Low Communication Condensation-based Linear System Solver Utilizing Cramer’s Rule.// PhD diss., University of Tennessee, 2011. p. 1-101. http://trace.tennessee.edu/utk_graddiss/1080

Предметный указатель