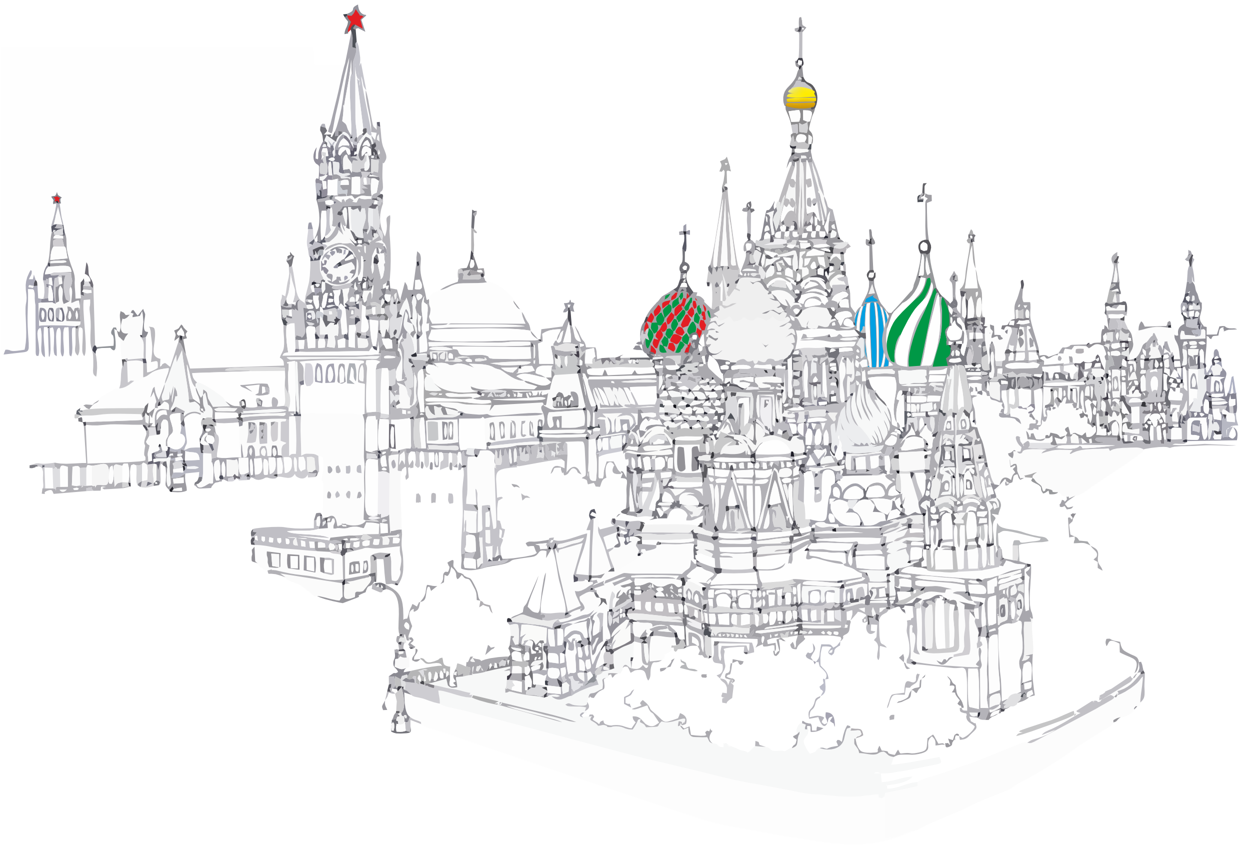
Математический анализ.

А.И. Козко.

25 марта 2024 г.



Оглавление

Введение. **7**

1 Введение в анализ **9**
1.1 Элементы теории множеств . . . 9
1.1.1 Множества и операции над ними. Теорема Моргана. . . . 9
1.1.2 Элементы математической логики . . . 11
1.1.3 Отображения и функции . . . 12
1.2 Действительные числа . . . 15
1.2.1 Натуральные, целые, рациональные числа . . . 15
1.2.2 Множество действительных чисел . . . 15
1.3 Принципы полноты множества действительных чисел . . . 16
1.3.1 Точные грани, их существование. . . . 16
1.3.2 Принцип вложенных отрезков. . . . 18
1.3.3 Теорема Лебега-Бореля. . . . 18
1.3.4 Теорема Больцано-Вейерштрасса. . . . 19
1.4 Счётные и несчётные множества. . . . 21

2 Предел и непрерывность **25**
2.1 Предел последовательности и предел функции. . . . 25
2.1.1 Определение предела последовательности. . . . 25
2.1.2 Определение предела функции. . . . 26
2.1.3 Определение предела и равносильные ему записи . . . 27
2.1.4 Единственность и ограниченность предела последовательности, предела функции. . . . 28
2.1.5 Бесконечно малые последовательности и бесконечно малые функции. . . . 29
2.1.6 Арифметические свойства предела. . . . 31
2.1.7 Предельный переход в неравенствах. . . . 32
2.1.8 Теоремы о "зажатых" переменных. . . . 33
2.1.9 Обобщения понятия предела. . . . 33
2.1.10 Вычисление предела $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$. . . . 37
2.1.11 Критерий Коши для последовательности. . . . 39
2.1.12 Теорема Вейерштрасса. . . . 40
2.1.13 Число e. . . . 42
2.1.14 Число e как сумма ряда. . . . 44
2.2 Первые сведения о сходимости ряда. . . . 46
2.2.1 Критерий Коши сходимости ряда. . . . 46
2.2.2 Признак Даламбера, Коши. . . . 46
2.2.3 Теорема Теплица. Теорема Штольца. . . . 48
2.3 Предел последовательности и функции (продолжение). . . . 49
2.3.1 Равносильность определений предела функции по Коши и по Гейне. . . . 49
2.3.2 Предел функции по базе. . . . 50
2.3.3 Теоремы о композиции предела функции. . . . 52
2.3.4 Второй замечательный предел. . . . 53
2.3.5 Символы Ландау. . . . 54
2.4 Непрерывность. . . . 56

2.4.1 Свойства непрерывных функций. Классификация точек разрыва. 56
2.4.2 Ограниченность непрерывных функций на отрезке, существование максимального элемента. 58
2.5 Монотонная функция. 60
2.5.1 Непрерывность элементарных функций. 62
2.6 Равномерная непрерывность и теорема Кантора. 63

3 Дифференцируемость функции одного переменного. 67
3.1 Дифференцируемость. 67
3.1.1 Определение дифференцируемости. 67
3.1.2 Дифференцируемость обратной функции. Правило Лейбница. 70
3.1.3 Производные основных элементарных функций. 71
3.1.4 Приложения производной. 72
3.1.5 Производные и дифференциалы высших порядков. 73
3.1.6 Эластичность и её свойства. 75
3.2 Экстремумы. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши. 77
3.2.1 Теорема Ферма. 77
3.2.2 Теорема Ролля. 78
3.2.3 Теоремы о конечных приращениях 79
3.3 Формула Тейлора. 82
3.3.1 Разложение основных функций в ряд Тейлора (ряд Маклорена) 84
3.3.2 Остаток в форме Пеано для формулы Тейлора. 87
3.3.3 Приближённые вычисления. 91
3.4 Необходимые и достаточные условия существования экстремума. 92
3.5 Неравенства Юнга, Гельдера, Минковского. 94
3.6 Направление вогнутости. Точки перегиба. 96
3.6.1 Точки перегиба 99
3.6.2 Зависимость спроса от дохода. Функции Торнквиста. 100
3.6.3 Неравенство Йенсена. 107
3.7 Правило Бернулли (Лопиталя). 109

4 Дифференциальное исчисление функций многих переменных 113
4.1 Понятие функций нескольких переменных. 113
4.1.1 Пространство $\mathbb{R}^d$. 113
4.1.2 Метрическое пространство. 114
4.2 Открытые и замкнутые множества. 114
4.2.1 Структура открытого и замкнутого множества числовой прямой. 117
4.3 Компакт и критерий компактности в n-мерном пространстве. 118
4.4 Критерий Коши для функции многих переменных. 120
4.5 Непрерывность функции многих переменных. 121
4.6 Дифференцируемость функции многих переменных. 122
4.7 Теорема о неявной функции. 128
4.8 Формула Тейлора для функции многих переменных и геометрические приложения 133
4.8.1 Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа 133
4.8.2 Геометрические приложения. 135
4.9 Экстремумы функций многих переменных. Квадратичные формы. 137
4.9.1 Метод наименьших квадратов. 144
4.9.2 Экстремум неявно заданной функции 146
4.10 Условный экстремум 147
4.11 Окаймлённый гессиан 154
4.11.1 Случай двух переменных одно уравнение связи 154
4.11.2 Случай трёх переменных одно уравнение связи 155
4.11.3 Случай трёх переменных два уравнение связи 155
4.11.4 Общий случай 155
4.12 Наибольшее (наименьшее) значение в области 157
4.13 Приложение теории условного экстремума к экономической теории 160

4.13.1 Задача рационального поведения потребителя на рынке. Функции спроса по Маршаллу. Функция косвенной полезности, её свойства. . . . 161
4.13.2 Задача минимизации расхода потребителя при фиксированном уровне полезности. Функции спроса по Хиксу. Функция расходов, её свойства . . . 164

5 Интегральное исчисление функций одного переменного 167
5.1 Неопределенный интеграл . . . 167
5.2 Решение задач по теме неопределенный интеграл . . . 168
5.3 Интегрирование рациональных функций . . . 171
5.4 Интегрирование иррациональных выражений . . . 178
5.4.1 Интегрирование некоторых выражений, содержащие радикалы . . . 178
5.4.2 Интегрирование биноминальных дифференциалов . . . 179
5.4.3 Подстановки Эйлера . . . 180
5.4.4 Интегрирование рациональных функций с иррациональностью вида $\sqrt{ax^2+bx+c}$ в знаменателе . . . 181
5.5 Интегрирование тригонометрических функций . . . 188
5.5.1 Интегрирование функций вида $R(\sin x, \cos x)$ . . . 188
5.5.2 Некоторые тригонометрические интегралы и их упрощения . . . 190
5.6 Определенный интеграл Римана . . . 193
5.6.1 Задача о площади плоской фигуры. . . . 193
5.7 Суммы Дарбу . . . 198
5.8 Критерий интегрируемости и критерий Лебега . . . 200
5.9 Формула Ньютона-Лейбница . . . 201
5.9.1 Обобщение формулы Ньютона Лейбница. Лестница Кантора. . . . 202
5.9.2 Формула Тейлора с остатком в интегральном виде. . . . 204
5.10 Квадратурные формулы . . . 205
5.10.1 Оценки и асимптотические равенства некоторых квадратурных формул . . . 205
5.10.2 Формула Эйлера-Маклорена . . . 206
5.10.3 Интерполяционный полином Лагранжа . . . 209
5.10.4 Квадратурная формула Симпсона и оценки погрешности квадратурных формул . . . 210
5.11 Теоремы о среднем . . . 215
5.11.1 Преобразование Абеля и вторая теорема о среднем . . . 216
5.12 Несобственный интеграл . . . 218
5.13 Приложения интеграла . . . 221
5.13.1 Площади . . . 221
5.13.2 Объемы . . . 222
5.13.3 Длина кривой . . . 223
5.14 Приложения определенного интеграла к задачам экономики . . . 226
5.14.1 Объем выпускаемой продукции, дисконтированный доход. . . . 226
5.14.2 Приложения определенного интеграла к задачам экономики: коэффициент Джини . . . 227

6 Ряды 229
6.1 Знакопостоянные ряды . . . 229
6.1.1 Признаки Коши (радикальный и интегральный) . . . 230
6.1.2 Признак Куммера и Гаусса . . . 232
6.2 Знакопеременные ряды . . . 237
6.2.1 Действия над рядами . . . 240
6.2.2 Произведение рядов . . . 242
6.3 Функциональные ряды . . . 243
6.4 Степенные ряды . . . 254
6.5 Бесконечные произведения . . . 256
6.6 Методы суммирования рядов . . . 262
6.7 Вычисление некоторых сумм. . . . 265

7 Ряды Фурье. 267

7.1 Общие ряды Фурье . . . 267
7.2 Функции ограниченной вариации. Тригонометрический ряд Фурье . . . 270
7.2.1 Тригонометрический ряд. Ортогональная система. . . . 270
7.2.2 Функция ограниченной вариации . . . 275
7.3 Ядра Дирихле, Фейера, Джексона-Стечкина. . . . 278
7.4 Критерий сходимости ряда Фурье к s для 2π -периодичных функций . . . 281
7.4.1 Признаки сходимости . . . 282
7.4.2 Критерий сходимости с помощью суммирования методом среднего арифметического $(C, 1)$ . . . 284
7.5 Модуль непрерывности. Теорема Джексона-Стечкина . . . 285

8 Интегралы зависящие от параметра 289

8.1 Интегралы, зависящие от параметра . . . 289
8.2 Несобственные интегралы зависящие от параметра . . . 293
8.3 Гамма-функция . . . 302
8.4 Преобразования Фурье . . . 308
8.4.1 Наводящие соображения . . . 308
8.5 Решение уравнение теплопроводности . . . 314

9 Интегральное исчисление функций многих переменных. 317

9.1 Кратный интеграл. Критерий Лебега. . . . 317
9.1.1 Определение, условия интегрируемости . . . 317
9.1.2 Суммы Дарбу. . . . 318
9.1.3 Замена переменных. . . . 324
9.2 Несобственный интеграл. . . . 330
9.3 Площадь поверхности . . . 335
9.4 Криволинейный интеграл. . . . 344
9.5 Формула Грина. . . . 347
9.6 Формула Гаусса-Остроградского. . . . 352
9.7 Формула Стокса. . . . 357
9.8 Векторный анализ. . . . 359

Предметный указатель. 362

10 Приложение. Таблица интегралов 369

Введение.

Введение писать совсем неохота. Напишу как-нибудь потом. Когда будет побольше свободного времени.

Посвящается началу священной сессии!!! Наслаждайтесь!!!!!!!!

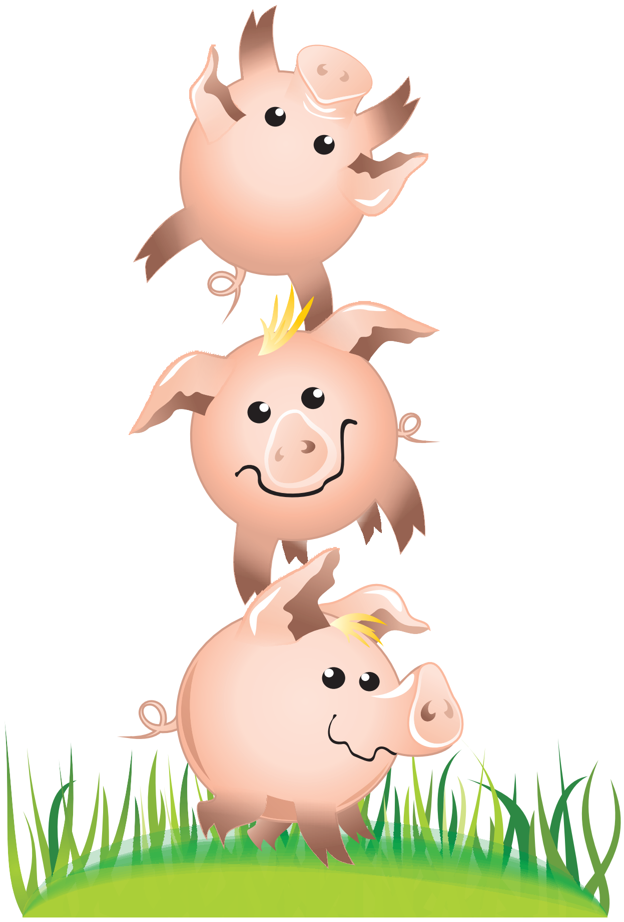


Рис. 1:

Глава 1

Введение в анализ

1.1 Элементы теории множеств

1.1.1 Множества и операции над ними. Теорема Моргана.

Понятие *множества* относится к основным первичным понятиям математики. Множество состоит из *элементов* . То, что элемент a принадлежит множеству $\mathcal{M}$, записывают так: $a \in \mathcal{M}$. Множество без элементов называется *пустым* и обозначается символом $\emptyset$.

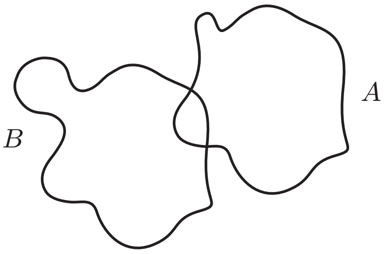


Рис. 1.1:

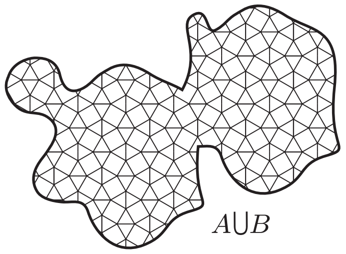


Рис. 1.2:

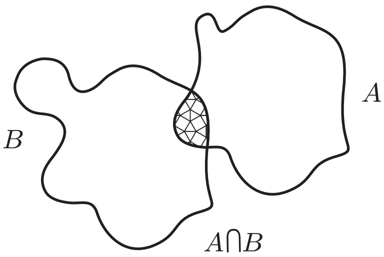


Рис. 1.3:

> **Определение 1.1.1.** Множество A называется *подмножеством* множества B, если любой элемент a множества A является также элементом множества B. Это обозначается так: $A \subseteq B$.

Очевидно, что пустое множество является подмножеством любого множества.

> **Определение 1.1.2.** Множества A и B называются *равными*, если любой элемент множества A является также элементом множества B и наоборот, любой элемент множества B является элементом множества A.

Иными словами, одновременно $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. Для обозначения равенства множеств используется обычный символ: $A = B$. Часто при рассуждениях бывает удобно использовать операции над множествами.

> **Определение 1.1.3.** *Объединением* множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, входящих хотя бы в одно из этих множеств. Оно обозначается $A \bigcup B$.
>
> $$A \cup B = \{x : x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

> **Определение 1.1.4.** *Пересечением* множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, вхо-

дящих одновременно в каждое из этих множеств. Оно обозначается $A\bigcap B$.

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Обычно рассматриваемые множества являются подмножествами некоторого основного множества $\mathcal{M}$, например, подмножества числовой прямой и т.д.

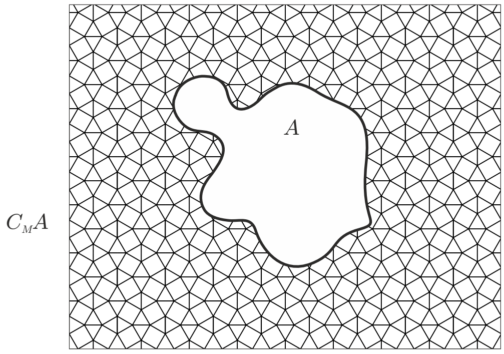


Рис. 1.4: Дополнение множества A

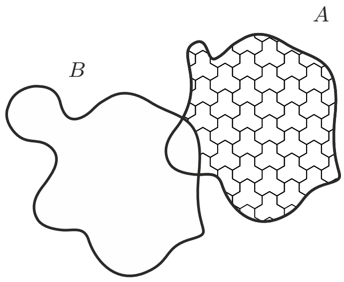


Рис. 1.5: $A \setminus B$

Определение 1.1.5. Пусть $A \subseteq \mathcal{M}$. *Дополнением* множества A называется множество, состоящее из тех элементов $\mathcal{M}$, которые не входят в множество A. Оно обозначается $C_{\mathcal{M}}A$.

$$C_{\mathcal{M}}A = \{x : x \notin A \cap x \in \mathcal{M}\}.$$

Определение 1.1.6 (Разность множеств)**.** *Разность* множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, входящих в множество A и при этом не лежащих в множестве B. Оно обозначается $A \setminus B$.

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

Перечислим ряд свойств операций над множествами.

Теорема 1.1.1. *Операции над множествами обладают следующими свойствами:*

1. $A\bigcup B = B\bigcup A$, $A\bigcup(B\bigcup C) = (A\bigcup B)\bigcup C$,

2. $A\bigcap B = B\bigcap A$, $A\bigcap(B\bigcap C) = (A\bigcap B)\bigcap C$,

3. $(A\bigcup B)\bigcap C = (A\bigcap C)\bigcup(B\bigcap C)$, $(A\bigcap B)\bigcup C = (A\bigcup C)\bigcap(B\bigcup C)$,

4. $C_{\mathcal{M}}(A\bigcup B) = C_{\mathcal{M}}A\bigcap C_{\mathcal{M}}B$, $C_{\mathcal{M}}(A\bigcap B) = C_{\mathcal{M}}A\bigcup C_{\mathcal{M}}B$ *(законы де Моргана)*,

5. $C_{\mathcal{M}}\mathcal{M} = \emptyset$, $C_{\mathcal{M}}\emptyset = \mathcal{M}$.

Доказательство. Приведём пример доказательства одного из её утверждений. Например, докажем, что $C_{\mathcal{M}}(A\bigcup B) = C_{\mathcal{M}}A\bigcap C_{\mathcal{M}}B$. Если $x \in C_{\mathcal{M}}(A\bigcup B)$, то это равносильно тому, что элемент x не принадлежит $A\bigcup B$, что равносильно тому, что этот элемент не принадлежит ни одному из множеств A, B, т.е. $x \in C_{\mathcal{M}}A$ и $x \in C_{\mathcal{M}}B$, что равносильно тому, что $x \in C_{\mathcal{M}}A\bigcap C_{\mathcal{M}}B$. Утверждение доказано.

Всё сказанное можно было записать цепочкой равносильных утверждений:

$$x \in C_M(A \cup B) \Leftrightarrow x \notin (A \cup B) \wedge x \in M \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x \notin A) \wedge (x \notin B) \wedge (x \in M) \Leftrightarrow ((x \notin A) \wedge (x \in M)) \wedge ((x \notin B) \wedge (x \in M)) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x \in C_M A) \wedge (x \in C_M B) \Leftrightarrow x \in C_M A \cap C_M B.$$

Докажем второе утверждение в пункте 4). Для разнообразия проведём цепочку равносильных утверждений.

$$x \in C_M(A \cap B) \Leftrightarrow x \notin (A \cap B) \wedge (x \in M) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow ((x \notin A) \vee (x \notin B)) \wedge x \in M \Leftrightarrow ((x \notin A) \wedge (x \in M)) \vee ((x \notin B) \wedge (x \in M)) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x \in C_M A) \vee (x \in C_M B) \Leftrightarrow x \in C_M A \cup C_M B.$$

□

1.1.2 Элементы математической логики

Логическим высказыванием называется утверждение, относительно которого можно сказать, *истинно* оно или *ложно*. Как и над множествами, над высказываниями можно производить операции.

Определение 1.1.7. *Дизъюнкцией* или логическим *'или'* двух высказываний A, B называется высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно из этих высказываний. Оно обозначается $A \vee B$.

Можно сказать, что $A \vee B$ ложно тогда и только тогда, когда ложными являются оба высказывания A, B.

Определение 1.1.8. *Конъюнкцией* или логическим *'и'* двух высказываний A, B называется высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда истинны оба из этих высказываний. Оно обозначается $A \wedge B$ (иногда его обозначают $A\&B$).

Определение 1.1.9. *Отрицанием* высказывания A называется высказывание $\rceil A$, которое истинно, если A ложно, и наоборот, ложно, если A — истинно.

Определение 1.1.10. *Импликацией* $A \Longrightarrow B$ называется высказывание, которое ложно, только если истинно A и ложно B.

По-другому эта операция называется: 'если A, то B', или 'из A следует B'. Значение таково: из истинного высказывания может следовать только истинное высказывание, из ложного высказывания следует что угодно.

Приведём таблицу истинности (0 — «ложь», 1 — «истина».) для импликации Для более лёгкого понимания

A	B	$A \Longrightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

смысла импликации и запоминания ее таблицы истинности можно воспользоваться житейской моделью: A — начальник. Он может приказать «работай» (1) или сказать «делай что хочешь» (0). B — подчиненный. Он может работать (1) или бездельничать (0). В таком случае импликация — не что иное, как послушание подчиненного начальнику. По таблице истинности легко проверить, что послушания нет только тогда, когда начальник приказывает работать, а подчиненный бездельничает.

Математические утверждения (теоремы, леммы) часто имеет вид $A \Longrightarrow B$, где A — условие утверждения, B — его заключение. Если верно утверждение $A \Longrightarrow B$ и условие A выполняется, то применение логического правила, (носящего название *modus ponens*) позволяет сделать вывод об истинности заключения B. Если верно утверждение $A \Longrightarrow B$, а заключение B — ложное, то и условие A — ложно. Для утверждения $A \Longrightarrow B$, называемого ***прямым***, утверждение $B \Longrightarrow A$ будем называть ***обратным утверждением***.

Если доказаны обе теоремы $A \Longrightarrow B$ и $B \Longrightarrow A$, то говорят, что A есть необходимое и достаточное условие, или ***критерий***, для B (и наоборот, разумеется), или что утверждения A, B эквивалентны (равносильны). Равносильность утверждений принято обозначать $A \Longleftrightarrow B$. Рассмотрим вкратце ряд методов доказательства математических теорем. Один из них — ***метод от противного***. Он состоит в том, что при доказательстве теоремы, например, имеющей вид $A \Longrightarrow B$, мы предполагаем, что одновременно истинны A и $\neg B$. Это предположение в ходе доказательства приводит нас к противоречию, что и доказывает теорему. Коротко: $(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow (A \text{ и } \neg B \Longrightarrow \neg A)$.

Метод математической индукции используется для доказательства теорем, которые гласят, что некоторое утверждение, выраженное через натуральный параметр n, обозначим это утверждение $P(n)$, выполняется для всех значений этого параметра n. Сначала проверяют, что утверждение $P(1)$ выполняется. Затем проверяют, что из справедливости $P(n)$ при некотором n следует справедливость $P(n+1)$.

Например, докажем, что

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

для любого n. Это равенство будет нашим утверждением $P(n)$. Тогда $P(1)$ — это верное утверждение о том, что $1 = 1\cdot(1+1)/2$. Пусть при некотором n утверждение $P(n)$ верно. Для доказательства $P(n+1)$, которое состоит в том, что $1+2+3+\cdots+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ воспользуемся индуктивным предположением о справедливости утверждения $P(n)$ и получим:

$$1+2+3+\cdots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

что и требовалось доказать.

Разберем ещё один пример на метод математической индукции. Теперь неравенство

$$\left|\sin\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\sin x_k|.$$

будет утверждением $P(n)$. Тогда $P(1)$ — это верное утверждение о том, что $|\sin(x_1)| \leqslant |\sin x_1|$. Пусть при некотором n утверждение $P(n)$ верно. Для доказательства $P(n+1)$, которое состоит в том, что $\left|\sin\left(\sum\limits_{k=1}^{n+1} x_k\right)\right| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n+1} |\sin x_k|$ воспользуемся индуктивным предположением о справедливости утверждения $P(n)$ и получим:

$$\begin{aligned}
\left|\sin\left(\sum_{k=1}^{n+1} x_k\right)\right| &= \left|\sin\left(\sum_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1}\right)\right| = \left|\sin\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\cdot\cos(x_{n+1}) + \sin(x_{n+1})\cdot\cos\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\right| \leqslant \\
&\leqslant \left|\sin\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\cdot\cos x_{n+1}\right| + \left|\sin x_{n+1}\cdot\cos\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\right| \leqslant \\
&\leqslant \left|\sin\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\right|\cdot|\cos x_{n+1}| + |\sin x_{n+1}|\cdot\left|\cos\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\right| \leqslant \\
&\leqslant \left|\sin\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\right| + |\sin x_{n+1}| \leqslant \sum_{k=1}^{n+1} |\sin x_k|.
\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались ограниченностью функции $\cos x$, т.е. $|\cos x| \leqslant 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

1.1.3 Отображения и функции

Определение 1.1.11 (Отображение множеств)**.** Пусть даны два множества X и Y и пусть имеется правило f, ставящее в соответствие каждому элементу $x \in X$ некоторый определённый $y \in Y$. Тогда говорят, что задано *отображение* f, множества X в множество Y. И обозначают:

$$f : X \to Y.$$

Элемент, соответствующий x в силу правила f, обозначают $f(x)$ и пишут: $y = f(x)$. Элемент y называют *образом* элемента x при отображении f, элемент x *прообразом* элемента y. Множество X называют *областью определения* функции f.

В нашем курсе мы, в основном, рассматриваем случай, когда множества X и Y являются подмножествами множества действительных чисел $\mathbb{R}$. В этом случае мы говорим о *функции*, определённой на множестве $X \subseteq \mathbb{R}$. Обозначение $y = f(x)$ указывает на правило, с помощью которого числу x ставится в соответствие число y, называемое значением функции в точке x. Если мы рассмотрим на плоскости две взаимно перпендикулярные

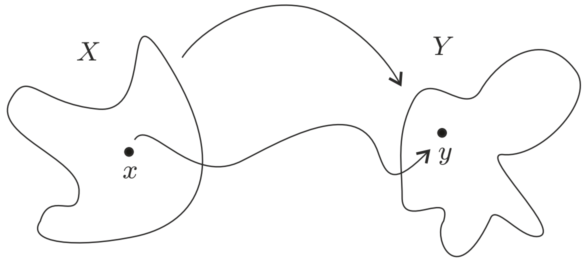


Рис. 1.6: Отображение множества X в множество Y

прямые, назовём одну из них осью x, другую — осью y, то пары чисел (x, y), где $y = f(x)$, образуют на плоскости кривую, называемую *графиком* этой функции. Одна из важных задач математического анализа — построение графиков функций и описание их свойств.

Определение 1.1.12. *Образом подмножества* $A \subseteq X$ при отображении называется множество

$$f(A) = \{f(x) |\, x \in A\}.$$

Прообразом подмножества $B \subseteq Y$ при отображении называется множество

$$f^{-1}(B) = \{x \in A |\, f(x) \in B\}.$$

Определение 1.1.13. Рассмотрим некоторые виды отображений:

- Сюръективное отображение — отображение на всё множество Y:

$$f(X) = Y,$$

  т.е. для любого $y \in Y$ найдётся $x \in X$ такой, что $f(x) = y$.

- Инъективное отображение: для любого $x_1, x_2 \in X$ из равенства $f(x_1) = f(x_2)$ следует $x_1 = x_2$.
- Биективное отображение — отображение f сюръективно и инъективно.

П р и м е р 1.1.1. Пусть

a) $X = [0; 1]$, $Y = [0; 2]$;

b) $X = [-1; 1]$, $Y = [0; 1]$;

c) $X = [0; 1]$, $Y = [0; 1]$.

Функция $f(x) = x^2$, тогда в случае

a) отображение f инъективное, но не является сюръективным;

b) отображение f сюръективное, но не является инъективным;

c) отображение f сюръективное и инъективное, т.е. является биекцией множества X на множество Y.

Определение 1.1.14. X, Y — множества. Если существует биекция X на Y, то будем писать $cardX = cardY$ и говорить, что множества X и Y *равномощны*.

П р и м е р 1.1.2. Справедливы следующие равенства

$$card\,\mathbb{R} = card(-1; 1) = card(0; 1).$$

Первое равенство можно обосновать при помощи биекции $\varphi_1(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(x)$. Второе равенство при помощи биекции $\varphi_2(x) = \frac{x+1}{2}$.

Лемма 1. *Пусть* $f : X \to Y$, $g : Y \to X$. *Тогда если* $g \circ f = e_X$[1], *то* g *— сюръективно* $\wedge$ f *— инъекция.*

Доказательство. По условию $g(Y) \subseteq X$. Но, с другой стороны

$$X = e_X(X) = g(f(X)) = g \circ f(X) \subseteq g(Y).$$

Откуда $g(Y) = X$, т.е. g —сюръекция. Докажем инъективность отображения

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow e_X(x_1) \neq e_X(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) \neq g(f(x_2)) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

т.е. f — инъективна. □

Теорема 1.1.2. *Отображения* $f : X \to Y$, $g : Y \to X$, *тогда*

$$f, g \text{ - биективны и взаимнообратные } \iff f \circ g = e_Y \text{ и } g \circ f = e_X.$$

Доказательство. $\Longrightarrow$ Условия теоремы делают равносильным следующее: $y = f(x) \iff x = g(y)$. Откуда следует, что $y = f(g(y))$ и $x = g(f(x))$.

$\Longleftarrow$ В силу леммы оба отображения биективны. □

Контрольные вопросы.

1. Составьте таблицу истинности для дизъюнкции и конъюнкции.
2. Для множеств $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ (|x| - 3)^2 + (y - 3)^2 = 4\}$ и $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 18\}$ изобразите на плоскости множества $A \cup B$, $A \cap B$, $C_{\mathbb{R}^2}A$, $C_{\mathbb{R}^2}B$, $A \setminus B$.

Упражнения к 1.1

Упражнение 1.1.1. *Докажите, что при любом натуральном* n *число* a_n *делится на* b.

(a) $a_n = 2n^3 + 3n^2 + 7n, \quad b = 6;$ (b) $a_n = 4^{2n-1} + 1, \quad b = 5;$

(c) $a_n = 6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}, \quad b = 11;$ (d) $a_n = 5^n - 4n + 15, \quad b = 16.$

Упражнение 1.1.2. *Для* $n \in \mathbb{N}$ *докажите равенства*

(a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6};$ (b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4};$

(c) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1;$ (d) $p + (p+1) + (p+2) + \ldots + (p+n) = \dfrac{(2p+n)(n+1)}{2};$

(e) $1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n-1)^2 = \dfrac{n(4n^2-1)}{3};$ (f) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}.$

Упражнение 1.1.3. *Для* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ *докажите*

(a) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{13}{24};$ (b) $\left(1 - \dfrac{1}{4}\right)\left(1 - \dfrac{1}{9}\right)\left(1 - \dfrac{1}{16}\right)\ldots\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{n+1}{2n}.$

Ответы: 1.1.1 1.1.2

[1]Здесь под $g \circ f(x)$ мы понимаем $g(f(x))$. А e_X тождественное отображение из X в X, т.е. $e_X(x) = x$.

1.2 Действительные числа

1.2.1 Натуральные, целые, рациональные числа

Из школьного курса математики нам известны свойства натуральных чисел $\mathbb{N}$ (т.е. чисел $1, 2, 3, \ldots$), целых чисел $\mathbb{Z}$ (т.е. чисел $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$). Рациональные числа $\mathbb{Q}$ представимы в виде дробей p/q, где $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$. Далее мы считаем известными законы действий над этими числами и свойства неравенств между ними. Если на прямой отметить точку 0 и выбрать отрезок единичной длины, то числа множества $\mathbb{Z}$ будут изображены точками, отстоящим друг от друга на расстоянии 1. Числа множества $\mathbb{Q}$, на первый взгляд, будут расположены на оси достаточно плотно. Но, например, длину гипотенузы прямоугольного треугольника, катеты которого равны 1, нельзя выразить никаким рациональным числом!

Действительно, предположим противное, что $\sqrt{2} = p/q$, где $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ и числа p, q не имеют общих делителей (иначе числитель и знаменатель дроби можно было бы просто сократить на их наибольший общий делитель). Возведём равенство $q\sqrt{2} = p$ в квадрат, получим $2q^2 = p^2$. Раз p^2 делится на 2, то и p делится на 2 (квадрат *нечётного* числа — *нечётное* число !), т.е. $p = 2p_1$ и тогда $2q^2 = 4p_1^2$, $q^2 = 2p_1^2$, откуда аналогичным образом получаем $q = 2q_1$. Но равенства $p = 2p_1$, $q = 2q_1$ противоречат сделанному выше предположению об отсутствии общих делителей у чисел p, q. Наше утверждение доказано.

Тот факт, что не все длины отрезков можно выразить рациональным числом, называют *неполнотой* множества рациональных чисел.

1.2.2 Множество действительных чисел

Определим *действительные* (иногда их называют *вещественными*) числа, как бесконечные десятичные дроби, взятые со знаком $+$ или $-$. При этом они содержат в себе все целые и вообще, все рациональные числа, которые, как известно, изображаются либо конечными, либо бесконечными периодическими десятичными дробями. Таким образом, числа, изображаемые бесконечными непериодическими десятичными дробями, являются *иррациональными.* Мы вновь предполагаем известными законы арифметических действий над действительными числами и свойства неравенств между ними.

Аксиомы действительных чисел $\mathbb{R}$.

Определение 1.2.1. Множество $\mathbb{R}$ называется множеством вещественных чисел, а его элементы — вещественными числами, если выполнен следующий комплекс условий, называемый *аксиоматикой вещественных чисел*:

Аксиомы по $\oplus$.
определенно отображение (операция сложения) $+ : \ \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.

1) Существование нейтрального элемента 0 такого, что для любого $x \in \mathbb{R}$:

$$x + 0 = 0 + x = x.$$

2) Для любого $x \in \mathbb{R}$ существует обратный элемент $-x \in \mathbb{R}$:

$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

3) Свойство ассоциативности:

$$x + (y + z) = (x + y) + z, \quad \text{для любых} \quad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

4) Коммутативность:

$$x + y = y + x, \quad \text{для любых} \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Аксиомы по $\otimes$.
определенно отображение (операция умножения) $\cdot : \ \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.

5) Существование нейтрального элемента $1 \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ такого, что для любого $x \in \mathbb{R}$:

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x.$$

6) Для любого $x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ существует обратный элемент $x^{-1} \in \mathbb{R}$:

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$$

7) Свойство ассоциативности:

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z, \quad \text{для любых} \quad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

8) Коммутативность:

$$x \cdot y = y \cdot x, \quad \text{для любых} \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Связь $\oplus$ и $\otimes$.

9) Дистрибутивность:

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z, \quad \text{для любых} \quad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Аксиомы порядка $\leqslant$.

между элементами определено отношение $\leqslant$,
т.е. для элементов x, $y \in \mathbb{R}$ установлено выполняется $x \leqslant y$ или нет.

10) $\forall x \in \mathbb{R} \quad (x \leqslant x)$.

11) $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad (x \leqslant y) \wedge (y \leqslant x) \Rightarrow x = y$.

12) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (x \leqslant y) \wedge (y \leqslant z) \Rightarrow x \leqslant z$.

13) $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad (x \leqslant y) \vee (y \leqslant x)$.

связь $\oplus$ и $\otimes$ с порядком.

14) Связь $\oplus$ и порядка: для любых $x, y, z \in \mathbb{R}$ выполнено

$$x \leqslant y \Rightarrow x + z \leqslant y + z.$$

15) Связь $\otimes$ и порядка: для любых $x, y \in \mathbb{R}$ выполнено

$$x \geqslant 0, y \geqslant 0 \Rightarrow (x \cdot y) \geqslant 0.$$

Аксиома о полноте.

Аксиома отделимости. *Пусть X, Y — два непустых подмножества числовой прямой, причём для любого элемента $x \in X$ и любого элемента $y \in Y$ выполняется неравенство $x \leqslant y$. Тогда существует такое действительное число c, что для любого элемента $x \in X$ и любого элемента $y \in Y$ выполняется неравенство $x \leqslant c \leqslant y$.*

Контрольные вопросы.

1. Будет ли справедлив аналог аксиомы отделимости для множества рациональных чисел?

Упражнения к 1.2

Упражнение 1.2.1. *Докажите, что $\sqrt{3}$ иррационально.*

Упражнение 1.2.2. *Докажите, что $\log_2 3$ иррационально.*

Ответы: 1.2.2

1.3 Принципы полноты множества действительных чисел

1.3.1 Точные грани, их существование.

Определение 1.3.1. Назовём $A \in \mathbb{R}$ *верхней гранью* множества X если $\forall x \in X, \quad x \leqslant A$.

Определение 1.3.2. Назовём $A \in \mathbb{R}$ *точной верхней гранью* множества X если $\forall x \in X : x \leqslant A$ и $\forall a < A \quad \exists x^* \in X, x^* > a$. (т.е. наименьшая из всех верхних граней).

Определение 1.3.3. Назовём $B \in \mathbb{R}$ *нижней гранью* множества $X : \forall x \in X : B \leqslant x$.

Определение 1.3.4. Назовём $B \in \mathbb{R}$ *точной нижней гранью* множества X если $\forall x \in X : x \geqslant B$ и $\forall b > B \quad \exists x^* \in X, x^* < b$. (т.е. наибольшая из всех нижних граней).

Замечание 1. Если точная верхняя грань принадлежит множеству, то она является наибольшим элементом этого множества (нижняя грань, соответственно, наименьшим). Но точная верхняя грань множества не обязана быть элементом этого множества. Например, для интервала $(0, 1)$ числа 0 и 1, соответственно, являются точной нижней и верхней гранями. Однако интервал не имеет ни наименьшего, ни наибольшего элемента.

П р и м е р 1.3.1. Пусть $X = [-1; 1)$. Тогда

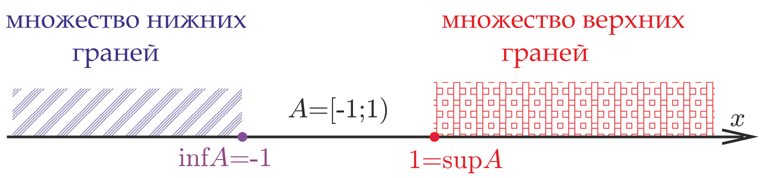


Рис. 1.7: Нижнии (верхнии) грани множества $X = [-1; 1)$

- Множество верхних граней $[1; +\infty)$. Точная верхняя грань $\sup X = 1$. Максимальный элемент множества X неопределён.
- Множество нижних граней $(-\infty; -1]$. Точная нижняя грань $\inf X = -1$. Минимальный элемент множества $\min X = -1$.

П р и м е р 1.3.2. Пусть $X = (0; 1)$. Тогда

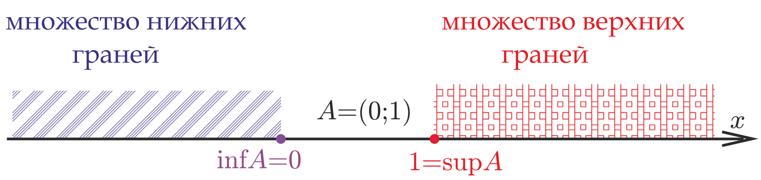


Рис. 1.8: Нижнии (верхнии) грани множества $X = (0; 1)$

- Множество верхних граней $[1; +\infty)$. Точная верхняя грань $\sup X = 1$. Максимальный элемент множества X неопределён.
- Множество нижних граней $(-\infty; 0]$. Точная нижняя грань $\inf X = 0$. Минимальный элемент множества X неопределён.

П р и м е р 1.3.3. Рассмотрим пустое множество $X = \emptyset$. Тогда $\inf X = +\infty$, поскольку множество нижней граней для X будет $\mathbb{R}$. Аналогично $\sup X = -\infty$.

Теорема 1.3.1 (О существовании точной верхней грани). *Пусть $X \subset \mathbb{R}$ — непустое, ограниченное сверху множество. Тогда существует точная верхняя грань множества X.*

Доказательство. Пусть Y — множество верхних граней для X, т.е. $\forall x \in X, \forall y \in Y \quad x \leqslant y$. Согласно аксиоме о полноте существует $c \in \mathbb{R}$, что для $\forall x \in X, \forall y \in Y : x \leqslant c \leqslant y$.

$$\left.\begin{array}{r} c - \text{ верхняя грань для } X \\ c - \min \text{ из верхних граней} \end{array}\right\} \Rightarrow C = \sup X$$

□

Теорема 1.3.2 (О существовании точной нижней грани). *Пусть $X \subset \mathbb{R}$ — непустое, ограниченное снизу множество. Тогда существует точная нижняя грань множества X.*

1.3.2 Принцип вложенных отрезков.

Определение 1.3.5. Функцию $f : N \to X$ натурального элемента назовём *последовательность*. Значение $f(n)$ будем обозначать через x_n, т.е. $x_n = f(n)$ и называть n-ым членом последовательности.

Определение 1.3.6. Введём понятия вложеных и стягивающихся отрезков.

- Если $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \ldots$, где $I_n = [a_n; b_n]$ — отрезки, то говорят, что задана *система вложенных отрезков.*
- Если дополнительно потребовать, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал отрезок I_n такой, чтобы его длина $|I_n| = b_n - a_n < \varepsilon$, то вложенные отрезки называют *системой стягивающихся отрезков.*

Теорема 1.3.3. *Пусть дана система вложенных отрезков $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \ldots$.*

- *Тогда существует $c \in \mathbb{R}$ такая, что $c \in I_n, \forall n \in \mathbb{N}$.*
- *Если дополнительно система отрезков будет системой стягивающихся отрезков, то точка c — единственна.*

Доказательство. Пусть множество A состоит из всех точек a_n, а множество B состоит из всех точек b_n. Для того, чтобы применить аксиому отделимости, требуется сначала доказать, что для произвольного элемента множества A, обозначим его a_k и произвольного элемента множества B, обозначенного b_l, выполняется неравенство $a_k \leqslant b_l$. Для этого выберем в качестве n наибольшее из чисел k, l. Тогда $a_k \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_l$, что и требовалось доказать. Применение аксиомы отделимости завершает доказательство первой части теоремы. Для доказательства второй части предположим противное, т.е. что существуют две различные точки c_1, c_2 общие для всех отрезков $[a_n, b_n]$. Пусть для определённости $c_2 > c_1$. Это означает, что $[c_1, c_2] \subseteq [a_n, b_n]$ для любого n. Значит, $c_2 - c_1 \leqslant b_n - a_n$ для любого n. Выберем $\varepsilon = (c_2 - c_1)/2$ и соответствующее число N. Тогда при $n > N$ выполняются противоречивые неравенства $c_2 - c_1 \leqslant b_n - a_n < \varepsilon = (c_2 - c_1)/2$. □

Замечание 2. Если рассматривать вложенные интервалы, то заключение теоремы может оказаться неверным. Например, для интервалов $(0; 1/n)$ общей точки нет.

1.3.3 Теорема Лебега-Бореля.

Определение 1.3.7. Пусть дано множество X. Система множеств $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_\alpha\}_\alpha$ — называется *покрытием множества* X, если

$$X \subset \bigcup_\alpha \mathcal{U}_\alpha.$$

Теорема 1.3.4. *Из любого покрытия интервалами отрезка $[a,b]$ можно выделить конечное подпокрытие.*

Доказательство. Предположим, что наше утверждение не верно, т.е. не существует конечного подпокрытия для $[a,b]$. Положим $I_1 = [a,b]$. Длину отрезка I_1 обозначим через

$$|I_1| = b - a.$$

Поделив данный отрезок пополам мы придём к выводу, что хотя бы один из полученных отрезков не допускает конечного покрытия, т.к. иначе утверждение было бы справедливо. Обозначим через I_2 отрезок не допускающий конечного покрытия. Его длина равна:

$$I_2 = \frac{|I_1|}{2}.$$

Продолжаем деление отрезка I_2 на два и т.д. Пусть I_n — отрезок, не допускающий конечного подпокрытия, его длина равна:

$$I_n = \frac{|I_1|}{2^{n-1}}.$$

В итоге получим систему стягивающихся отрезков. Поэтому по теореме о стягивающихся отрезков суще-

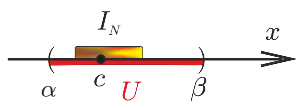


Рис. 1.9:

ствует точка $c \in [a,b]$ принадлежащая всем отрезкам I_n при любом $n \in \mathbb{N}$. Из заданного покрытия отрезка существует интервал $\mathcal{U} = (\alpha;\beta)$ такой, что $c \in \mathcal{U}$ (см. рис. (1.9)). Положим

$$\epsilon = \frac{\min(\beta - c, c - \alpha)}{2}.$$

Тогда $\exists N \in \mathbb{N}$ такой, что $|I_N| < \epsilon$. А следовательно $I_N \subset \mathcal{U}$, т.е. I_N целиком лежит в $\mathcal{U}$ (конечном покрытии), что противоречит предположению. ☐

1.3.4 Теорема Больцано-Вейерштрасса.

В анализе часто используется понятие предельной точки множества. Для того, чтобы его определить, напомним, что *окрестностью* $\mathcal{U}(a)$ точки a называется произвольный интервал, содержащий эту точку. *Проколотой окрестностью* $\overset{\circ}{\mathcal{U}}(a)$ точки a называется окрестность $\mathcal{U}(a)$, из которой выброшена сама точка a. Часто рассматривают симметричные окрестности $\mathcal{U}_\delta(a)$, представляющие собой интервал $(a-\delta, a+\delta)$ и соответствующие проколотые $\overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(a)$ окрестности, представляющие собой объединение интервалов $(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$.

Определение 1.3.8. Пусть A — числовое множество. Точка a называется *предельной точкой* этого множества, если пересечение любой проколотой окрестности $\overset{\circ}{\mathcal{U}}(a)$ с этим множеством непусто.

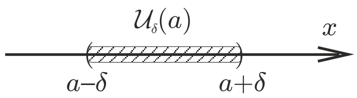


Рис. 1.10: Окрестность точки a.

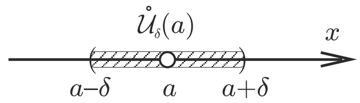


Рис. 1.11: Проколотая окрестность точки a.

Замечание 3. Предельная точка множества вовсе не обязана принадлежать самому множеству. Так, предельными точками интервала $(0,1)$ будут все точки отрезка $[0,1]$. Концевые точки этого отрезка интервалу не принадлежат.

Пример 1.3.4. Пусть $X = (-1;1)$. Тогда $c = 1$ — предельная точка для X, $c = 2$ — не является предельной точкой. Множество всех предельных точек для X будет $[-1;1]$.

Пример 1.3.5. Рассмотрим множество $X = \left\{1; \frac{1}{2}; \ldots; \frac{1}{n}; \ldots\right\}$. Точка $c = 0$ — предельная точка множества X, хотя и не принадлежит множеству X.

Теорема 1.3.5. *Если a — предельная точка множества A, то пересечение любой проколотой окрестности $\mathring{\mathcal{U}}(a)$ с этим множеством A — бесконечное множество.*

Доказательство. Выберем в $\mathring{\mathcal{U}}(a)$ произвольную точку $a_1 \in A$. Положим $\delta_1 = |a_1 - a|$. Теперь в $\mathring{\mathcal{U}}_{\delta_1}(a)$ выберем точку $a_2 \in A$. Очевидно, $a_1 \neq a_2$ и $a_2 \in \mathring{\mathcal{U}}(a)$. Далее положим $\delta_2 = |a_2 - a|$, рассмотрим $\mathring{\mathcal{U}}_{\delta_2}(a)$ и т.д. На шаге с номером n получается точка $a_n \in A$, отличная от предыдущих точек и $a_2 \in \mathring{\mathcal{U}}(a)$. Неограниченное продолжение этого процесса даёт искомое бесконечное множество. $\square$

Теорема 1.3.6. *Пусть A — бесконечное, ограниченное множество (в $\mathbb{R}$). Тогда существует предельная точка этого множества.*

Доказательство. Ограниченность множества A означает, что существует отрезок $[a_1, b_1]$, в котором это множество содержится. Предположим, что утверждение не верно.

Тогда для каждой точки $x \in [a_1, b_1]$ существует окрестность $\mathcal{U}(x)$, которая либо содержит конечное число точек из A, либо в этой окрестности точек из A нет вообще. Получили покрытие $[a_1, b_1]$ интервалами $\mathcal{U}(x)$. По теореме Бореля-Лебега выделим конечное подпокрытие

$$\mathcal{U}(x_1) \cup \cdots \cup \mathcal{U}(x_s) \supset [a_1, b_1] \quad \text{— конечное число окрестностей с центром в точках } x_k \in [a_1, b_1] \Rightarrow$$

A - конечное множество $\Rightarrow$ противоречие.

Другое доказательство данной теоремы.

Ограниченность множества A означает, что существует отрезок $[a_1, b_1]$, в котором это множество содержится. Разделим этот отрезок пополам. Хотя бы одна из получившихся половин содержит бесконечное множество точек из A. Выбираем в качестве $[a_2, b_2]$ такую половину (если в обеих половинах множество точек из A — бесконечное, то берём любую из половин). Затем делим пополам отрезок $[a_2, b_2]$ и берём в качестве $[a_3, b_3]$ ту его половину, которая содержит бесконечное множество точек из A. Продолжая этот процесс, получаем бесконечную последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$. По теореме о вложенных отрезках, существует точка c, общая для всех отрезков. Докажем, что эта точка является предельной для множества A. Действительно, возьмём произвольную $\mathring{\mathcal{U}}_\delta(c)$ и выберем номер n так, чтобы длина отрезка $[a_n, b_n]$ была меньше, чем δ. Тогда этот отрезок содержится в $\mathcal{U}_\delta(c)$ и содержит бесконечное множество точек из A. Но это как раз и означает, что c есть предельная точка множества A. $\square$

Контрольные вопросы.

1. Сформулируете два равносильных определения предельной точки.

2. Сформулируйте теорему Лебега-Бореля. Будет ли она выполняться, если отрезок заменить множеством $A = [a, b] \cup \{b+2\}$?

Упражнения к 1.3

Упражнение 1.3.1. *Найдите точную верхнюю и нижнюю грань множества* $A = (-2, 1) \cup (2; 3) \cup \{5\}$.

Упражнение 1.3.2. *Найдите все предельные точки для множества* $A = [-2, 1] \cup (2; 3) \cup \{5\}$.

Ответы: 1.3.1 $\inf A = -2$, $\sup A = 5$. **1.3.2** $[-2, 1] \cup [2; 3]$.

1.4 Счётные и несчётные множества.

Определение 1.4.1. Счётное множество - множество, которое равномощно натуральному ряду

Теорема 1.4.1. *1)Любое бесконечное подмножество счетного множества является счетным.*
2)Счетное или конечное объединение счетных множеств $\to$ *счетное множество.*

Доказательство. 1)Достаточно доказать, что любое бесконечное подмножество натурального ряда равномощно $\mathbb{N}$.

$$E \subseteq \mathbb{N} \text{ - бесконечное.}$$

Нужно построить биективное отображение $f : \mathbb{N} \to E$. Строим его следующим образом:

$$\begin{aligned}
&E \subset \mathbb{N} \Rightarrow e_1 = \min E \quad (E \text{ ограниченно снизу});\\
&E_2 = E_1 \backslash \{e_1\} \Rightarrow \exists e_2 = \min E_2\\
&\vdots\\
&E_n = E \backslash (\{e_1\} \cup \{e_2\} \cup \ldots \{e_{n-1}\}) \Rightarrow \exists e_n = \min E_n.
\end{aligned}$$

Из принципа индукции вытекает, что каждому числу $n \in \mathbb{N}$ будет сопоставлен элемент $e_n \in E$. Отображение $f : \mathbb{N} \to E$ — очевидно инъективно.

$$\left.\begin{array}{ll}
f: & 1 \to e_1\\
f: & 2 \to e_2\\
\vdots & \\
f: & n \to e_n\\
\ldots &
\end{array}\right\} \Rightarrow f - \text{ инъективно}$$

Покажем, что f - сюръективно, т.е. $f(\mathbb{N}) = E$.
Пусть $\forall e \in E$. Множество $\{n \in N : n \leqslant e\}$ — конечно, не пусто. Тогда тем более конечно $\{n \in E : n \leqslant e\}$ — конечно, т.к. содержится в предыдущем множестве. Если k — число элементов в последнем множестве, то $e = e_k$.

2) Пусть $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \ldots, \tilde{X}_n, \ldots$ — счётная система множеств. Поскольку мы рассматриваем объединение всех множеств, то нам достаточно считать каждый элемент, который входит в несколько множеств $\tilde{X}_k$ ровно один раз. Поэтому множества

$$\begin{aligned}
&X_1 = \tilde{X}_1,\\
&X_2 = \tilde{X}_2 \backslash \tilde{X}_1,\\
&\ldots\\
&X_n = \tilde{X}_n \backslash (\tilde{X}_1 \cup \tilde{X}_2 \cup \cdots \cup \tilde{X}_{n-1}),\\
&\ldots
\end{aligned}$$

будут непересекающимися и $\cup\tilde{X}_k = \cup X_k$. Предположим, что множества $X_n = \{x_n^1, x_n^2, x_n^3, \ldots, x_n^m, \ldots\}$ — счётны. В качестве упражнения предлагаем читателю самостоятельно разобрать случай, когда какое либо множества X_k — конечны.

$$\begin{array}{rl} X_1: & x_1^1, x_1^2, x_1^3, \ldots, x_1^m, \ldots \\ X_2: & x_2^1, x_2^2, x_2^3, \ldots, x_2^m, \ldots \\ X_3: & x_3^1, x_3^2, x_3^3, \ldots, x_3^m, \ldots \\ \vdots & \\ X_n: & x_n^1, x_n^2, x_n^3, \ldots, x_n^m, \ldots \\ \vdots & \end{array}$$

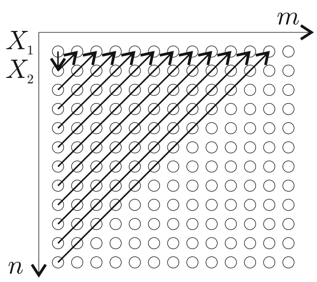


Рис. 1.12: биективное отображение f

$$f : x_n^m \to \frac{(m+n-2)(m+n-1)}{2} + m \text{ - биективное отображение}$$

□

П р и м е р 1.4.1.

$$card(-1;1) = card\,\mathbb{R}$$

Определение 1.4.2. X и Y — равномощны, иначе будем записывать в виде $card\,X = card\,Y$, если $\exists f$ - биекция $f : X \to Y$.

Теорема 1.4.2. *Множество $\mathbb{R}$ — не является счётным множеством. Т.е. $card\,\mathbb{N} \neq card\,\mathbb{R}$.*

Будем говорить, что множество $\mathbb{R}$ имеет мощность континуум.

Доказательство. Покажем, что $card\,\mathbb{N} \neq card\,(0;1)$. Предположим, что это не так, т.е. мы занумеровали все точки интервала $(0;1)$ при помощи чисел натурального ряда. Каждой точке $x \in (0;1)$ мы сопоставляем число $x = 0, \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \ldots$ при этом мы будем считать, что случаи, когда начиная с некоторого k все числа $\alpha_s = 9$ для любого $s \geqslant k$ запрещены, т.е. нет случаев $9 = \alpha_k = \alpha_{k+1} = \alpha_{k+2} = \ldots$. Данное ограничение вполне естественно, т.к. иначе допускается неоднозначность вида $0,123 = 0,122(9)$.

Упражнение: Докажите, что построенное отображение в случае данного ограничения — биекция.

$$\begin{aligned} x_1 \quad &= 0, \alpha_1^1\ \alpha_1^2\ \alpha_1^3\ \ldots \\ x_2 \quad &= 0, \alpha_2^1\ \alpha_2^2\ \alpha_2^3\ \ldots \\ &\vdots \\ x_n \quad &= 0, \alpha_n^1\ \alpha_n^2\ \alpha_n^3\ \ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

где $\alpha_m^n \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Покажем, что существует точка из интервала $(0; 1)$, которая не принадлежит выписанному выше списку. Определим цифру $\beta_1 \notin \{\alpha_1^1; 0, 9\}$, $\beta_2 \notin \{\alpha_2^2; 0, 9\}$, $\ldots \beta_n \notin \{\alpha_n^n; 0, 9\}$, $\ldots$. Тогда точка

$$\bar{x} = 0, \beta_1 \beta_2\ \ldots\ \beta_n \ldots$$

такова, что $\bar{x} \in (0, 1)$, но при этом не принадлежит множеству $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$, поскольку $\bar{x} \neq x_1$, так как $\beta_1 \neq \alpha_1^1$; $\bar{x} \neq x_2$, так как $\beta_2 \neq \alpha_2^2$; $\ldots$; $\bar{x} \neq x_n$, так как $\beta_n \neq \alpha_n^n$. $\square$

Контрольные вопросы.

1. Сформулируете определение счётного множества.
2. Какую мощность имеет интервал $(1; 5)$?

Упражнения к 1.4

Упражнение 1.4.1. *Докажите счётность множества целых чисел* $\mathbb{Z}$ *и множества рациональных чисел* $\mathbb{Q}$.

Ответы: 1.4.1

Глава 2

Предел и непрерывность

2.1 Предел последовательности и предел функции.

2.1.1 Определение предела последовательности.

Определение 2.1.1. Число A называется *пределом последовательности* $\{a_n\}$ (говорят также, что последовательность $\{a_n\}$ сходится к числу A), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует натуральное число N (оно обычно зависит от числа $\varepsilon > 0$ и эту зависимость указывают так: $N = N(\varepsilon)$) такое, что для всех натуральных чисел n, $n > N$ выполняется неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$.

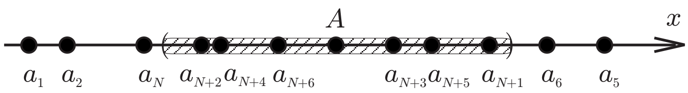


Рис. 2.1: Для произвольного числа $\varepsilon > 0$ существует окрестность точки A в которую попадают все элементы последовательности $\{a_n\}$ начиная с некоторого номера $n > N$.

С помощью логической символики определение предела последовательности $\{a_n\}$ можно записать так: число A называется *пределом последовательности*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N, \quad n \in \mathbb{N} \quad |a_n - A| < \varepsilon. \tag{2.1.1}$$

То, что число A является пределом последовательности $\{a_n\}$, обозначают так:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = A.$$

П р и м е р 2.1.1. Для $a_n \equiv A$ имеем : $\lim_{n\to+\infty} a_n = A$.

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ неравенство $|a_n - A| = |A - A| = 0 < \varepsilon$ верно для всех натуральных n. □

П р и м е р 2.1.2.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Доказательство. Согласно (2.1.1), требуется для любого фиксированного значения $\varepsilon > 0$ указать число $N = N(\varepsilon)$ такое, что из неравенства $n \geqslant N$, $n \in \mathbb{N}$ следует неравенство $1/n < \varepsilon$. Но это последнее неравенство равносильно такому: $n > 1/\varepsilon$. Поэтому выбираем $N(\varepsilon) = [1/\varepsilon] + 1$. □

П р и м е р 2.1.3. Докажем, что $\lim \frac{n+1}{n} = 1$. Для произвольного положительного $\forall \epsilon > 0$ нужно предъявить такое натуральное $N(\epsilon)$, что для всех натуральных чисел $n \geqslant N(\epsilon)$ будет выполнено неравенство $|\frac{n+1}{n} - 1| < \epsilon$.

Выберем $N(\epsilon)$ из условий

1. $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$.

2. $N(\epsilon)$ удовлетворяет неравенству $|\frac{N(\epsilon)+1}{N(\epsilon)} - 1| = \frac{1}{N(\epsilon)} < \epsilon$.

Последнее неравенство выполняется для всех чисел такие, что $N(\epsilon) > 1/\epsilon$. Только нам нужно натуральное число, поэтому выберем $N(\epsilon) = [1/\epsilon] + 1$.

Проверим, что $\lim \frac{n+1}{n} = 1$. Зафиксируем произвольное $\forall \epsilon > 0$, положим $N(\epsilon) = [1/\epsilon] + 1$. Тогда для всех натуральных чисел $n \geqslant N(\epsilon)$ будет выполнено $|\frac{n+1}{n} - 1| = \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{N(\epsilon)} < \epsilon$.

2.1.2 Определение предела функции.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{\mathcal{U}}(a)$ точки $a \in \mathbb{R}$. Пока будем считать, что $|a|, |A| < +\infty$ конечные числа.

Определение 2.1.2. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при $x \to a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ (оно обычно зависит от числа $\varepsilon > 0$ и эту зависимость указывают так: $\delta = \delta(\varepsilon)$) такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенствам $0 < |x - a| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

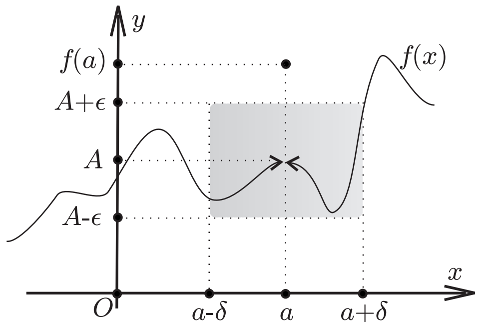


Рис. 2.2: Для произвольного числа $\varepsilon > 0$ существует проколотая окрестность точки a в которую попадают все значения $f(x)$ из этой окрестности.

Запись этого условия в виде логической формулы такова:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x : \ 0 < |x - a| < \delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon. \tag{2.1.2}$$

Неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ равносильно условию $f(x) \in V_\varepsilon(A)$, неравенства $0 < |x - a| < \delta$ равносильны условию $\overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(a)$, поэтому записи (2.1.2) определения предела можно придать такую форму

$$\forall\, V_\varepsilon(A) \quad \exists \overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(a) \quad \forall x \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(a) \quad f(x) \in V_\varepsilon(A).$$

Используются обозначения: $\lim_{x\to a} f(x) = A$, либо $f(x) \to A$ при $x \to a$.

П р и м е р 2.1.4. Если $\exists \overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(a)$ такая, что $\forall x \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(a)$ выполнено $f(x) = A$, то $\lim_{x\to a} f(x) = A$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\forall x \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(a) \quad |f(x) - A| = |A - A| = 0 < \varepsilon,$$

что и требовалось. □

П р и м е р 2.1.5. Справедливо равенство $\lim_{x\to a} x = a$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Подберём $\delta > 0$ так, чтобы из условия $0 < |x - a| < \delta$ следовало неравенство $|x - a| < \varepsilon$. Очевидно, что достаточно взять $\delta = \varepsilon$. □

Замечание 4. Обратите внимание на то, что в определении предела рассматриваются проколотые окрестности точки a, не содержащие саму эту точку. Это видно и из неравенства $0 < |x-a|$, которое означает, что $x \neq a$. Само значение функции в точке a *не рассматривается.* Более того, функция может быть даже не определена в этой точке.

Замечание 5. Определения предела последовательности и предела функции имеют много общего. Соответствуют друг другу: числа n и x, величины a_n и $f(x)$, утверждения $\exists N$ и $\exists\delta > 0$, $\forall n$, $n > N$ и $\forall x$, $0 < |x-a| < \delta$, неравенства $|a_n - A| < \varepsilon$ и $|f(x) - A| < \varepsilon$.

2.1.3 Определение предела и равносильные ему записи

Определение 2.1.3. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность. Будем писать,что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A, \quad |A| < \infty$$

если $\forall\epsilon > 0 \quad \exists N = N_\epsilon \in \mathbb{N}, \quad \forall n > N : |x_n - A| < \epsilon.$

Замечание 6. Следующие две логические записи равносильны:

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists N = N_\epsilon \in \mathbb{N}, \quad \forall n > N : |x_n - A| < \epsilon. \tag{2.1.3}$$

и

$$\forall\epsilon \in (0; 10^{-2}) \quad \exists N = N_\epsilon \in \mathbb{N}, \quad \forall n > N : |x_n - A| < \epsilon. \tag{2.1.4}$$

Доказательство. Утверждение (2.1.3) слабее, поскольку в (2.1.3) требуем выполнения логического заключения для всех положительных $\epsilon > 0$, а в (2.1.4) только для положительных ϵ, которые строго меньше чем 10^{-2}. Следоватльено из (2.1.3) $\Longrightarrow$ (2.1.4).

Покажем, что справедливо и обратное из (2.1.4) $\Longrightarrow$ (2.1.3). Заменим параметр ϵ (2.1.4) на ϵ_1 (чтобы отличать его от параметра ϵ в (2.1.3)). Нам надо показать, что если $\epsilon \geqslant 10^{-2}$ тогда утверждение (2.1.3) остаётся в силе. Поскольку (2.1.3) верно при $\epsilon_1 = 10^{-3}$, то существует такой натуральный номер N_1, что для любых $n > N_1$ выполнено $|x_n - A| < 10^{-3}$. Но тогда начиная с этого номера N_1 будет выполнено и $|x_n - A| < 10^{-3} < \epsilon$. Таким образом утверждение (2.1.4) $\Longrightarrow$ (2.1.3) доказано. □

Конечно же вместо 10^{-2} в этом замечании можно взять произвольное положительное число, в том числе и сколько угодно малое. Поэтому часто чтение определения предела начинают словами "для сколь угодно малого $\epsilon > 0$ ..."

Замечание 7. Логическая запись определения предела (2.1.3) равносильна:

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists N = N_\epsilon \in \mathbb{N}, \quad \forall n > N : |x_n - A| < 10^4\epsilon. \tag{2.1.5}$$

Доказательство. Утверждение (2.1.3) слабее, поскольку если $|x_n - A| < \epsilon$, то тогда выполнено и $|x_n - A| < 10^4\epsilon$. Следовательно из (2.1.3) $\Longrightarrow$ (2.1.5).

Покажем, что справедливо и обратное из (2.1.5) $\Longrightarrow$ (2.1.3). Заменим параметр ϵ (2.1.5) на ϵ_1 (чтобы отличать его от параметра ϵ в (2.1.3)). Возьмём произвольное ϵ, по нему определим $\epsilon_1 = \epsilon/10^4$, тогда из (2.1.5) вытекает

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \quad \forall n > N_1 : |x_n - A| < 10^4\epsilon_1 = \epsilon.$$

То есть определение предела (2.1.3)) выполняется с $N = N_1$. Таким образом утверждение (2.1.5) $\Longrightarrow$ (2.1.3) доказано. □

Конечно же вместо 10^4 в этом замечании можно взять произвольное положительное число.

Замечание 8. На предел последовательности не оказывают влияния любое конечное число членов этой последовательности. Иными словами, если две последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$ совпадают начиная с некоторого номера N^*, т.е. $a_n = b_n$ для любого $n \geqslant N^*$, то их пределы если сущесвуют, то совпадают (либо не существуют одновременно).

Доказательство. Пусть предел a_n существует, т.е.

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N_1 \in \mathbb{N}, \quad \forall n > N_1 : |a_n - A| < \epsilon.$$

Докажем, что в этом случае и предел b_n тоже существует и равен тому же числу. Зафиксируем произвольное $\epsilon > 0$ тогда существует $N_1 \in \mathbb{N}$, $\forall n > N_1 : |a_n - A| < \epsilon$. Если мы положим $N = \max\{N_1, N^*\}$, то для любого $n > N_1$ будет выполнено $|a_n - A| = |b_n - A| < \epsilon$. Таким образом доказано, что предел последовательности b_n тоже существует и равен числу A.

Факт того, что если последовательность b_n имеет предел, равный A, то и последовательность a_n имеет предел, равный A доказывается полностью аналогично. □

Таким образом изменение последовательности на любом конечном числе элементов на предел влияния не оказывает. В частности, из предыдущего вытекает, что можно писать в определении предела не $n > N$, а $n \geqslant N$.

Заметим, что аналогично доказывается следующее утверждение:

Замечание 9. Следующие логические утверждения равносильны:

- $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta_\epsilon > 0, \quad \forall x: \ 0 < |x - a| < \delta \quad |f(x) - A| < \epsilon.$
- $\forall \epsilon \in (0; 10^{-2}) \quad \exists \delta = \delta_\epsilon > 0, \quad \forall x: \ 0 < |x - a| < \delta \quad |f(x) - A| < \epsilon.$
- $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta_\epsilon > 0, \quad \forall x: \ 0 < |x - a| < \delta \quad |f(x) - A| < 10^4\epsilon.$

2.1.4 Единственность и ограниченность предела последовательности, предела функции.

Следующие простые, но важные теоремы означают, что условия (2.1.1) для предела последовательности и (2.1.2) для предела функции определяют число A единственным образом.

Теорема 2.1.1. 1. *Если последовательность $\{a_n\}$ имеет предел A, то этот предел единственен (иными словами, два различных числа A_1, A_2 не могут одновременно удовлетворять условию (2.1.1).*

2. *Если последовательность имеет предел, то она ограничена.*

Доказательство. **1.** Используем метод "от противного". Предположим, что теорема неверна и что существуют числа A_1, A_2, причём $A_1 \neq A_2$, (будем считать, что $A_1 < A_2$), такие, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N, \quad n \in \mathbb{N} \quad |a_n - A_1| < \varepsilon. \tag{2.1.6}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N, \quad n \in \mathbb{N} \quad |a_n - A_2| < \varepsilon. \tag{2.1.7}$$

Для того, чтобы неравенства (2.1.6) и (2.1.7) стали противоречить друг другу, выберем достаточно малое число $\varepsilon > 0$, меньшее либо равное, например, чем $|A_1 - A_2|/2$, например $\epsilon = (A_2 - A_1)/2$. Тогда из (2.1.6) следует, что существует число N_1 такое, что при $n > N_1$, $n \in \mathbb{N}$, выполняется неравенство

$$|a_n - A_1| < \epsilon \Longrightarrow a_n < \epsilon + A_1, \tag{2.1.8}$$

а из (2.1.7) следует, что существует число N_2 такое, что при $n > N_2$, $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$|a_n - A_2| < \epsilon \Longrightarrow A_2 - \epsilon < a_n, \tag{2.1.9}$$

Тогда если число $n \in \mathbb{N}$ одновременно больше, чем N_1 и N_2, то выполняются оба неравенства (2.1.8) и (2.1.9).

$$a_n < A_1 + \epsilon = (A_1 + A_2)/2 = A_2 - \epsilon < a_n.$$

Полученные неравенства противоречат друг другу — первый пункт теоремы доказан.

2. Докажем второе утверждение. Положим в определении предела (2.1.1) число $\varepsilon = 1$. Тогда существует такое число N, что при $n > N$ выполняется неравенство

$$|a_n - A| < 1.$$

Это неравенство можно переписать в виде

$$-1 < a_n - A < 1, \quad \text{или} \quad A - 1 < a_n < A + 1.$$

Взяв в качестве C наибольшее из чисел $|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_N|$, $|A-1|$, $|A+1|$ получаем, что для всех n

$$|a_n| < C.$$

□

Теорема о единственности предела функции вполне аналогична предыдущей теореме, имеет тот же смысл и похожее доказательство, которое предлагается провести самостоятельно.

Теорема 2.1.2. *Пусть* $\lim_{x\to a} f(x) = A$, *здесь* $|a|, |A| < \infty$.

1. *Этот предел A единственен (иными словами, два различных числа A_1, A_2 не могут одновременно удовлетворять условию (2.1.2)).*

2. *Если существует конечный предел, то существует проколотая окрестность точки a в которой функция $f(x)$ ограничена.*

2.1.5 Бесконечно малые последовательности и бесконечно малые функции.

Определение 2.1.4. Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется *бесконечно малой*, если

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0. \tag{2.1.10}$$

П р и м е р 2.1.6. Последовательность $\alpha_n = \frac{1}{n^\gamma}$, $\gamma > 0$ является бесконечно малой.

Доказательство. Чтобы доказать, что для этой последовательности выполняется равенство (2.1.10), следует для произвольного $\varepsilon > 0$ найти число N так, чтобы из неравенства $n > N$ следовало неравенство $1/n^\gamma < \varepsilon$. Но это последнее неравенство можно равносильным образом последовательно преобразовать к неравенствам $n^\gamma > 1/\varepsilon$, или $n > 1/\sqrt[\gamma]{\varepsilon}$. Поэтому в качестве числа N можно взять $[1/\sqrt[\gamma]{\varepsilon}] + 1$. □

Определение 2.1.5. Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$, если

$$\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0. \tag{2.1.11}$$

П р и м е р 2.1.7. Функция $|x-a|^\gamma$, $\gamma > 0$ является бесконечно малой при $x \to a$.

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ неравенство $|x-a|^\gamma < \varepsilon$ равносильно неравенству $|x-a| < \varepsilon^{1/\gamma}$. Выберем в качестве числа δ число $\varepsilon^{1/\gamma}$. Тогда, как отмечено выше, из неравенств $0 < |x-a| < \varepsilon^{1/\gamma}$ следует неравенство $|x-a|^\gamma < \varepsilon$, что как раз и означает, что $\lim_{x\to a} |x-a|^\gamma = 0$, т.е. условие (2.1.11) выполнено. □

Теорема 2.1.3. *Условие* $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ *равносильно тому, что последовательность* $\alpha_n = a_n - A$ *является бесконечно малой.*

Доказательство. Легко видеть, что условие, означающее, что $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ и условие, означающее, что последовательность $\alpha_n = a_n - A$ является бесконечно малой, одно и то же:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N, \quad n \in \mathbb{N} \quad |a_n - A| < \varepsilon.$$

Тем самым, теорема 2.1.3 доказана. □

Замечание 10. После изучения дальнейшего материала в головы обучающихся часто приходит мысль применить для доказательства теоремы 2.1.3 теорему о пределе разности последовательностей. Однако этого делать не стоит - дальше теорему о пределе разности мы доказываем, опираясь как раз на теорему 2.1.3, и если сделать так, как говорилось выше, получится "порочный логический круг".

Теорема 2.1.4. *Условие* $\lim_{x\to a} f(x) = A$ *равносильно тому, что функция* $\alpha(x) = f(x) - A$ *является бесконечно малой при* $x \to a$.

Доказательство. Доказательство вполне аналогично доказательству теоремы 2.1.3. Оба этих условия имеют вид:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta > 0 \quad \forall x:\ 0 < |x-a| < \delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

□

В следующих теоремах мы установим очень полезные свойства бесконечно малых. Перед формулировкой теоремы 2.1.5 нам потребуется ещё одно определение.

Определение 2.1.6. Последовательность $\{\beta_n\}$ называется *ограниченной*, если все её члены ограничены по абсолютной величине некоторой положительной постоянной. (В логических символах это утверждение выглядит так: $\exists C > 0 \quad \forall\ n \quad |\beta_n| \leqslant C$.)

Теорема 2.1.5. *Пусть* $\{\alpha_n\}$, $\{\gamma_n\}$ *— бесконечно малые, а* $\{\beta_n\}$ *— ограниченная последовательность. Тогда последовательности* $\{\alpha_n + \gamma_n\}$, $\{\alpha_n - \gamma_n\}$, $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$, $\{\alpha_n \cdot \gamma_n\}$ *являются бесконечно малыми.*

Доказательство. По определению предела последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\gamma_n\}$, для произвольного $\varepsilon > 0$ существуют, соответственно, числа N_1, N_2 такие, что при $n > N_1$ выполняется неравенство

$$|\alpha_n| < \varepsilon/2. \tag{2.1.12}$$

а при $n > N_2$ — неравенство

$$|\gamma_n| < \varepsilon/2. \tag{2.1.13}$$

Тогда если выбрать число N большим, чем оба числа N_1, N_2, то при $n > N$ одновременно выполняются неравенства (2.1.12) и (2.1.13). Вспомним, что абсолютная величина обладает следующими свойствами: $|a+b| \leqslant |a| + |b|$, $|a-b| \leqslant |a| + |b|$. Поэтому из (2.1.12) и (2.1.13) следует, что для произвольного $\varepsilon > 0$ можно выбрать число N так, что при $n > N$

$$|\alpha_n + \gamma_n| \leqslant |\alpha_n| + |\gamma_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

и

$$|\alpha_n - \gamma_n| \leqslant |\alpha_n| + |\gamma_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Поэтому первые два утверждения теоремы 2.1.5 доказаны. Перейдём к доказательству третьего. Для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать число N так, что при $n > N$ выполняется неравенство

$$|\alpha_n| < \varepsilon/C.$$

Поскольку $\forall n$, $|\beta_n| \leqslant C$, то получаем:

$$|\alpha_n\beta_n| < \frac{\varepsilon}{C} \cdot C = \varepsilon.$$

Это доказывает третье утверждение. Доказательство четвёртого утверждения можно провести непосредственно, а можно воспользоваться ограниченностью последовательности в случае существования конечного предела и пременить третье утверждение. □

Определение 2.1.7. Функция $\beta(x)$, определённая в $\mathring{\mathcal{U}}(a)$ называется *ограниченной* в $\mathring{\mathcal{U}}(a)$, если существует положительная константа C такая, что для любого x из проколотой окрестности $\mathring{\mathcal{U}}(a)$ выполнено $|\beta(x)| \leqslant C$.

Теорема 2.1.6. *Пусть* $\alpha(x)$, $\gamma(x)$ *— бесконечно малые при* $x \to a$ *функции, а* $\beta(x)$ *— ограниченная функция в некоторой проколотой окрестности* $\mathring{\mathcal{U}}_\delta(a)$. *Тогда функции* $\alpha(x) + \gamma(x)$, $\alpha(x) - \gamma(x)$, $\alpha(x) \cdot \beta(x)$,

$\alpha(x)\cdot\gamma(x)$ являются бесконечно малыми при $x\to a$.

Эта теорема вполне аналогична теореме 2.1.5.

2.1.6 Арифметические свойства предела.

Теоремы этого параграфа означают, что предельный переход прекрасно согласуется с арифметическими операциями.

Теорема 2.1.7. *Пусть* $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B$. *Тогда:*

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$;
2. $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = A - B$;
3. $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$;
4. *если* $B \neq 0$, *то* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$.

Эту теорему мы оставим для самостоятельного доказательства по аналогии с доказательством следующей теоремы.

Теорема 2.1.8. *Пусть* $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$. *Тогда:*

1. $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = A + B$;
2. $\lim_{x\to a}(f(x) - g(x)) = A - B$;
3. $\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$;
4. *если* $B \neq 0$, *то* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.

Доказательство. Напомним, что по теореме 2.1.4 условие $\lim_{x\to a} f(x) = A$ равносильно тому, что функция $\alpha(x) = f(x) - A$ является бесконечно малой при $x\to a$. Аналогично, $\lim_{x\to a} g(x) = B$ равносильно тому, что функция $\beta(x) = g(x) - B$ является бесконечно малой при $x\to a$. Перепишем эти равенства в виде

$$\alpha(x) + A = f(x)$$

и

$$\beta(x) + B = g(x).$$

Тогда

$$f(x) + g(x) = A + B + \alpha(x) + \beta(x). \tag{2.1.14}$$

По первому утверждению теоремы 2.1.6, функция $\alpha(x)+\beta(x)$ является бесконечно малой при $x\to a$. Снова по теореме 2.1.4, равенство (2.1.14) означает, что $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = A+B$. Второе утверждение доказывается совершенно аналогично, так как

$$f(x) - g(x) = A - B + \alpha(x) - \beta(x),$$

и функция $\alpha(x) + \beta(x)$ является бесконечно малой при $x\to a$.

Перейдём к доказательству третьего утверждения. Во-первых,

$$f(x)\cdot g(x) = (A + \alpha(x))\cdot(B + \beta(x)) = AB + A\beta(x) + B\alpha(x) + \alpha(x)\beta(x).$$

Функции $A\beta(x)$ и $B\alpha(x)$ являются бесконечно малыми при $x\to a$ по утверждению 3 теоремы 2.1.7, функция $\alpha(x)\cdot\beta(x)$ — по утверждению 4 этой теоремы. Последовательно применим первое утверждение теоремы 2.1.7: функция $A\beta(x)+B\alpha(x)$ является бесконечно малой при $x\to a$ и её сумма с функцией $\alpha(x)\cdot\beta(x)$ также является бесконечно малой при $x\to a$. Осталось применить теорему 2.1.5.

Перейдём к доказательству последнего, четвёртого утверждения теоремы. Нам потребуется лемма.

Лемма 2. *При условиях теоремы, если $B \neq 0$, то*
$$\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B}.$$

Доказательство. Как указывалось выше, достаточно получить равенство вида
$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B} + \gamma(x),$$
где $\gamma(x)$ — бесконечно малая при $x \to a$ функция. Для этого рассмотрим разность
$$\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} = \frac{1}{B+\beta(x)} - \frac{1}{B} = \frac{-\beta(x)}{(\beta(x)+B)B},$$
и докажем, что она является бесконечно малой при $x \to a$ функцией. Для этого сначала докажем, что функция
$$\frac{1}{(\beta(x)+B)B}. \tag{2.1.15}$$
является ограниченной в некоторой проколотой окрестности $\mathring{\mathcal{U}}_\delta(a)$.

Так как функция бесконечно малая при $x \to a$, для $\varepsilon = |B|/2$ существует число δ такое, что если $0 < |x-a| < \delta$, то $|\beta(x)| < |B|/2$. Откуда $|\beta(x)+B| \geqslant |B| - |\beta(x)| > |B| - |B|/2 = |B|/2$ и
$$\left|\frac{1}{(\beta(x)+B)B}\right| = \frac{1}{|\beta(x)+B|\cdot|B|} < \frac{2}{B^2}. \tag{2.1.16}$$
Но неравенство (2.1.16) как раз означает, что (2.1.15) является ограниченной в проколотой окрестности $\mathring{\mathcal{U}}_\delta(a)$ функцией.

Теперь мы просто применим к бесконечно малой при $x \to a$ функции $\beta(x)$ и к функции (2.1.15) третье утверждение теоремы 2.1.7. Таким образом мы доказали, что функция
$$\frac{-\beta(x)}{(\beta(x)+B)B}$$
является бесконечно малой при $x \to a$. Теперь из теоремы 2.1.5 следует утверждение леммы. □

Для доказательства четвёртого утверждения теоремы 2.1.8 применим уже доказанные третье утверждение и лемму к функциям $f(x)$ и $1/g(x)$. □

2.1.7 Предельный переход в неравенствах.

Теоремы этого параграфа показывают, что при предельном переходе нестрогие неравенства между членами последовательности или функциями сохраняются.

Теорема 2.1.9. *Пусть существует номер N_0 такой, что при $n \geqslant N_0$ выполняются неравенства $a_n \leqslant b_n$, и пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B$. Тогда $A \leqslant B$.*

Доказательство. Используем метод доказательства "от противного". Предположим, что вопреки утверждению теоремы,
$$A > B. \tag{2.1.17}$$
Возьмём число $\varepsilon = (A-B)/2$. Тогда из определения предела последовательности следует,
$$\begin{aligned} &\exists N_1 \quad \forall n > N_1: \quad |a_n - A| < \epsilon \Longrightarrow A - \epsilon < a_n, \\ &\exists N_2 \quad \forall n > N_2: \quad |b_n - B| < \epsilon \Longrightarrow b_n < B + \epsilon. \end{aligned}$$
Положим N как максимум из чисел N_0, N_1, N_2. Тогда $n > N$ выполняется неравенства
$$b_n < B + \epsilon = \frac{A+B}{2} = A - \epsilon < a_n,$$
Но эти неравенства противоречат условию, согласно которому $a_n \leqslant b_n$. Следовательно, наше предположение о том, что $A > B$, неверное, и теорема доказана. □

Замечание 11. Будьте внимательны! Всюду в этой теореме и лемме речь шла о нестрогих неравенствах! Уточним, что имеется в виду. Если в формулировке теоремы Вы замените неравенство $a_n \leqslant b_n$ неравенством $a_n < b_n$, то в заключении теоремы неравенство $A \leqslant B$ заменить неравенством $A < B$ нельзя!

Приведём пример: пусть $a_n \equiv 0$, $b_n = 1/n$. Тогда при всех n верно неравенство $a_n < b_n$, но $\lim_{n\to\infty} a_n = A = 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B = 0$ и, разумеется, неравенство $A \leqslant B$ выполняется (потому, что $A = B$) , а неравенство $A < B$ не выполняется.

Теорема 2.1.10. *Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ определены в некоторой проколотой окрестности $\mathring{\mathcal{U}}_\delta(a)$, и*

$$\forall x \in \mathring{\mathcal{U}}_\delta(a) \quad f(x) \leqslant g(x),$$

пусть $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$. Тогда $A \leqslant B$.

Доказательство этой теоремы совершенно аналогично доказательству теоремы 2.1.9, мы его не приводим.

2.1.8 Теоремы о "зажатых" переменных.

Теорема 2.1.11. *Пусть существует номер N_0 такой, что при $n \geqslant N$ выполняются неравенства*

$$a_n \leqslant c_n \leqslant b_n, \tag{2.1.18}$$

и пусть

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = A, \tag{2.1.19}$$

Тогда последовательность $\{c_n\}$ также имеет предел, причём $\lim_{n\to\infty} c_n = A$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное положительное $\varepsilon > 0$ тогда из определений получаем

$$\exists N_1 = N_1(\varepsilon) \quad \forall n > N_1, \quad n \in \mathbb{N}_1 \quad |b_n - A| < \varepsilon \Longrightarrow b_n < A + \epsilon.$$
$$\exists N_2 = N_2(\varepsilon) \quad \forall n > N_2, \quad n \in \mathbb{N}_2 \quad |a_n - A| < \varepsilon \Longrightarrow A - \epsilon < a_n.$$

Выбрав в качестве N любое число, большее, чем N_0, N_1 и N_2, получаем, что

$$A - \epsilon < a_n \leqslant c_n \leqslant b_n < A + \epsilon \Longrightarrow |c_n - A| < \epsilon.$$

Откуда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N, \quad n \in \mathbb{N} \quad |c_n - A| < \varepsilon.$$

Теорема доказана. □

Теорема 2.1.12. *Пусть функции $f_1(x)$, $f(x)$, $f_2(x)$ определены в некоторой проколотой окрестности $\mathring{\mathcal{U}}_\delta(a)$, и*

$$\forall x \in \mathring{\mathcal{U}}_\delta(a): \quad f_1(x) \leqslant f(x) \leqslant f_2(x),$$

пусть

$$\lim_{x\to a} f_1(x) = A, \quad \lim_{x\to a} f_2(x) = A.$$

Тогда функция $f(x)$ также имеет предел при $x \to a$, и $\lim_{x\to a} f(x) = A$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\epsilon > 0$. Тогда

$$\exists \mathring{\mathcal{U}}_{\delta_1}(a) : f_1(\mathring{\mathcal{U}}_{\delta_1}(a)) \subset V_A^\epsilon,$$
$$\exists \mathring{\mathcal{U}}_{\delta_2}(a) : f_2(\mathring{\mathcal{U}}_{\delta_2}(a)) \subset V_A^\epsilon.$$

Положим $\mathring{\mathcal{U}}_\delta(a) = \mathring{U}_{\delta_1}(a) \cap \mathring{\mathcal{U}}_{\delta_2}(a)$. Тогда

$$\forall x \in \mathring{\mathcal{U}}_\delta(a) : A - \epsilon \leqslant f_1(x) \leqslant f(x) \leqslant f_2(x) \leqslant A + \epsilon \Rightarrow f(x) \in V_A^\epsilon.$$

□

Замечание 12. Теоремы 2.1.11 и 2.1.12 называют теоремами о "зажатой" переменной.

2.1.9 Обобщения понятия предела.

Определение 2.1.8. Пусть $\delta > 0$ и $f(x)$ определена для $a < x < a + \delta$. Этот интервал мы будем называть правой проколотой δ-окрестностью точки a и обозначать $\mathring{\mathcal{U}}^{+}_{\delta}(a)$. Число A будем называть *пределом* $f(x)$ *при стремлении* x *к справа* a (и обозначать $A = \lim_{x\to a+0} f(x)$), если

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta \quad \forall x: \; 0 < x - a < \delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon. \tag{2.1.20}$$

или, что равносильно (2.1.20),

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\mathring{\mathcal{U}}^{+}_{\delta}(a) \quad \forall x \in \mathring{\mathcal{U}}^{+}_{\delta}(a) \quad f(x) \in V_{\varepsilon}(A). \tag{2.1.21}$$

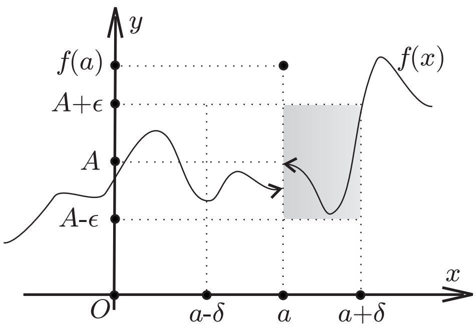


Рис. 2.3: $A = \lim_{x\to a+0} f(x)$.

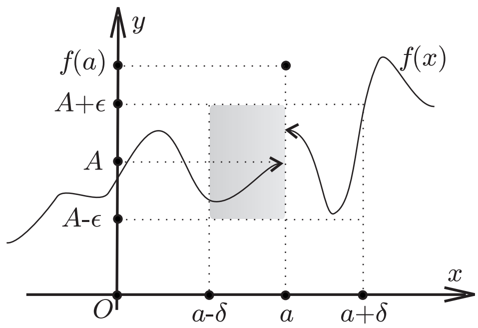


Рис. 2.4: $A = \lim_{x\to a-0} f(x)$.

Определение 2.1.9. Пусть $f(x)$ определена для $a - \delta < x < a$. Этот интервал мы будем называть левой проколотой δ-окрестностью точки a и обозначать $\mathring{\mathcal{U}}^{-}_{\delta}(a)$. Число A будем называть *пределом* $f(x)$ *при стремлении* x *к слева* a (и обозначать $A = \lim_{x\to a+0} f(x)$), если

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta \quad \forall x: \; -\delta < x - a < 0 \quad |f(x) - A| < \varepsilon. \tag{2.1.22}$$

или, что равносильно (2.1.22),

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\mathring{\mathcal{U}}^{-}_{\delta}(a) \quad \forall x \in \mathring{\mathcal{U}}^{-}_{\delta}(a) \quad f(x) \in V_{\varepsilon}(A). \tag{2.1.23}$$

Теорема 2.1.13. *Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности $\mathring{\mathcal{U}}_{\delta}(a)$. Тогда*

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \iff \lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x) = A,$$

т.е. из существования $\lim_{x\to a} f(x) = A$ вытекает существование обоих односторонних предела, причём $A = \lim_{x\to a+0} f(x)$ и $A = \lim_{x\to a-0} f(x)$ и обратно, если существуют оба односторонних предела, равные друг другу, т.е. $A = \lim_{x\to a+0} f(x)$ и $A = \lim_{x\to a-0} f(x)$, то $\lim_{x\to a} f(x) = A$.

Доказательство. Если $\lim_{x\to a} f(x) = A$, то это означает, что

$$\forall\, V_{\varepsilon}(A) \quad \exists\mathring{\mathcal{U}}_{\delta}(a) \quad \forall x \in \mathring{\mathcal{U}}_{\delta}(a) \quad f(x) \in V_{\varepsilon}(A).$$

Правая проколотая окрестность $\mathring{\mathcal{U}}^{+}_{\delta}(a)$ и левая проколотая окрестность $\mathring{\mathcal{U}}^{-}_{\delta}(a)$ представляют собой подмножества проколотой окрестности $\mathring{\mathcal{U}}_{\delta}(a)$. Поэтому из условия $x \in \mathring{\mathcal{U}}^{+}_{\delta}(a)$ следует, что $x \in \mathring{\mathcal{U}}_{\delta}(a)$ и, значит, $f(x) \in V_{\varepsilon}(A)$. Поэтому условие (2.1.21) выполняется и $A = \lim_{x\to a+0} f(x)$. Аналогично, из условия $x \in \mathring{\mathcal{U}}^{-}_{\delta}(a)$ следует условие $x \in \mathring{\mathcal{U}}_{\delta}(a)$ и, значит, $f(x) \in V_{\varepsilon}(A)$. Поэтому выполняется условие (2.1.23) и $A = \lim_{x\to a-0} f(x)$. Первое утверждение теоремы доказано.

Докажем обратное. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Тогда, согласно условию (2.1.21),

$$\exists\mathring{\mathcal{U}}^{+}_{\eta}(a) \quad \forall x \in \mathring{\mathcal{U}}^{+}_{\eta}(a) \quad f(x) \in V_{\varepsilon}(A). \tag{2.1.24}$$

Аналогично, из (2.1.23)

$$\exists \mathring{\mathcal{U}}_{\varrho}^{-}(a) \quad \forall x \in \mathring{\mathcal{U}}_{\varrho}^{-}(a) \quad f(x) \in V_{\varepsilon}(A). \tag{2.1.25}$$

Выберем в качестве числа δ любое положительное число, меньшее, чем η и ϱ. Тогда из условия $x \in \mathring{\mathcal{U}}_{\delta}(a)$, равносильного неравенствам $0 < |x-a| < \delta$, или, что тоже самое, неравенствам $a-\delta < x < a+\delta$, следует, что либо выполняются неравенства $a-\delta < x < a$ и, значит, $a-\varrho < x < a$, либо неравенства $a < x < a+\delta$, и, значит, $a < x < a+\eta$. И в том, и в другом случае из (2.1.24) и (2.1.25) следует. что $f(x) \in V_{\varepsilon}(A)$. Тем самым, мы доказали, что

$$\forall\, V_{\varepsilon}(A) \quad \exists \mathring{\mathcal{U}}_{\delta}(a) \quad \forall x \in \mathring{\mathcal{U}}_{\delta}(a) \quad f(x) \in V_{\varepsilon}(A),$$

что означает, что $\lim_{x\to a} f(x) = A$. Теорема полностью доказана. □

Часто оказываются полезными понятия предела функции при стремлении аргумента к бесконечно удалённым точкам. В этом случае аналогия между пределом последовательности и пределом функции является наиболее очевидной.

Определение 2.1.10. Число A называется ***пределом при*** $x \to +\infty$ функции $f(x)$, определённой при некотором M на луче $(M, +\infty)$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall\, x > N \quad |f(x) - A| < \varepsilon. \tag{2.1.26}$$

Используется обозначение: $A = \lim_{x\to+\infty} f(x)$. Для произвольного числа N определим N-окрестность бесконечно удалённой точки $+\infty$, как луч $(N, +\infty)$ и будем обозначать её $\mathcal{U}_N(+\infty)$. Тогда это определение можно переписать также в виде

$$\forall\, V_{\varepsilon}(A) \quad \exists \mathcal{U}_N(+\infty) \quad \forall x \in \mathcal{U}_N(+\infty) \quad f(x) \in V_{\varepsilon}(A).$$

Данное определение аналогично определению предела последовательности. Надо только заменить n на x, a_n на $f(x)$. Аналогичным образом определим понятие предела $f(x)$ при $x \to -\infty$.

Определение 2.1.11. Число A называется ***пределом при*** $x \to -\infty$ функции $f(x)$, определённой при некотором M на луче $(-\infty; M)$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall\, x < N \quad |f(x) - A| < \varepsilon. \tag{2.1.27}$$

Используется обозначение: $A = \lim_{x\to-\infty} f(x)$. Для произвольного числа N определим N-окрестность бесконечно удалённой точки $-\infty$, как луч $(N, -\infty)$ и будем обозначать её $\mathcal{U}_N(-\infty)$. Тогда это определение можно переписать также в виде

$$\forall\, V_{\varepsilon}(A) \quad \exists \mathcal{U}_N(-\infty) \quad \forall x \in \mathcal{U}_N(-\infty) \quad f(x) \in V_{\varepsilon}(A).$$

Наконец, если функция $f(x)$ определена при некоторых S, T на объединении интервалов $(-\infty, S)$ и $(T, +\infty)$, то можно очевидным образом определить понятие предела $f(x)$ при $x \to \infty$.

Определение 2.1.12. Число A называется ***пределом при*** $x \to \infty$ функции $f(x)$, определённой при некоторых S, T на объединении интервалов $(-\infty, S)$ и $(T, +\infty)$ если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall\, |x| > N \quad |f(x) - A| < \varepsilon. \tag{2.1.28}$$

Используется обозначение: $A = \lim_{x\to\infty} f(x)$. Для произвольного числа N определим N-окрестность бесконечно удалённой точки ∞, как объединение лучей $(-\infty, N)$ и $(N, +\infty)$ и будем обозначать её $\mathcal{U}_N(\infty)$. Тогда определение (2.1.28) можно переписать также в виде

$$\forall\, V_{\varepsilon}(A) \quad \exists \mathcal{U}_N(\infty) \quad \forall x \in \mathcal{U}_N(\infty) \quad f(x) \in V_{\varepsilon}(A).$$

Замечание 13. Эти определения отличаются от обычного определения предела функции только видом рассматриваемых окрестностей. Для этих обобщений понятия предела нетрудно доказать совершенно аналогичные теоремы об их арифметических свойствах и о соответствующих предельных переходах в неравенствах. Поэтому **теоремы 2.1.8, 2.1.10, 2.1.12 останутся верны, если в их формулировках заменить предельные переходы при $x \to a$ на предельные переходы при $x \to a+0$, $x \to a-0$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, $x \to +\infty$, соответственно!**

Другим важным обобщением обычного понятия предела является понятие бесконечного предела.

Определение 2.1.13. Будем говорить, что $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, если
$$\forall M \quad \exists N \quad \forall n > N, \quad n \in \mathbb{N} \quad a_n > M.$$

Определение 2.1.14. Будем говорить, что $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, если
$$\forall M \quad \exists N \quad \forall n > N, \quad n \in \mathbb{N} \quad a_n < M.$$

Определение 2.1.15. Будем говорить, что $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, если
$$\forall M \quad \exists N \quad \forall n > N, \quad n \in \mathbb{N} \quad |a_n| > M.$$

Перейдём к случаю функций.

Определение 2.1.16. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности $\mathring{\mathcal{U}}(a)$ точки $a \in \mathbb{R}$. Говорим, что $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, если
$$\forall M \quad \exists \mathring{\mathcal{U}}_\delta(a) \quad \forall x \in \mathring{\mathcal{U}}_\delta(a), \quad f(x) > M.$$
Аналогично тому, как это было сделано для последовательностей, можно дать определения $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$.

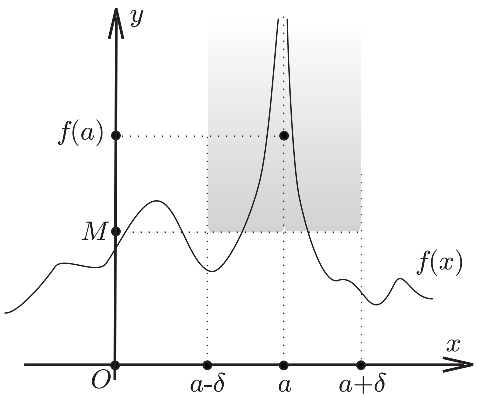


Рис. 2.5: $A = \lim_{x\to a} f(x) = +\infty$.

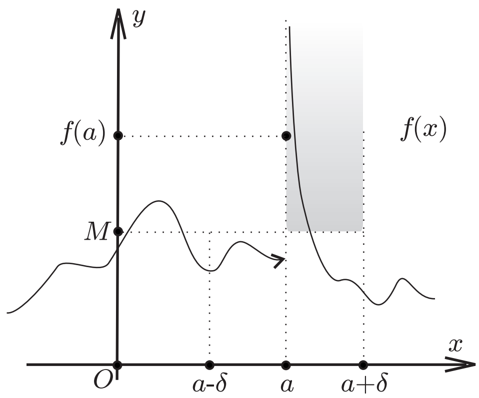


Рис. 2.6: $\lim_{x\to a+0} f(x) = +\infty$.

Определение 2.1.17. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой правой проколотой окрестности $\mathring{\mathcal{U}}(a)$ точки $a \in \mathbb{R}$. Говорим, что $\lim_{x\to a+0} f(x) = +\infty$, если
$$\forall M \quad \exists \mathring{\mathcal{U}}_\delta^+(a) \quad \forall x \in \mathring{\mathcal{U}}_\delta^+(a), \quad f(x) > M.$$

Упражнение 1. Дайте определения для $\lim_{x\to a+0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to a+0} f(x) = \infty$.

Аналогичные определения можно дать для $\lim_{x\to a-0} f(x)$. Единственное изменение: заменить $\mathring{\mathcal{U}}_\delta^+(a)$ на $\mathring{\mathcal{U}}_\delta^-(a)$.

Определение 2.1.18. Пусть функция $f(x)$ определена при некотором M на луче $(M, +\infty)$. Говорим, что $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, если
$$\forall M \quad \exists \mathring{\mathcal{U}}_N(+\infty) \quad \forall x \in \mathring{\mathcal{U}}_N(+\infty), \quad f(x) > M.$$

Определение 2.1.19. Пусть функция $f(x)$ определена при некотором M на луче $(-\infty, M)$. Говорим, что $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, если
$$\forall M \quad \exists \mathring{\mathcal{U}}_N(-\infty) \quad \forall x \in \mathring{\mathcal{U}}_N(-\infty), \quad f(x) > M.$$

Определение 2.1.20. Пусть функция $f(x)$, определена при некоторых S, T на объединении интервалов $(-\infty, S)$ и $T, +\infty$. Говорим, что $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, если

$$\forall M \quad \exists \mathring{\mathcal{U}}_N(\infty) \quad \forall x \in \mathring{\mathcal{U}}_N(\infty), \quad f(x) > M.$$

Для того, чтобы получить определения пределов $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ следует в предыдущих трёх определениях заменить неравенство $f(x) > M$ неравенством $f(x) < M$, а для того, чтобы получить определения пределов $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ следует заменить неравенство $f(x) > M$ неравенством $|f(x)| > M$.

К бесконечным пределам, разумеется, бессмысленно пытаться непосредственно применять теорему об арифметических свойствах пределов. Сформулируем и докажем теорему, которая позволит нам получить представление об арифметических свойствах бесконечных пределов. Мы ограничимся случаем последовательностей, поскольку из сказанного выше с убедительностью следует: **все важные свойства предела последовательности справедливы и для предела функции (и обобщений этих пределов), и обратно**.

Теорема 2.1.14. *Пусть* $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$. *Тогда:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty.$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = +\infty.$

Замечание 14. Про величины $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n)$ и $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n)$ в общем случае ничего определённого сказать нельзя (это так называемые "неопределённости"). Иными словами, в зависимости от конкретного вида последовательностей $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ эти пределы могут либо не существовать, либо принимать произвольные значения (от $-\infty$ до $+\infty$ включительно для $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n)$ и от 0 до $+\infty$ включительно для $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n)$).

Доказательство. Требуется доказать, что

$$\forall M \quad \exists N \quad \forall n > N, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a_n + b_n > M.$$

Из условий теоремы следует, что

$$\forall M \quad \exists N_1 \quad \forall n > N_1, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a_n > M/2. \tag{2.1.29}$$

и

$$\forall M \quad \exists N_2 \quad \forall n > N_2, \quad n \in \mathbb{N}, \quad b_n > M/2. \tag{2.1.30}$$

Пусть число N выбрано большим, чем оба числа N_1, N_2. Тогда согласно (2.1.29), (2.1.30) одновременно выполняются неравенства $a_n > M/2$, $b_n > M/2$, из которых следует неравенство $a_n + b_n > M$.

Докажем второе утверждение. Из определения предела следует, что снова имеет место утверждение (2.1.29) и

$$\exists N_2 \quad \forall n > N_2, \quad n \in \mathbb{N}, \quad b_n > 2. \tag{2.1.31}$$

Пусть число N выбрано большим, чем оба числа N_1, N_2. Тогда согласно (2.1.29),(2.1.31) одновременно выполняются неравенства $a_n > M/2$, $b_n > 2$, из которых следует неравенство $a_n \cdot b_n > M$. Теорема доказана. □

2.1.10 Вычисление предела $\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x}$.

Предварим вычисление предела $\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x}$ некоторой информацией. Во-первых, это типичный пример неопределённости (типа $0/0$), поскольку теорема об арифметических свойствах предела в этом случае не может дать определённого ответа.

Во-вторых : при первом чтении этого параграфа не может не возникнуть недоумённый вопрос: зачем нам нужен именно этот предел? Чем он так важен? Ответ простой — этот предел, носящий название *первого замечательного предела*, используется при вычислении производных таких важных функций, как $\sin x$, $\cos x$.

При втором чтении, уже после знакомства с формулой Тейлора или правилом Лопиталя, частенько возникает идея использовать какую-нибудь из этих теорем, быстро получив в результате правильный ответ. Эта идея приводит к неудачам на экзаменах. Да, в результате применения упомянутых выше теорем, разумеется, будет получен верный ответ. Но для их применения нам потребуется знание величины производной функции $\sin x$. А при вычислении этой производной, как отмечалось выше, используется вычисляемый предел. Получается так называемый "порочный логический круг". (Его "порочность"состоит в том, что некоторое доказываемое утверждение выводится из предпосылки о том, что оно уже является верным).

Теорема 2.1.15. *Справедливо равенство (1-ый замечательный предел)*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Доказательство. Отметим, что функция $\frac{\sin x}{x}$ определена при $x \neq 0$ и является чётной, так как $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x}$. Поэтому, доказав, что

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x} = 1, \tag{2.1.32}$$

мы получим, что и $\lim_{x\to 0-}\frac{\sin x}{x} = 1$, и, значит, по теореме 2.1.13, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Рассмотрим единичную окружность с центром в точке O — начала координат (см. рисунок 2.7). Проведём луч с началом в точке O и образующим угол в x радиан с осью Ox.

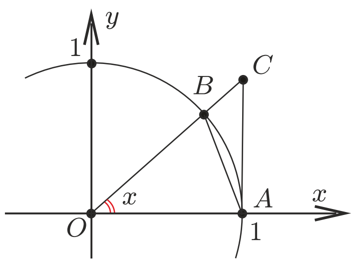


Рис. 2.7:

Для доказательства равенства (2.1.32) сначала установим, что при $0 < x < \pi/2$ выполняются неравенства

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x. \tag{2.1.33}$$

которые означают, что площадь треугольника $\triangle OAB$ меньше, чем площадь кругового сектора OAB, которая, в свою очередь, меньше, чем площадь треугольника OAC (см. рисунок 2.7). Действительно,

$$\begin{aligned} S_{\triangle OAB} &= \frac{1}{2}\,h_B\cdot OA = \frac{1}{2}\sin x,\\ S_{OAB} &= \frac{1}{2}\,x\cdot R^2 = \frac{1}{2}\,x,\\ S_{\triangle OAC} &= \frac{1}{2}AC\cdot OA = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x. \end{aligned}$$

Разделив все входящие в неравенство (2.1.33) величины на положительную в области $0 < x < \pi/2$ величину $(\sin x)/2$, получаем неравенства

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Из полученного двойного неравенства, ввиду положительности всех входящих в них величин, следует, что

$$\begin{array}{ccccc} \cos x & < & \frac{\sin x}{x} & < & 1\\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\ 1 & & \downarrow & & 1\\ & & 1 & & \end{array} \tag{2.1.34}$$

Если мы докажем, что $\lim_{x\to 0+}\cos x = 1$, то тогда по теореме о зажатых функциях будет доказано равенство (2.1.32), а вместе с ним и теорема. Из равенства $\cos x = 1 - 2\cdot\sin^2\frac{x}{2}$ вытекает

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \leqslant 1-\cos x & = 2\cdot\sin^2\frac{x}{2} & \leqslant \frac{x^2}{2}\\ \downarrow & & & \downarrow\\ 0 & & & 0 \end{array}$$

Откуда следует, что $\lim_{x\to 0+} 1-\cos x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1\\ \lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=1\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

□

2.1.11 Критерий Коши для последовательности.

Определение 2.1.21. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ назовём *фундаментальной*, если $\forall\epsilon>0$, $\exists N_\epsilon\in\mathbb{N}$: $\forall n,m>N_\epsilon \quad |x_n-x_m|<\epsilon$.

Теорема 2.1.16 (Критерий Коши для последовательности). *Справедливо*

$$\boxed{\exists \text{ (конечный) } \lim_{n\to\infty} x_n} \iff \boxed{\forall\epsilon>0 \quad \exists N_\epsilon\in\mathbb{N}:\forall n,m>N_\epsilon \quad |x_n-x_m|<\epsilon}$$

Замечание 15. Иными словами критерий Коши показывает то, что существует конечный предел тогда и только тогда, если последовательность $\{x_n\}$ — фундаментальна.

Доказательство. Докажем слево направо ($\Rightarrow$). Пусть существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} x_n = A$. Тогда

$$\epsilon>0 \quad \exists N_\epsilon\in\mathbb{N} \quad \forall n>N_\epsilon : |x_n-A|<\frac{\epsilon}{2}$$

Пусть $m,n>N$

$$|x_n-x_m|=|(x_n-A)-(x_m-A)|\leqslant |x_n-A|+|x_m-A|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$$

Докажем в обратную сторону ($\Leftarrow$). Последовательность $\{x_n\}$ — фундаментальная, т.е.

$$\epsilon>0 \quad \exists N\in\mathbb{N} \quad \forall n,m\geqslant N : |x_n-x_m|<\frac{\epsilon}{3}.$$

Следовательно $\forall n\geqslant N$ выполнено

$$x_N-\frac{\epsilon}{3}<x_n<x_N+\frac{\epsilon}{3}.$$

Введём вспомогательные величины

$$a_k=\inf_{s\geqslant k} x_s; b_k=\sup_{s\geqslant k} x_s.$$

Из определения вытекают неравенства

$$a_k\leqslant a_{k+1}\leqslant\cdots\leqslant b_{k+1}\leqslant b_k.$$

Положим $I_k=[a_k;b_k]$, I_k образуют последовательность, вложенных отрезков. Поэтому существует такое число $A\in\mathbb{R}$, что $A\in I_k(\forall k\in\mathbb{N})$. Докажем:

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = A.$$

Действительно, поскольку $a_n\leqslant x_n\leqslant b_n$ и $a_n\leqslant A\leqslant b_n$ для любого $n\geqslant N$, то

$$x_N-\frac{\epsilon}{3}\leqslant \inf_{s\geqslant N} x_s=a_N\leqslant a_n\leqslant x_n\leqslant b_n\leqslant b_N=\sup_{s\geqslant N} x_s\leqslant x_N+\frac{\epsilon}{3}.$$

Из неравенства $a_N\leqslant A\leqslant b_N$ вытекает, что A и x_n принадлежат отрезку $J_N(\epsilon)=[x_N-\frac{\epsilon}{3},x_N+\frac{\epsilon}{3}]$. Следова-

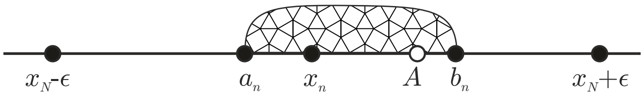


Рис. 2.8:

тельно расстояние между точками A и x_n для любого $n \geqslant N$ меньше длины отрезка $J_N(\epsilon)$[1], т.е.

$$|A - x_n| \leqslant \mu(J_N(\epsilon)) = \frac{2\epsilon}{3} < \epsilon.$$

$\square$

П р и м е р 2.1.8. Покажем, что не существует предела последовательность $x_n = \sin n^\circ$.

Из того, что функция $f(x) = \sin x$ ограничена на всей числовой прямой, то предел если бы и существовал, то только конечный. Докажем, используя критерий Коши, что не существует конечного предела $\lim_{n\to+\infty} \sin n^\circ$.

Отрицание того, что последовательность не является фундаментальной можно записать в следующем виде:

$$\exists\, \epsilon > 0 \quad \forall\, N \in \mathbb{N} : \exists\, n = n(N), m = m(N) \geqslant N_\epsilon \quad |x_n - x_m| > \epsilon.$$

Положим $\epsilon = 1$, тогда для любого натурально номера N существуют $n = n(N) = 360^\circ \cdot N + 90^\circ$ и $m = m(N) = 360^\circ \cdot N - 90^\circ$ такие, что

$$|x_n - x_m| = |\sin(360^\circ \cdot N + 90^\circ) - \sin(360^\circ \cdot N - 90^\circ)| = 2 > 1 = \epsilon.$$

Таким образом мы доказали, что не существует предела $\lim_{n\to+\infty} \sin n^\circ$.

П р и м е р 2.1.9. Покажем, что для последовательности $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ не существует конечного предела.

Для этого опять воспользуемся отрицанием того, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ — фундаментальна. Положим $\epsilon = 1/4$, тогда для любого натурально номера N существуют $n = n(N) = N$ и $m = m(N) = 2N$ такие, что

$$|x_n - x_m| = \left|\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \cdots + \frac{1}{N+N}\right| \geqslant N \cdot \frac{1}{2N} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4} = \epsilon.$$

Таким образом мы доказали, что не существует конечного предела $\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$.

Заметим, что данной последовательности можно доказать:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} - \frac{1}{252n^6} \cdots =$$
$$= \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{2k \cdot n^{2k}},$$

где B_{2k} — числа Бернулли. К этому результату мы вернёмся несколько позже. Здесь γ так называемая *константа Эйлера* $\gamma = 0,577215\ldots$. [2]

2.1.12 Теорема Вейерштрасса.

[1]Длину отрезка $[a, b]$ здесь и далее мы будем обозначать $\mu([a, b])$. По определению будем полагать, что $\mu([a, b]) = b - a$, при $b > a$.

[2]Постоянная Эйлера может быть выражена через интеграл:

$$\gamma = 1 - \int_0^1 \left\{\frac{1}{x}\right\} dx = 1 - \int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^2}\, dx,$$

где $\{t\}$ — дробная часть числа t.

Определение 2.1.22. Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *сходится*, если существует конечный $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$. Если предел не существует либо равен бесконечности, то будем говорить, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *расходится*.

Теорема 2.1.17. *Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — монотонно неубывающая (невозрастающая) последовательность. Тогда*

$$\boxed{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} - \textit{сходится}} \iff \boxed{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \textit{ ограничена сверху (снизу)}}$$

Доказательство. $\Rightarrow$ очевидно (последовательность сходится $\Rightarrow$ ограничена)
$\Leftarrow$

$$\exists \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n = S \text{ - точная верхняя грань}$$

По определению точной верхней грани

$$\epsilon > 0 \quad \exists x_N : x_N \leqslant S < x_N + \epsilon$$

Из монотонности последовательности $\{x_n\}\uparrow$ вытекает, что $\forall n \geqslant N$

$$x_N \leqslant x_n \leqslant S < x_N + \epsilon.$$

Следовательно для произвольного положительного ϵ мы подобрали $N \in \mathbb{N}$ такой, что $\forall n > N$ выполнено $|x_n - S| < (x_N + \epsilon) - x_N = \epsilon$. Следоватльно по определению предела это означает: $\lim_{n\to+\infty} x_n = S$. ☐

П р и м е р 2.1.10. Рассмотрим последовательность $x_n = \frac{n^3}{2^n}$. Найдем $\lim_{n\to+\infty} x_n$. Поскольку

$$x_{n+1} = \frac{(n+1)^3}{2^{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot x_n \to \frac{1}{2} \cdot x_n, \quad n \to \infty,$$

то существует $N \in \mathbb{N}$, что для любого $n > N$ выполнено

$$x_{n+1} < x_n \Rightarrow \begin{cases} x_n \downarrow \\ x_n \geqslant 0 \end{cases} \Longrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} x_n$$

Мы доказали существование предела $\lim_{n\to+\infty} x_n$ обозначим его через s. Теперь остается найти этот предел Используя равенство

$$x_{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot x_n$$

в пределе, получаем $s = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot s$. Откуда $s = 0$.

Замечание 16. Аналогично можно доказать, что для любых $a > 0$, $b > 1$ справедливы соотношения

$$\ln n \ll n^a \ll b^n \ll n! \quad n \to +\infty.$$

Здесь символ $x_n \ll y_n$ при $n \to +\infty$ понимается в смысле того, что $\lim_{n\to+\infty} x_n/y_n = 0$.

Определение 2.1.23. В случае, когда предел равен бесконечности, определение следующее

$$1)\ \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \qquad \forall C>0 \quad \exists N\in\mathbb{N} \quad \forall n>N \quad x_n > C.$$
$$2)\ \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \qquad \forall C>0 \quad \exists N\in\mathbb{N} \quad \forall n>N \quad x_n < C.$$
$$3)\ \lim_{n\to\infty} x_n = \infty \qquad \forall C>0 \quad \exists N\in\mathbb{N} \quad \forall n>N \quad |x_n| > C.$$

Определение 2.1.24. S — частичный предел последовательности $\{x_n\}$, если существует подпоследовательность $\exists\{x_{n_k}\}$, $1 \leqslant n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ такая, что

$$\lim_{x\to+\infty} x_{n_k} = S.$$

Определение 2.1.25.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty} (\sup_{k\geqslant n} x_k)$$
$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty} (\inf_{k\geqslant n} x_k)$$

П р и м е р 2.1.11. Рассмотрим последовательность $x_n = (-1)^n$ и докажем, что не существует конечного предела $\lim_{n\to+\infty} x_n$, используя критерий Коши. Пусть $\epsilon = 1$ тогда $\forall N\in\mathbb{N}$ существуют $n = N+1$, $m = N+2$ такие, что

$$|x_{N+1} - x_{N+2}| = 2 > \epsilon = 1.$$

Таким образом доказано, что не существует предела $\lim_{n\to+\infty} x_n$. Найдём верхний и нижний предел данной последовательности

$$s_n = \sup_{k\geqslant n} x_k = 1 \quad \overline{\lim} x_n = 1,$$
$$i_n = \inf_{k\geqslant n} x_k = -1 \quad \underline{\lim} x_n = -1.$$

Также предъявим частичные подпоследовательности, на которых достигаются соответственно верхний и нижний предел

$$\{x_{2k}\}_{k=1}^{\infty} \quad \lim_{R\to+\infty} x_{2k} = 1,$$
$$\{x_{2k+1}\}_{k=1}^{\infty} \quad \lim_{R\to+\infty} x_{2k+1} = -1.$$

Утверждение 2.1.18.

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n$$

2.1.13 Число e.

Число e, которое будет определено ниже, является одной из классических постоянных в математике.

Теорема 2.1.19. *Существует*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Замечание 17. Доказательство не такое простое, поэтому иногда, в условиях нехватки времени при подготовке к экзамену, возникает "гениальная"мысль. Предел выражения $1 + 1/n$, разумеется, равен 1. Применим-ка мы теорему о пределе произведения! Тогда исследуемый предел будет равен произведению сомножителей, каждый из которых равен 1. Значит, он равен 1! *Неверность этого рассуждения* состоит в следующем. Теорема о пределе произведения доказана нами для 2 сомножителей. Её легко доказать, повторным применением, для любого ограниченного (не зависящего от n) числа сомножителей. Но в исследуемом случае число сомножителей растёт вместе с n и теорема о пределе произведения неприменима!

Лемма 3 (Неравенство Бернулли). *Пусть* $x \geqslant -1$. *Тогда*

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Доказательство. Неравенство докажем при помощи метода математической индукции.

- Проверим справедливость гипотезы (неравенства в данном случае) при минимальном натуральном номере, при котором верна гипотеза. В нашем случае это $n = 1$. При $n = 1$ неравенство превращается в очевидное: $1 + x \geqslant 1 + x$. Таким образом при $n = 1$ мы проверили справедливость гипотезы.
- Предположим, что неравенство справедливо при $n = k$, т.е. выполнено $(1 + x)^k \geqslant 1 + kx$, для $x \geqslant -1$.
- Докажем, что неравенство справедливо также и при $n = k + 1$. Так как $1 + x \geqslant 0$, то

$$\begin{aligned}
&(1+x)^k \geqslant 1+kx \Longrightarrow \\
&(1+x)^k \cdot (1+x) \geqslant (1+kx)(1+x) \Longrightarrow \\
&(1+x)^{k+1} \geqslant 1+(k+1)x+kx^2 \geqslant 1+(k+1)x.
\end{aligned}$$

□

Доказательство. Докажем теорему 2.1.19. Рассмотрим последовательности

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Докажем, что последовательность $y_n \downarrow$ убывающая.

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{(1+\frac{1}{n-1})^n}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}} = \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}{(\frac{n+1}{n})^{n+1}} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} \geqslant \left(1+\frac{n}{n^2-1}\right)\frac{n}{n+1} = \frac{n^3+n^2-n}{n^3+n^2-n-1} > 1 \Rightarrow y_n \downarrow.$$

Доказано: последовательность y_n убывающая и ограниченная снизу $y_n \geqslant 0$, применяем теорему Больцано-Вейерштрасса, согласно которой существует конечный предел

$$\lim_{n\to+\infty} y_n.$$

Данный предел мы обозначим через e, т.е.

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Докажем, что существует конечный предел для последовательности x_n и равен тому же числу. Действительно, из теоремы об арифметических свойствах предела последовательности вытекает.

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{y_n}{1+\frac{1}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} y_n}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{e}{1} = e.$$

□

Упражнение 2. Докажите, что $x_n \uparrow$.

Упражнение 3. Докажите, что последовательность $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+p}$

- при $p \geqslant 1/2$ монотонно убывает при $n \in \mathbb{N}$;
- при $p < 1/2$ монотонно возрастает, начиная с некоторого $N \in \mathbb{N}$ для любых $n \geqslant N$.

Замечание 18. Приближённое значение числа $e \approx 2,71828182845905\ldots$.

Замечание 19. Число e является трансцендентным, т.е. при его подстановке в любой многочлен с целыми коэффициентами полученное значение не равно 0.

Замечание 20. Из очевидного неравенства $x_n \geqslant y_n$ и монотонности последовательностей вытекает

$$0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots < e < \ldots y_n < \cdots < y_2 < y_1.$$

Откуда можно сделать вывод о том, что для числа e мы можем находить его десятичную запись выбирая x_n и y_n так, чтобы у x_n и y_n совпадало нужное нам количество знаков после запятой.

2.1.14 Число e как сумма ряда.

Введём обозначение $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, $e_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$. По формуле бинома Ньютона получаем

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} + \cdots + \frac{1}{n^n} =$$
$$= 1+1+\frac{1}{2!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Докажем неравенства

$$x_n < e_n \leqslant e. \tag{2.1.35}$$

Неравенство $x_n < e_n$ вытекает из определений. При фиксированном $k \in \mathbb{N}$ и $n \geqslant k$ получаем:

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{k!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < x_n.$$

Если в последнем неравенстве перейти к пределу ($n \to +\infty$), получим требуемое (2.1.35). Остаётся перейти в неравенстве (2.1.35) к пределу ($n \to +\infty$), чтобы получить разложения число e в ряд.

$$e = \lim_{n\to+\infty} e_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}.$$

Из оценки

$$0 < e - e_n \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\ldots(n+k)} < \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^k} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n! \cdot n},$$

вытекает существование такого $\theta_n \in (0, 1)$, что

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n! \cdot n}.$$

Теорема 2.1.20. *Число e — иррационально.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. число e иррационально, тогда существуют такие натуральные p, q, что $e = p/q$. Тогда по доказанному, справедливо:

$$e = \frac{p}{q} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!} + \frac{\theta_q}{q! \cdot q} \iff$$
$$p \cdot q! = \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right) \cdot (q! \cdot q) + \theta_q \iff$$
$$\theta_q = p \cdot q! - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right) \cdot (q! \cdot q).$$

Но данное равенство невозможно, т.к. в последнем равенстве $\theta_q \in (0;1)$, а выражение справа является целым числом. Полученное противоречие доказывает теорему. □

Замечание 21. Из трансцендентности числа e конечно же бы вытекало, что число e — иррационально, но доказательство трансцендентности числа e значительно сложнее.

Контрольные вопросы.

1. Дайте определение предела последовательности $\lim_{n\to+\infty} x_n = A$ и предела функции $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $A \in \mathbb{R}$.
2. .

Упражнения к 2.1

Упражнение 2.1.1. *Пользуясь теоремой Вейерштрасса, докажите существование предела последовательности*

$$x_1 = 4; \quad x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}, \; n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2.$$

и надите этот предел.

Упражнение 2.1.2. *Пользуясь теоремой Вейерштрасса, докажите существование предела последовательности*

$$x_1 = -4; \quad x_{n+1} = \frac{x_n}{2 + x_n}, \; n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2.$$

и надите этот предел.

Упражнение 2.1.3. *Докажите, что последовательности*

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \ln n,$$
$$b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} - \ln n,$$

монотонны, а именно последовательность a_n возрастает, b_n убывает. Докажите, что $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n$ *(Данный предел известен, как постоянная Эйлера).*

Упражнение 2.1.4. *Докажите, что существует предел последовательности $a_n = \left(1 + \frac{7}{n}\right)^n$ и найдите его (пользуясь только пройдёнными материалом).*

Упражнение 2.1.5. *Существует ли предел последовательности $_n = 3c_{n-2} - 2c_{n-1}$, $c_1 = 2$, $c_3 = 3$, если сущесвтует, то найдите его.*

Ответы: 2.1.1 3. **2.1.2** 0. **2.1.4** e^7. *Указание:* можно рассмотреть последовательность $y_n = \left(1 + \frac{7}{n}\right)^{n+7}$, которая будет убывающей. **2.1.5** не существует. *Указание:* Докажите, что $|c_n| \geqslant 1$ и последовательность меняет знак, начиная с некоторого номера.

2.2 Первые сведения о сходимости ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \in \mathbb{C}.$$

Определение 2.2.1. Частичной суммой ряда называется

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Определение 2.2.2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *сходящимся*, если существует и конечен предел частичных сумм

$$\lim_{n\to\infty} S_n.$$

Если предел не существует или бесконечен ряд называется *расходящимся*.

Определение 2.2.3. По аналогии с рядом говорят, что последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$, где b_n действительные (или комплексные) *сходящаяся*, если существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} b_n$, а иначе последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$ называется расходящейся.

2.2.1 Критерий Коши сходимости ряда.

Теорема 2.2.1 (Критерий коши о сходимости ряда)**.**

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ - \textit{сходится}}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant m > N \\ |a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n| < \epsilon \end{array}\right)$$

Доказательство. Применим критерий Коши существования предела последовательности к частичной сумме $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Тогда

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant m > N \quad |S_n - S_m| < \epsilon,$$

что полностью равносильно утверждению теоремы. □

Теорема 2.2.2 (Необходимый признак сходимости)**.** *Если* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *— сходится, то* $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$.

Доказательство. Достаточно в предыдущей теореме положить $n = N + 1$, $m = N$. Тогда $|a_{N+1}| < \epsilon$ □

П р и м е р 2.2.1. Рассмотрим *гармонический* ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$. Используя отрицание критерия Коши докажем, что гармонический ряд расходится. Пусть $\varepsilon = 1/2$. Положим $m = N$, $n = 2N$, тогда

$$\frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} + \cdots + \frac{1}{2N} > N \cdot \frac{1}{2N} = \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом гармоничесиий ряд расходится.

2.2.2 Признак Даламбера, Коши.

Теорема 2.2.3 (Признак Коши сходимости ряда)**.** *Положим*

$$q = \overline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Тогда

a) $q < 1 \quad \Longrightarrow$ *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится абсолютно.*

b) $q > 1 \quad \Longrightarrow$ *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

c) $q = 1 \quad \Longrightarrow$ *вопрос о сходимости остаётся открытым. Например, ряд* $\sum \frac{1}{n}$ *— расходится, а ряд* $\sum \frac{1}{n^2}$ *— сходится, хотя для каждого из этих рядов справедливо, что* $q = 1$*.*

Доказательство. **b.** Если

$$\overline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1,$$

то существует подпоследовательность $\{n_k\}_{k=1}^{+\infty}$ натурального ряда такая, что $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > 1$. Следовательно, существует такое натуральное число N, что для любого $k > N$ выполняется $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > 1$. Откуда $|a_{n_k}| > 1$ для всех натуральных $k > N$. Необходимый признак сходимости не выполнен, т.е. ряд расходится.

a. Пусть

$$q = \overline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1.$$

Тогда существует $\tilde{q} \in (q; 1)$ такое, что $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad \sqrt[n]{|a_n|} < \tilde{q} < 1$. Откуда

$$|a_n| < (\tilde{q})^n, 0 < \tilde{q} < 1.$$

Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{q})^n$ сходится (бесконечная убывающая геометрическая прогрессия), то из признака сравнения вытекает, что исходный ряд также сходится.

□

Теорема 2.2.4 (Признак Даламбера сходимости ряда)**.** *Пусть все* $a_n > 0$*, для всех* $n \in \mathbb{N}$ *и существует*

$$q = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Тогда

a) $q < 1 \quad \Longrightarrow$ *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится абсолютно.*

b) $q > 1 \quad \Longrightarrow$ *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

c) $q = 1 \quad \Longrightarrow$ *вопрос о сходимости остаётся открытым. Например, ряд* $\sum \frac{1}{n}$ *— расходится, а ряд* $\sum \frac{1}{n^2}$ *— сходится, хотя для каждого из этих рядов справедливо, что* $q = 1$*.*

Доказательство. б)

$$\exists n \in \mathbb{N}, \quad \forall n > N \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow a_{n+1} > a_n > 0$$

По необходимому признаку сходимости ряд расходится
а)

$$q < \tilde{q} < 1$$

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N$$

$$* \begin{cases} \frac{a_{n+1}}{a_n} < \tilde{q} \\ \frac{a_{N+1}}{a_N} < \tilde{q} \\ \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} < \tilde{q} \\ \dots \\ \frac{a_{N+k}}{a_{N+k-1}} < \tilde{q} \end{cases}$$

$$\frac{a_{N+k}}{a_N} < (\tilde{q})^k$$

$$0 < a_{N+k} < a_N(\tilde{q})^k \text{ - сходится, так как геометрическая прогрессия и } 0 < \tilde{q} < 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_{N+k}$$

□

Теорема 2.2.5. $\sum a_k$, $\sum b_k$
Пусть $0 \leqslant a_k \leqslant b_k$
Тогда, если (B) *- сходится* $\Rightarrow$ (A) *- сходится,* (A) *- расходится* $\Rightarrow$ (B) *- расходится.*

Доказательство.
$$|a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n| \leqslant |b_{m+1} + b_{m+2} + \cdots + b_n|$$
По критерию Коши о сходимости ряда. □

2.2.3 Теорема Теплица. Теорема Штольца.

Теорема 2.2.6 (Теплица).
$$\begin{pmatrix} p_{11} & & & \\ p_{21} & p_{22} & & \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$
$p_{nk} \in \mathbb{R},\ 1) p_{nk} \geqslant 0,\ 2) \sum\limits_{k=1}^{n} p_{nk} = 1,\ 3) \lim\limits_{n\to\infty} p_{nk} = 0,\ 4) \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$. *Тогда* $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} p_{nk} x_k = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Доказательство. Последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$, $\{x_n - a\}_{n=1}^{+\infty}$ сходятся, поэтому существует $M > 0$ такая, что $\forall n \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства $|x_n| \leqslant M$, $|x_n - a| \leqslant M$.

Для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ существует $N_1 : \forall n > N_1\ |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Для фиксированного (уже выбранного) $\varepsilon > 0$ существует $\exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n > N_2\ |p_{nk}| < \frac{\varepsilon}{2N_1 M}$ для всех $k = 1, \dots N_1$. Без ограничения общности будем считать, что $N_2 > N_1$. Тогда для всех $n > N_2$ справедливо

$$\left|\sum_{k=1}^{n} p_{nk} x_k - a\right| = [2)] = \left|\sum_{k=1}^{n} p_{nk}(x_k - a)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{N_1} p_{nk}|x_k - a| + \sum_{k=N_1+1}^{n} p_{nk}|x_k - a| \leqslant M \sum_{k=1}^{N_1} p_{nk} + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=N_1+1}^{n} p_{nk} \leqslant$$
$$\leqslant M \cdot N_1 \cdot \frac{\varepsilon}{2N_1 M} + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=1}^{n} p_{nk} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Теорема доказана. □

Теорема 2.2.7 (Штольца). *Пусть* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— заданные последовательности. Если выполнены условия:*

1. $y_{n+1} > y_n$, $n \in \mathbb{N}$;

2. $\lim_{n\to+\infty} y_n = +\infty$;

3. *существует* $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$, *то*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}.$$

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $y_1 \geqslant 0$, т.к. иначе достаточно переопределить последовательность y_n формулой: $\tilde{y}_n = y_n - y_1$.

Положим $X_k = \frac{x_{k+1}-x_k}{y_{k+1}-y_k}$, $P_{nk} = \frac{y_{k+1}-y_k}{y_{n+1}}$

Теперь из условия $y_1 \geqslant 0$ вытекает, что если доопределить исходные последовательности нулями, т.е. положить $x_0 = y_0 = 0$, то выполнены условия теоремы Теплица 1)$P_{nk} \geqslant 0,\ n,k \in \mathbb{Z}_+$ 2)$\sum\limits_{k=0}^{n} P_{nk} = 1$, 3)$\lim\limits_{n\to\infty} P_{nk} = 0$, 4) существует $\lim_{n\to+\infty} X_n$

и справедливо равенство $\sum\limits_{k=0}^{n} P_{nk}X_k = X_n$. Остаётся воспользоваться теоремой Теплица. □

Контрольные вопросы.

1. Сформулируйте признак Коши о сходимости ряда.
2. Сформулируйте признак Даламбера о сходимости ряда.

Упражнения к 2.2

Упражнение 2.2.1. *Пусть $f:\ \mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ обладает свойством, что любую расходящуюся числовую последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$ функция f переводит в расходящуюся, т.е. последовательность $\{f(b_n)\}_{n=1}^{+\infty}$ — расходится. Будет ли отображение $f:\ \mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ инъективным? Докажите.*

Ответы: 2.2.1 Да, инъективно.

2.3 Предел последовательности и функции (продолжение).

2.3.1 Равносильность определений предела функции по Коши и по Гейне.

Определение 2.3.1 (Предела по Гейне)**.** $\forall\{x_n\}\in\mathbb{R}\setminus\{a\}$, такой, что $x_n\to a$ при $(n\to+\infty)$, $f(x_n)\to A$ при $(n\to+\infty)$, то будем говорить, что существует предел $\lim_{x\to a} f(x) = A$.

Теорема 2.3.1 (Равносильность определений по Коши и по Гейне)**.** *Определение предела функции по Коши равносильно определению предела функции по Гейне.*

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть $\lim_{x\to a} f(x) = A$ в смысле Коши. Зафиксируем произвольное $\epsilon > 0$. Тогда

$$\exists\,\delta>0 : f(\overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(a))\subset V_\epsilon(A).$$

Если $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ произвольная последовательность такая, что $x_n\to a$, $x_n\neq a$, тогда все $x_n\in\overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(a)$, начиная с некоторого номера $\forall n\geqslant N$. Откуда вытекает

$$f(x_n)\in V_\epsilon(A)\Rightarrow\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = A.$$

$\Leftarrow$ Докажем методом от "противного". Пусть функция $f(x)$ имеет предел при $x\to a$ в смысле Гейне, а в смысле Коши нет. Напишем отрицание того, что предел в смысле Коши равен A.

$$\exists\,\epsilon>0,\quad\forall\delta>0\quad\exists x\in\overset{\circ}{U}_\delta(a) : |f(x)-A|>\epsilon.$$

Поскольку предыдущее неравенство выполнено при любом δ, то рассмотрим различные δ:

$$\left.\begin{array}{ll}\delta_1 = 1 & \exists\, x_1 \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_{\delta_1(a)} : |f(x_1) - A| > \epsilon, \\ \delta_2 = \frac{1}{2} & \exists\, x_2 \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_{\delta_2(a)} : |f(x_2) - A| > \epsilon, \\ \delta_3 = \frac{1}{3} & \exists\, x_3 \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_{\delta_3(a)} : |f(x_3) - A| > \epsilon, \\ \vdots & \vdots \\ \delta_n = \frac{1}{n} & \exists\, x_n \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_{\delta_n(a)} : |f(x_n) - A| > \epsilon, \\ \vdots & \vdots \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} x_n \to a \quad (n \to +\infty) \\ \lim_{n\to+\infty} f(x_n) \neq A \end{array}$$

Полученное противоречее завершает доказательство. □

П р и м е р 2.3.1. Покажем, что не существует предела $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$. Действительно,

$$x_n = \frac{1}{2\pi n}, \quad n \in \mathbb{N}, \Longrightarrow \sin\frac{1}{x_n} = 0,$$
$$y_n = \frac{1}{\pi/2 + 2\pi n}, \quad n \in \mathbb{N}, \Longrightarrow \sin\frac{1}{y_n} = 1.$$

Поскольку мы предъявили две последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$ такие, что $\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = 0$, но с разными пределами, то согласно определения предела функции по Гейне предела $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ не существует.

2.3.2 Предел функции по базе.

Определение 2.3.2 (База)**.** Совокупнось подмножеств $B \subset X$ называется Базой $\mathbb{B}$, если
1) $\forall B \in \mathbb{B}, B \neq 0$
2) $\forall B_1, B_2 \in \mathbb{B}, \quad \exists B_3 \subset B_1 \cap B_2$

П р и м е р 2.3.2.

Обозначение базы	Элементы базы	Обозначение элемента базы
$x \to a$	База проколотых окрестностей точки a	$\overset{\circ}{\mathcal{U}}(a) = \{x \in \mathbb{R}\backslash\{a\} :\ a - \delta_1 < x < a + \delta_2\}$ $\delta_1, \delta_2 > 0$
$x \to a+$	База правых окрестностей точки a	$\overset{\circ}{\mathcal{U}}_+(a) = \{x \in \mathbb{R} :\ a < x < a + \delta\}$ $\delta > 0$
$x \to \infty$	База окрестностей бесконечности	$\overset{\circ}{\mathcal{U}}(\infty) = \{x \in \mathbb{R} : \lvert x\rvert > \delta\}$ $\delta \in \mathbb{R}$
$x \to +\infty$	База окрестностей $+\infty$	$\overset{\circ}{\mathcal{U}}(+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > \delta\}$ $\delta \in \mathbb{R}$
$x \to -\infty$	База окрестностей $-\infty$	$\overset{\circ}{\mathcal{U}}(-\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x < \delta\}$ $\delta \in \mathbb{R}$

Определение 2.3.3.

$$\lim_{\mathbb{B}} f(x) = A$$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists B \in \mathbb{B} : f(B) \subset V_\epsilon(A)$$

Теорема 2.3.2 (Критерий Коши существования предела по Базе)**.**

$$(\exists \text{ \textit{конечный} } \lim_{\mathbb{B}} f(x)) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \forall \epsilon > 0 \quad \exists B \in \mathbb{B} \\ \omega(f, B) < \epsilon \end{pmatrix}$$

Определение 2.3.4. Введём важное для анализа понятие колебание функции $f(x)$ на множестве B

$$\omega(f, B) = \sup_{x_1, x_2 \in B} |f(x_1) - f(x_2)|$$

П р и м е р 2.3.3.

$$\omega(x^3, [-2; 1]) = 9$$
$$\omega(x^4, [-1; 2]) = 16$$

Доказательство. $\Rightarrow$

$$\epsilon > 0 \quad \exists B_\epsilon \in \mathbb{B}, \quad \forall x \in B_\epsilon : |f(x) - A| < \frac{\epsilon}{3}$$

Пусть $x_1, x_2 \in B_\epsilon$. Тогда

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |f(x_1) - A| + |A - f(x_2)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} < \epsilon$$

$\Leftarrow$

$$\begin{array}{lll} \epsilon = 1 & \exists \tilde{B}_1 & \omega(f, \tilde{B}_1) < 1 \\ \epsilon = \frac{1}{2} & \exists \tilde{B}_2 & \omega(f, \tilde{B}_2) < \frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \epsilon = \frac{1}{n} & \exists \tilde{B}_n & \omega(f, \tilde{B}_n) < \frac{1}{n} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} B_1 = \tilde{B}_1 & \omega(f, B_1) < 1 \\ B_2 \subset B_1 \cap \tilde{B}_2 & \omega(f, B_2) < \frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots \\ B_n \subset B_{n-1} \cap \tilde{B}_n & \omega(f, B_n) < \frac{1}{n} \end{array}$$

$$B_1 \supset B_2 \supset \dots \supset B_n \supset \dots$$

$$\begin{array}{l} x_1 \in B_1 \\ x_2 \in B_2 \\ \vdots \\ x_n \in B_n \\ \vdots \end{array}$$

Покажем, что $\{f(x_n)\}_{n=1}^\infty$ — фундаментальная последовательность.

$$\epsilon > 0, \quad \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{N_\epsilon} < \epsilon, \quad \forall n, m > N_\epsilon \text{ (пусть для определённости } n \geqslant m)$$

$$|f(x_n) - f(x_m)| \leqslant \omega(f, B_m) \leqslant \frac{1}{m} < \frac{1}{N_\epsilon} < \epsilon.$$

По критерию Коши для $\{f(x_n)\}$ существует $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Докажем, что существует $\lim_{\mathbb{B}} f(x) = A$.

$$\epsilon > 0 \quad \exists N_1 \in \mathbb{N}, \quad \forall n > N_1 : |f(x_n) - A| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N_2 \ : \ \omega(f, B_n) < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\text{Пусть } N = \max\{N_1, N_2\}. \text{ Для } \forall x \in B_n, \text{ где } n \geqslant N$$

$$|f(x) - A| \leqslant |f(x) - f(x_n)| + |f(x_n) - A| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

$\square$

2.3.3 Теоремы о композиции предела функции.

При исследовании композиции предела функции возникает гипотеза, верно ли следующее утверждение:

Гипотеза. *Пусть*

1. $\lim_{y\to b} g(y) = A$;

2. $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

Верно ли, что тогда существует $\lim_{x\to a} g(f(x)) = A$?

Оказывается, что ответ отрицателен. Смотри ниже приведенные примеры 2.3.4, 2.3.5. Поэтому существует два способа: либо усиливать первое утверждение (например, требовать непрерывность "внешней"функции, либо усиливать второе утверждение о "внутренней"функции).

Теорема 2.3.3. *Пусть* $g : Y \to R$, $\mathbb{B}_Y$ *— база в* Y, $f : X \to Y$, $\mathbb{B}_X$ *— база в* X *и выполнены условия*

1. $\lim_{\mathbb{B}_Y} g(y) = A$;

2. $\forall B_y \in \mathbb{B}_Y \quad \exists B_x \in \mathbb{B}_X \quad f(B_x) \subset B_y$.

Тогда существует $\lim_{\mathbb{B}_X} g(f(x)) = A$.

Доказательство.

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists B_y \in \mathbb{B}_Y \quad g(B_y) \subset V_\epsilon(A)$$

$$\exists B_x \in \mathbb{B}_X \quad f(B_x) \subset B_y$$

$$\text{Откуда } g(f(B_x)) \subset g(B_y) \subset V_\epsilon(A)$$

□

Теперь второе утверждение:

Теорема 2.3.4. *Пусть "внешняя"функция* $g(y)$ *будет определена и непрерывна в некоторой окрестности точке* b, *функция* $f(x)$ *будет определена в некоторой проколотой окрестности точке* a *и существует предел* $\lim_{x\to a} f(x) = b$, *т.е. выполнены условия*

1. $\lim_{y\to b} g(y) = g(b)$;

2. $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

Тогда существует $\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(b)$.

Доказательство. Конечно, эта теорема доказывается аналогично предыдущей, но тем не менее приведём её доказательство. По определению непрерывности функции g в точке b имеем

$$\forall V_\epsilon(g(b)) \quad \exists W_\delta(b): \quad g(W_\delta(b)) \subset V_\epsilon(g(b)).$$

Теперь из определения предела для функции $f(x)$ в точке a получаем, что для $\epsilon = \delta$ выполнено

$$\exists \mathring{\mathcal{U}}_{\delta^*}(a): \quad f(\mathring{\mathcal{U}}_{\delta^*}(a)) \subset W_\delta(b).$$

□

П р и м е р 2.3.4. Покажем, что свойство 2 в теореме 2.3.3 ослабить нельзя. Положим $g(y) = |\operatorname{sign} y|$,

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 10 & , x = 0 \end{cases}$$

Легко проверить, что $\lim_{y\to 0} g(y) = 1$, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, и при этом $\lim_{x\to 0} g(f(x))$ — не существует.

$$\begin{aligned} \mathbb{B}_Y \ni B_y &= \{y \in \mathbb{R} : y \in (-\delta; 0) \cup (0; \delta)\} \\ \mathbb{B}_X \ni B_x &= \{x \in \mathbb{R} : x \in (-\delta; 0) \cup (0; \delta)\} \end{aligned}$$

Покажем, что свойство

$$\forall B_y \in \mathbb{B}_Y \quad \exists B_x \in \mathbb{B}_X \quad f(B_x) \subset B_y$$

здесь не выполняется. Действительно, все проколотые окрестности B_y не содержат 0, а любая окрестность $f(B_x)$ содержит ноль.

П р и м е р 2.3.5. Пусть $g(y) = |\operatorname{sign} y|$ и $f(x) \equiv 0$. Тогда

$$\lim_{y\to 0} g(y) = 1, \quad \lim_{x\to 0} f(x) = 0,$$

и при этом $\lim_{x\to 0} g(f(x)) = 0$.

Теоремы о композиции нужны, когда требуется произвести замену переменного при вычислении предела. Покажем, как воспользоваться теоремой 2.3.3 для того, чтобы вычислить следующий предел.

П р и м е р 2.3.6. Вычислить

$$\lim_{x\to 1/9} \frac{1-\cos(9x-1)}{(9x-1)^2} = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} &g(y) = \tfrac{1-\cos y}{y^2} &&, y \to 0 &&B_y \in \mathbb{B}_Y \\ &f(x) = 9x - 1 &&, x \to \tfrac{1}{9} &&B_x \in \mathbb{B}_X \end{aligned}$$

Поскольку

1. $\lim_{y\to 0} g(y) = \frac{1}{2}$,

2. $\forall B_y = \overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(0) \quad \exists B_x = \overset{\circ}{\mathcal{U}}_{\frac{\delta}{9}}\left(\frac{1}{9}\right)$. Тогда выполнено $f(B_x) = B_y$.

Таким образом оба условия теоремы 2.3.3 выполнены, поэтому $\lim_{x\to 1/9} g(f(x)) = 1/2$.

2.3.4 Второй замечательный предел.

Покажем, что справедливо

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e;$$
$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e;$$
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Доказательство. Пусть $x > 0$. Справедливы следующие неравенства

$$\left(1+\tfrac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} \quad < \left(1+\tfrac{1}{x}\right)^x \quad < \left(1+\tfrac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

Докажем, что существуют пределы при $x \to +\infty$ от выражений стоящих по краям предыдущего неравенства. Нам уже известно, что

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = e, \quad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$$

Определим "внешнюю"функцию $g_1(x)$ и "внутреннюю"функцию $f(x)$

$$g_1 : n \to \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n, \quad f : x \to [x]$$

Таким образом выполнено первое условие теоремы 2.3.3, т.е. $\lim_{n\to\infty} g_1(n) = e$. Проверим, что выполняется и второе утверждение. Пусть $B_N = \{n \in \mathbb{N} : \quad n > N\}$, $B_x = \{x \in \mathbb{R} : \quad x > N+1\}$. Поскольку $f(B_x) \subset B_N$, то выполнено и второе условие теоремы 2.3.3. Откуда вытекает, что справедливо

$$\lim_{x\to+\infty} g_1(f(x)) = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} = e.$$

Определим теперь "внешнюю"функцию $g_2(x)$ и "внутреннюю"функцию $f(x)$, следующим образом

$$g_2 : n \to \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad f : x \to [x]$$

Аналогично проверим, что выполняются условия теоремы 2.3.3. Откуда

$$\lim_{x\to+\infty} g_2(f(x)) = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} = e.$$

Таким образом нами доказано

$$\begin{array}{ccccc} \left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} & < & \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} & < & \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ e & & \downarrow & & e \\ & & e & & \end{array}$$

Тогда по теореме о зажатой переменной вытекает, что существует предел при $x \to +\infty$ от функции, стоящей посередине неравенства, т.е.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e.$$

Покажем, что выполнено такое же утверждение в случае, когда $x \to -\infty$. Действительно

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^{t} =$$
$$= \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\cdot\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right) = e\cdot 1 = e.$$

Зафиксируем произвольное $\epsilon > 0$. Тогда

$$\exists\delta_1 > 0 : \quad \forall x > \delta_1 \quad \left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} - e\right| < \epsilon,$$
$$\exists\delta_2 > 0 : \quad \forall x < -\delta_2 \quad \left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} - e\right| < \epsilon.$$

Положим $\delta = \max\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда для любого x, такого, что $|x| > \delta$ будет выполнено $|(1+\frac{1}{x})^x - e| < \epsilon$, что и доказывает равенство

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e.$$

□

2.3.5 Символы Ландау.

Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ определены в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$ (разумеется , можно рассматривать правые, левые окрестности точки, а также окрестности бесконечно удалённых точек).

Определение 2.3.5. Равенство $f(x) = o(g(x))$ при $x \to a$ (произносится: $f(x)$ есть o-малое от $g(x)$ при $x \to a$), означает что существует бесконечно малая при $x \to a$ функция $\alpha(x)$ такая, что $f(x) = \alpha(x)g(x)$.

П р и м е р ы 2.3.1. 1. $x^2 = o(x)$ при $x \to 0$ (в этом случае $\alpha(x) = x$);

2. $x = o(x^2)$ при $x \to +\infty$ (в этом случае $\alpha(x) = 1/x$);

3. $x^m = o(x^n)$ при $x \to 0$, если $m > n$;

4. $x^m = o(x^n)$ при $x \to +\infty$, если $m < n$;

То, что функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой при $x \to a$ можно записать так: $\alpha(x) = o(1)$ при $x \to a$;

Замечание 22. Это определение очевидным образом можно перенести и на случай последовательностей.

1) $\frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $n \to \infty$. Здесь $\alpha(n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$;
2) $n^2 = o(n^4)$, $n \to \infty$. Здесь $\alpha(n) = \frac{1}{n^2}$.

Определение 2.3.6. Равенство $f(x) = O(g(x))$ при $x \to a$ при (произносится: $f(x)$ есть O -большое от $g(x)$ при $x \to a$), означает что существует ограниченная при $x \to a$ функция $\gamma(x)$ такая, что $f(x) = \gamma(x)g(x)$.

Замечание 23. И это определение, как и предыдущее, непосредственно переносится на последовательности.

Теорема 2.3.5. *Пусть* $f_1(x) = o(g(x))$, $f_2(x) = o(g(x))$, $g_1(x) = O(g(x))$, $g_2(x) = O(g(x))$ *при* $x \to a$ *(либо* $x \to a+0$, $x \to a-0$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, $x \to \infty$*; теорема верна и для последовательностей). Тогда:*

1. $f_1(x) + f_2(x) = o(g(x))$,
2. $f_1(x) - f_2(x) = o(g(x))$,
3. $f_1(x) \cdot f_2(x) = o(g^2(x))$,
4. $g_1(x) + g_2(x) = O(g(x))$,
5. $g_1(x) - g_2(x) = O(g(x))$,
6. $g_1(x) \cdot g_2(x) = O(g^2(x))$,
7. $f_1(x) + g_1(x) = O(g(x))$,
8. $f_1(x) - g_1(x) = O(g(x))$, $g_1(x) - f_1(x) = O(g(x))$,
9. $f_1(x) \cdot g_1(x) = o(g^2(x))$.

Доказательство. Нам дано, что $f_1(x) = \alpha_1(x)g(x)$, $f_2(x) = \alpha_2(x)g(x)$, где $\alpha_1(x)$, $\alpha_1(x)$ — бесконечно малые при $x \to a$ функции. Вспомним свойства бесконечно малых (теорема 2.1.6). Согласно этой теореме, $\alpha_1(x) + \alpha_2(x)$, $\alpha_1(x) - \alpha_2(x)$, $\alpha_1(x) \cdot \alpha_2(x)$ — бесконечно малые при $x \to a$ функции. Поэтому первые три пункта теоремы сразу следуют из равенств

$$f_1(x) + f_2(x) = (\alpha_1(x) + \alpha_2(x)) \cdot g(x),$$
$$f_1(x) - f_2(x) = (\alpha_1(x) - \alpha_2(x)) \cdot g(x),$$
$$f_1(x) \cdot f_2(x) = (\alpha_1(x) \cdot \alpha_2(x)) \cdot g^2(x).$$

Следующие три пункта также очевидны, если учесть, что сумма, разность, произведение ограниченных при $x \to a$ функций являются ограниченными при $x \to a$ функциями. Пункты 7) и 8) следуют из того, что сумма и разность бесконечно малой при $x \to a$ функции и ограниченной при $x \to a$ функции являются ограниченными при $x \to a$ функциями. Наконец, пункт 9) вытекает из теоремы о бесконечно малых функциях, гласящей, что произведение бесконечно малой при $x \to a$ функции и ограниченной при $x \to a$ функции является бесконечно малой при $x \to a$ функцией. ∎

Теорема 2.3.6. 1. *Если $f(x) = o(g(x))$ при $x \to a$, то $f(x) = O(g(x))$ при $x \to a$;*

2. *Если $f(x) = o(g(x))$ при $x \to a$, $g(x) = o(h(x))$ при $x \to a$, то $f(x) = o(h(x))$ при $x \to a$;*
3. *Если $f(x) = o(g(x))$ при $x \to a$, $g(x) = O(h(x))$ при $x \to a$, то $f(x) = o(h(x))$ при $x \to a$;*
4. *Если $f(x) = O(g(x))$ при $x \to a$, $g(x) = o(h(x))$ при $x \to a$, то $f(x) = o(h(x))$ при $x \to a$;*
5. *Если $f(x) = O(g(x))$ при $x \to a$, $g(x) = O(h(x))$ при $x \to a$, то $f(x) = O(h(x))$ при $x \to a$;*

Доказательство. Пусть $f(x) = \alpha(x)g(x)$. Утверждение 1) следует из утверждения о том, что бесконечно малая при $x \to a$ величина является ограниченной при $x \to a$. Пусть $g(x) = \beta(x)h(x)$. Тогда

$$f(x) = \alpha(x)\beta(x)h(x).$$

Рассмотрим функцию $\alpha(x)\beta(x)$. Тогда в случаях 2),3) и 4) эта функция является бесконечно малой при $x \to a$. В случае 5) функция $\alpha(x)\beta(x)$, очевидно, является ограниченной при $x \to a$. Теорема доказана. □

Итак, нами определены следующие понятия:

Определение 2.3.7. 1. Равенство $f(x) = o(g(x))$ при $x \to a$ (произносится: $f(x)$ есть o-малое от $g(x)$ при $x \to a$), означает что существует бесконечно малая при $x \to a$ функция $\alpha(x)$ такая, что $f(x) = \alpha(x)g(x)$.

2. Равенство $f(x) = O(g(x))$ при $x \to a$ при (произносится: $f(x)$ есть O -большое от $g(x)$ при $x \to a$), означает что существует ограниченная при $x \to a$ функция $\gamma(x)$ такая, что $f(x) = \gamma(x)g(x)$.

3. Равенство $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$ при (произносится: $f(x)$ асимптотически эквивалентна $g(x)$ при $x \to a$), означает что существует при $x \to a$ функция $\gamma(x)$ такая, что $\lim_{x\to a} \gamma(x) = 1$ и $f(x) = \gamma(x)g(x)$.

4. Равенство $f(x) \asymp g(x)$ при $x \to a$ при (произносится: $f(x)$ одного порядка с $g(x)$ при $x \to a$), означает что существует при $x \to a$ функция $\gamma(x)$ такая, что $\lim_{x\to a} \gamma(x) = K$, $|K| \in (0; +\infty)$ и $f(x) = \gamma(x)g(x)$.

2.4 Непрерывность.

2.4.1 Свойства непрерывных функций. Классификация точек разрыва.

Определение 2.4.1. Пусть $f(x)$ определена в $\mathcal{U}(a)$. Будем называть эту функцию *непрерывной в точке* a, если $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

(То, что функция $f(x)$ непрерывна в точке a, часто обозначается так: $f(x) \in C(a)$. Эта запись буквально означает, что рассматриваемая функция принадлежит классу функций, непрерывных в точке a.)

Определение непрерывности можно сформулировать иначе:

$$f(a) = \lim_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow f(\lim_{x\to a} x) = \lim_{x\to a} f(x).$$

Нам будут также нужны понятия непрерывности справа и слева.

Определение 2.4.2. Пусть $f(x)$ определена в $\mathcal{U}^+(a)$ (соответственно, $\mathcal{U}^-(a)$). Будем называть эту функцию *непрерывной в точке a справа* (соответственно, *слева*), если $\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a)$ (соответственно, $\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a)$).

По теореме 2.1.13 непрерывность в точке a равносильна одновременной непрерывности в этой точке справа и слева.

Определение 2.4.3. Пусть $f(x)$ определена в точке a и не является непрерывной в этой точке. Тогда говорят, что *a является точкой разрыва* функции $f(x)$.

Пусть $f(x)$ определена в $\mathcal{U}(a)$. Логически возможны 4 случая.

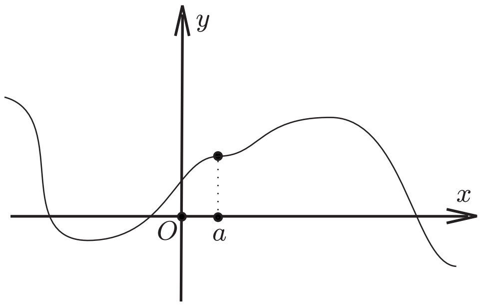


Рис. 2.9: Непрерывность

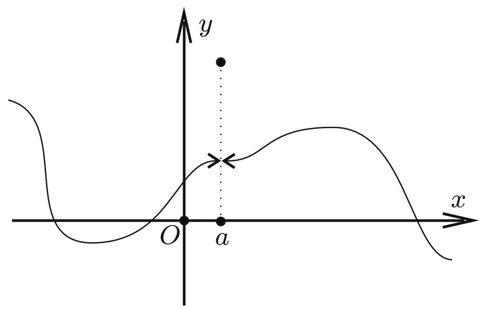


Рис. 2.10: Устранимый разрыв

1. Существуют $\lim_{x\to a+0} f(x)$ и $\lim_{x\to a-0} f(x)$, причём $\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x) = f(a)$. Тогда, как отмечалось выше, $f(x)$ непрерывна в точке a (см. рис. 2.9).
2. Существуют конечные $\lim_{x\to a+0} f(x)$ и $\lim_{x\to a-0} f(x)$, причём $\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x) \neq f(a)$ (см. рис. 2.10). Тогда точку a называют *точкой устранимого разрыва* функции $f(x)$.
3. Существуют конечные $\lim_{x\to a+0} f(x)$ и $\lim_{x\to a-0} f(x)$, причём $\lim_{x\to a+0} f(x) \neq \lim_{x\to a-0} f(x)$ (см. рис. 2.11). Тогда a называют *точкой разрыва первого рода* функции $f(x)$.
4. Не существует или бесконечен хотя бы один из пределов $\lim_{x\to a+0} f(x)$ или $\lim_{x\to a-0} f(x)$ (см. рис. 2.12). Тогда a называют *точкой разрыва второго рода* функции $f(x)$.

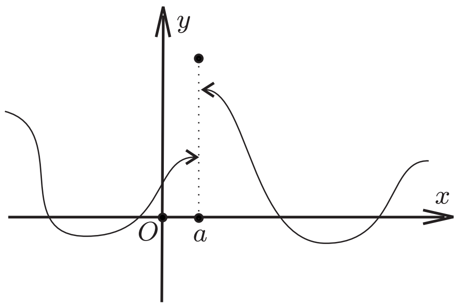


Рис. 2.11: Разрыв первого рода

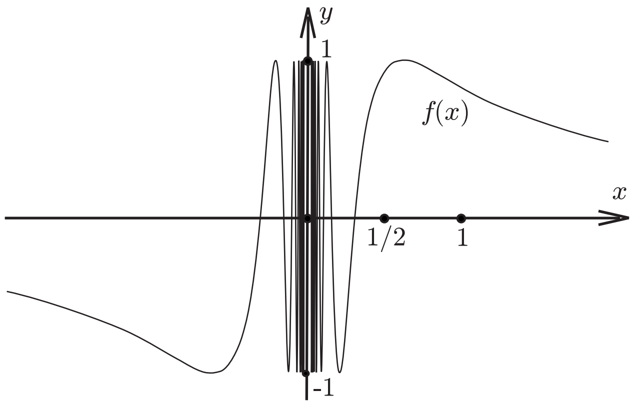


Рис. 2.12: Разрыв второго рода

Определение 2.4.4. Будем говорить, что функция $f(x)$, определённая на множестве X, *непрерывна на множестве* X, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Определение 2.4.5. *Колебанием функции в точке* назовём следующую величину: $\omega(f,a) = \lim_{\delta\to 0} \omega(f, \mathring{\mathcal{U}}_\delta(a))$.

Лемма 4 (Эквивалентные условия непрерывности)**.** *Равносильные утверждения*

1. $f(x) \in C(a)$.
2. $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x : |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$.
3. $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$.

4. $\lim_{x\to a} f(x) = f(\lim_{x\to a} x)$.

5. $\forall\epsilon > 0 \quad \exists\mathcal{U}_\delta(a) \quad f(\mathcal{U}_\delta(a)) \subset V_\epsilon(f(a))$.

6. $\omega(f, a) = 0$.

Доказательство. Обосновать требуется только последнее равенство 6, т.к. все остальные очевидны. Из критерия Коши существования предела: $f \in C(a)$ вытекает $\forall\epsilon > 0 \quad \exists\mathcal{U}_\delta(a)\ \omega(f,\mathcal{U}_\delta(a)) < \epsilon$. Последнее равенство равносильно $\omega(f, a) = 0$. □

Теорема 2.4.1 (Локальные свойства непрерывных функций)**.** *Справедливо*

1. $f, g \in C(a) \Rightarrow \alpha\cdot f + \beta\cdot g \in C(a)$.

2. $f, g \in C(a) \Rightarrow f\cdot g \in C(a)$.

3. $f, g \in C(a), g(a) \neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g} \in C(a)$.

4. $f \in C(a) \Rightarrow \exists\mathcal{U}_\delta(a) : f(x)$ *ограничена в* $\mathcal{U}_\delta(a)$.

5. $f \in C(a), f(a) \neq 0 \Rightarrow \exists\mathcal{U}_\delta(a) \quad \forall x \in \mathcal{U}_\delta(a) : f(x) > 0$ *либо* $f(x) < 0$.

6.

$$\left.\begin{array}{ll} f : X \to Y & f \in C(a) \\ g : Y \to \mathbb{R} & g \in C(b) \\ b = f(a) & \end{array}\right\} g(f(x)) \in C(a)$$

Доказательство.

- Утверждения 1),2),4),5) вытекают из определения предела и теоремы об арифметических свойствах предела.
- 3) Если $g(a) \neq 0$, тогда из доказанного свойства 5) данной теоремы, вытекает $g(x) \neq 0$ в некоторой окрестности $\mathcal{U}_\delta(a)$.
- 6) По теореме о пределе композиции $\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(b) = g(f(a))$.

□

2.4.2 Ограниченность непрерывных функций на отрезке, существование максимального элемента.

Теорема 2.4.2 (Больцано-Коши)**.**

$$f(x) \in C[a, b]$$

$$\left.\begin{array}{l} f(a) = A \\ f(b) = B \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \forall C \text{ из отрезка с концами в точках } A, B \\ \exists c \in [a, b] : f(c) = C \end{array}$$

Лемма 5.

$$\left.\begin{array}{l} \gamma \in C[a, b] \\ \gamma(a) < 0 \\ \gamma(b) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \exists c \in (a, b) \\ \gamma(c) = 0 \end{array}$$

Доказательство. Для опеределнности будем считать, что $\gamma(a) < 0$ и $\gamma(b) > 0$. Рассмотрим середину отрезка $[a; b]$, если

$$\gamma\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0,$$

то лемма доказана, поскольку найдена точка $c = (a + b)/2$ на интервале $(a; b)$, где выполняется равенство $\gamma(c) = 0$. Если

$$\gamma\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0,$$

то рассмотрим новый отрезок $[a_1; b_1] \subset [a; b]$ такой, что одна из точек a_1, b_1 совпадает с серединой отрезка, а другая либо совпадает с a либо b, в зависимости от знака функции $\gamma(x)$ выбираем из условия, чтобы в точках a_1, b_1 функция принимала разные знаки (см рис. 2.14), а именно $\gamma(a_1) < 0$ и $\gamma(b_1) > 0$.

Продолжая данное построение отрезков $[a_k; b_k]$ (см. рис. 2.13-2.16) мы прийдем к тому, что,

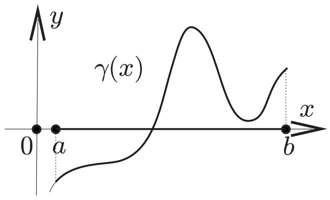


Рис. 2.13: Отрезок $[a; b]$.

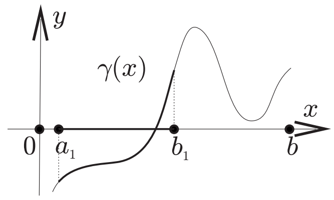


Рис. 2.14: Посстороение отрезка $[a_1; b_1]$.

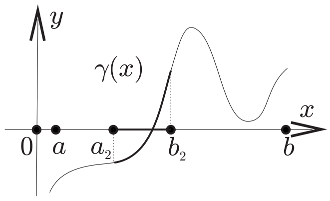


Рис. 2.15: Посстороение отрезка $[a_2; b_2]$.

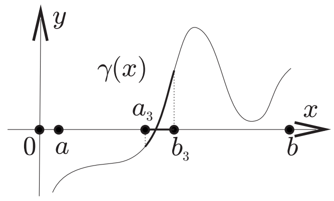


Рис. 2.16: Посстороение отрезка $[a_3; b_3]$.

- либо в какой-то момент $\gamma(a_k) = 0$ либо $\gamma(b_k) = 0$, но тогда лемма доказана. Поскольку найден нуль функции $\gamma(x)$,
- либо все $\gamma(a_k) < 0$ и $\gamma(b_k) > 0$.

Тогда возникает система стягивающихся отрезков

$$[a_1, b_1] \subset [a_2, b_2] \subset [a_2, b_2] \dots \subset [a_k, b_k] \subset [a_{k+1}, b_{k+1}] \dots,$$

$$\mu([a_k, b_k]) = \frac{b-a}{2^k} \to 0, \quad k \to +\infty.$$

Следовательно по лемме о стягивающихся отрезках существует единственная точка $c \in (a, b)$, принадлежащая всем отрезкам $[a_k; b_k]$. Причём для любого фиксированного $k \in \mathbb{N}$ будет выполнено $\gamma(a_k) < 0$, $\gamma(b_k) > 0$. Поскольку

$$c = \lim_{k \to +\infty} a_k = \lim_{k \to +\infty} b_k,$$

то ввиду непрерывности функции $\gamma(x)$ справедливо

$$\left.\begin{aligned} \gamma(c) &= \lim_{k\to+\infty} \gamma(a_k) \leqslant 0 \\ \gamma(c) &= \lim_{k\to+\infty} \gamma(b_k) \geqslant 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \gamma(c) = 0.$$

□

Доказательство.

$$\gamma(x) = f(x) - C \text{ и применяем предыдущую лемму}$$

□

Теорема 2.4.3.

$$f \in C[a, b] \Rightarrow f \text{ - ограничена на } [a, b]$$

Доказательство. Из локальных свойств для непрерывных функций вытекает, что если $f \in C(x)$, то существует окрестность $\mathcal{U}_\delta(x)$ такая, что $|f(\mathcal{U}_\delta(x))| \leqslant C$. Интервалы $\mathcal{U}_\delta(x)$ образуют покрытие отрезка $[a, b]$. Выделяем конечное подпокрытие

$$\mathcal{U}_{\delta_1}(x_1), \dots \mathcal{U}_{\delta_k}(x_k)$$

$$[m_1, M_1] \quad [m_k, M_k]$$

Положим $m = \min\{m_1, \dots, m_k\}$, $M = \max\{M_1, \dots, M_k\} \Rightarrow$. Тогда

$$\forall x \in [a, b] \quad m \leqslant f(x) \leqslant M$$

□

Теорема 2.4.4 (Вейерштрасса). *Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает своих* max *и* min *значений.*

Доказательство. Предположим, что неверно (т.е. max значение на отрезке не достигается)

$$M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$$

$$\gamma(x) = \frac{1}{M - f(x)} \in C[a,b] \text{ по предыдущей теореме, она ограничена на } [a,b]$$

Но

$$\frac{1}{M - f(x)} \to +\infty,$$

так как $M = \sup f(x)$. Получаем противоречие. □

Контрольные вопросы.

1. Дайте определение колебания функции в точке.
2. Будет ли верно следующее утверждение: $f \in C(a;b) \implies f$ — ограничена на $(a;b)$.
3. Будет ли верно следующее утверждение: $f \in C(a;b) \implies f$ достигает своего максимального значения на $(a;b)$.

Упражнения к 2.4

Упражнение 2.4.1. *Исследуйте функцию $f(x)$ на непрерывность и точки разрыва, если*

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \left(\frac{1}{\sin x} + \frac{2^x - 2^{\sqrt{3}}}{x-\sqrt{3}}\right), & x \neq \pi n,\ x \neq \sqrt{3},\ n \in \mathbb{Z}, \\ 1, & x \in \{\sqrt{3}, \{\pi n\}_{n\in\mathbb{Z}}\}. \end{cases}$$

Ответы: 2.4.1 $\sqrt{3}$ — устранимый разрыв, $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ — разрывы второго рода, все остальные точки (включая $x = 0$) точки непрервности.

2.5 Монотонная функция.

Определение 2.5.1. Функция $f(x)$ называется *неубывающей* на промежутке X, если для любых x_1, x_2 из этого промежутка, удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. Она называется *возрастающей* на промежутке X, если для любых x_1, x_2 из этого промежутка, удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$. Аналогично, функция $f(x)$ называется *невозрастающей* на промежутке X, если для любых x_1, x_2 из этого промежутка, удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) \geqslant f(x_2)$. Она называется *убывающей* на промежутке X, если для любых x_1, x_2 из этого промежутка, удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Общее название для возрастающих, убывающих, невозрастающих, неубывающих функций на промежутке — *монотонные* функции. При этом возрастающие и убывающие функции часто называют *строго монотонными.*

П р и м е р 2.5.1. Рассмотрим целую часть цисла x. График функции $[x]$ представляет собой кусочно постоянную функцию — неубывающую на всей числовой оси (см. рис. 2.20) со счётным числом точек разрыва.

Теорема 2.5.1. *Пусть f — монотонная функция на $\mathbb{R}$. Тогда точек разрыва монотонной функции не более, чем счетно.*

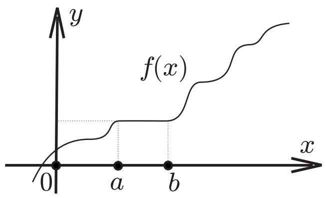


Рис. 2.17: График неубывающей функции (функция постоянна на $[a;b]$).

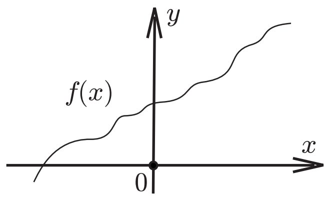


Рис. 2.18: График возрастающей функции.

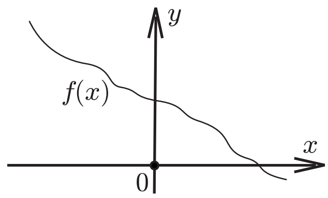


Рис. 2.19: График убывающей функции.

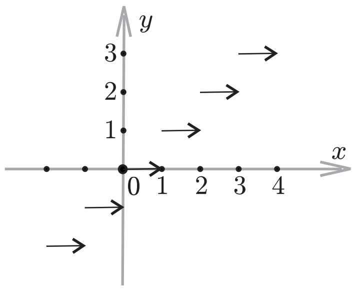


Рис. 2.20: График функции $[x]$(целая часть цисла).

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $f\uparrow$ (т.е. функция f строго монотонно возрастает).

$$\begin{array}{ll} \lim_{x\to x_0-0} f(x)=A & \text{если } x_0 - \text{ точка разрыва, то } A<B \\ \lim_{x\to x_0+0} f(x)=B & \end{array}$$

На интервале $(A;B)$ существует рациональная точка вида $r_k=\frac{m}{n}$. Таким образом каждой точке разрыва можно сопоставить хотя бы одну рациональную точку. Следовательно, точек разрыва не более, чем счетно. $\square$

Теорема 2.5.2. *Пусть f — монотонная функция на $\mathbb{R}$. Тогда следующие условия равносильны*

1. $f\in C[a,b]$.

2. *Функция $f(x)$ принимает все промежуточные значения на отрезке $[f(a),f(b)]$ (или отрезке $[f(b),f(a)]$), если f невозрастающая).*

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $f\uparrow$ (т.е. функция f строго монотонно возрастает).

1. $\Rightarrow$ 2. Предположим противное, т.е. $f\in C[a,b]$ и существует $C\in[f(a),f(b)]$ такая, что $\forall x\in[a,b]$, $f(x)\neq C$. Положим

$$A=\{x\in[a,b]: f(x)<C\},\quad B=\{x\in[a,b]: f(x)>C\}.$$

Тогда $\sup A=\inf B=c\in[a,b]$.

$$\left.\begin{array}{l} f(c)\leqslant C \\ f(c)\geqslant C \end{array}\right\}\Rightarrow f(c)=C.$$

Полученное противоречее завершает доказательство.

2. $\Rightarrow$ 1. Т.е. $f\uparrow$ и принимает все промежуточные значения на отрезке $[f(a),f(b)]$. Предположим $c\in(a,b)$ — точка разрыва функции $f(x)$, т.е. $f(c-0)\notin f(c+0)$. Справедливо

$$\forall x\in[a,c)\quad f(x)\leqslant f(c-0)$$

$$\forall x \in (c, b] \quad f(x) \geqslant f(c+0)$$

Следовательно существует $C \in (f(c-0); f(c+0)) \setminus \{f(c)\}$ такая, что $C \notin [f(a), f(b)]$. Получаем противоречие с утверждению о том, что принимались все промежуточные значения. ☐

2.5.1 Непрерывность элементарных функций.

Напомним, определение элементарных функций.

Определение 2.5.2. *Элементарные функции* — функции, которые можно получить с помощью конечного числа арифметических действий и композиций из следующих основных элементарных функций

- алгебраические:

  степенная функция x^α, $\alpha \in \mathbb{R}$,

- трансцендентные:

  показательная функция a^x, $a > 0$, $a \neq 1$ и логарифмическая функция $\log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$,

  тригонометрические и обратные тригонометрические функции.

В частности, к элементарным функциям относятся многочлены $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ и рациональные функции, т.е. отношения многочленов $P(x)/Q(x)$.

Теорема 2.5.3. *Элементарные функции непрерывны во всех точках, где они определены. (В случае функций $\arcsin x$, $\arccos x$ в точках $x = 1$, $x = -1$ речь идёт о непрерывности слева и, соответственно, справа).*

Доказательство. Сначала отметим, что для многочленов эта теорема сразу следует из теоремы о локальных свойствах непрерывных функций. Для рациональных функций, определённых во всех тех точках, где знаменатель определяющей эту функцию дроби отличен от 0 — тоже.

Далее считаем, что нам известны определения элементарных функций (например, из курса средней школы) и основные свойства этих функций, в частности, мы знаем, где они определены, каковы множества принимаемых ими значений, а также промежутки их возрастания и убывания. Нам потребуется вспомогательное утверждение.

Лемма 6. *Пусть $f(x)$ строго монотонна (т.е. строго возрастает или строго убывает) на промежутке (т.е. отрезке $[A, B]$, или интервале (A, B), или полуинтервале $[A, B)$ или $(A, B]$, причём не исключаются равенства $A = -\infty$ и $B = +\infty$). Тогда она может иметь только точки разрыва первого рода.*

Доказательство. Ограничимся случаем возрастания функции. Пусть a — любая точка рассматриваемого промежутка. Тогда на промежутке $(A, a]$ значения функции $f(x)$ ограничены сверху числом $f(a)$. Поэтому, применяя теорему Вейерштрасса, получаем, что существует $\lim_{x \to a-0} f(x)$. Аналогично, на промежутке $[a, b)$ значения функции $f(x)$ ограничены снизу числом $f(a)$. Поэтому существует $\lim_{x \to a+0} f(x)$. Как уже отмечалось выше, непрерывность в точке a равносильна равенству этих двух односторонних пределов числу $f(a)$. Если же эти пределы не равны между собой, то в этой точке — разрыв первого рода. ☐

Следствие из леммы 2.5.1. Функция $f(x)$, строго монотонная на некотором промежутке, тогда и только тогда непрерывна во всех точках этого промежутка, когда множество её значений само является промежутком числовой прямой.

Доказательство. Действительно, наличие точки разрыва a у монотонной функции равносильно тому, что действительные числа $\lim_{x \to a-0} f(x)$ и $\lim_{x \to a+0} f(x)$ — различные и множество значений этой функции не может являться промежутком. ☐

I. Заметим теперь, что показательная функция $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ является строго монотонной, определена на всей числовой прямой и множеством её значений является промежуток $(0; +\infty)$. По следствию леммы, она непрерывна на всей числовой прямой.

II. Функция $y = \sin x$ возрастает на промежутке $[-\pi/2; \pi/2]$. Множество её значений образует промежуток $[-1, 1]$. По следствию леммы, она непрерывна на промежутке $[-\pi/2; \pi/2]$. Формула $\sin(x + \pi) = -\sin x$ и теорема 2.5.3 позволяют утверждать, что $\sin x$ непрерывна и на промежутке $[\pi/2; 3\pi/2]$. Так как $\sin(\pi/2) = 1$, функция $\sin x$ непрерывна на промежутке $[-\pi/2; 3\pi/2]$. Этот промежуток имеет длину 2π, т.е. длину периода $\sin x$. Поскольку значения на концах этого промежутка одинаковы ($\sin(-\pi/2) = -1$, $\sin(3\pi/2) = -1$), функция $\sin x$ непрерывна на всей числовой оси.

III. Снова по теореме о локальных свойствах непрерывных функций и формуле $\cos x = \sin(\pi/2 - x)$ получаем, что $y = \cos x$ — непрерывная на всей числовой оси функция.

IV. Применяя теорему о локальных свойствах непрерывных функций, получаем, что функция $y = \operatorname{tg} x$ непрерывна на всей своей области определения, т.е. при $x \neq \pi/2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

V. Аналогично, функция $y = \operatorname{tg} x$ непрерывна на всей своей области определения, т.е. при $x \neq \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

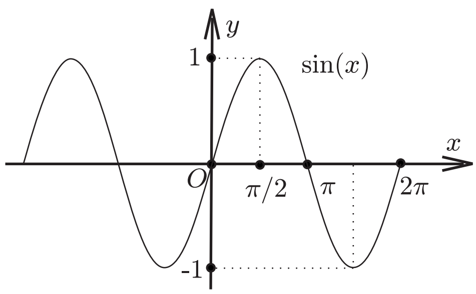


Рис. 2.21: $\sin x$.

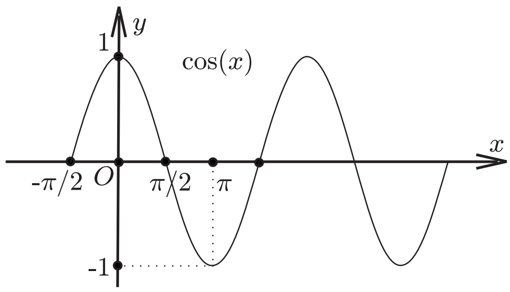


Рис. 2.22: $\cos x$.

Далее вспомним понятие обратной функции. Пусть функция $y = f(x)$ монотонна (для определённости, возрастает) на промежутке X. Тогда каждое своё значение она принимает ровно один раз и можно говорить о взаимно-однозначном соответствии между точками x промежутка X и точками y из множества Y принимаемых ею значений. Обозначим правило, по которому мы, зная y, находим x, через $x = f^{-1}(y)$. Это — так называемое обратное правило. Если поменять в нём местами буквы x и y, то получится *обратная функция* $y = f^{-1}(x)$. Примером могут служить функции $y = e^x$, её обратное правило $x = \ln y$ и обратная функция $y = \ln x$.

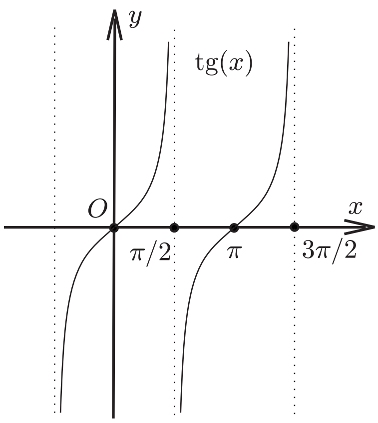


Рис. 2.23: $\operatorname{tg} x$.

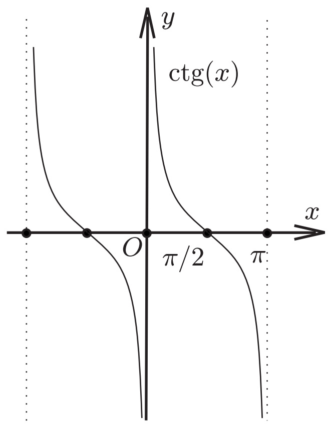


Рис. 2.24: $\operatorname{ctg} x$.

Лемма 7. *Пусть функция $y = f(x)$ монотонна и непрерывна на X. Тогда её обратная функция монотонна и непрерывна на Y. (Использованы введённые выше обозначения).*

Доказательство. По доказанному выше следствию из леммы, Y — тоже промежуток. Пусть, для определённости, $y = f(x)$ возрастает на X (случай убывания совершенно аналогичен). Это означает, что условия $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$ равносильны тому, что $y_1 = f(x_1) < y_2 = f(x_2)$. Это означает, что $y = f^{-1}(x)$ — возрастающая функция, областью определения которой является промежуток Y, а множеством значений — промежуток X. По следствию из предыдущей леммы $y = f^{-1}(x)$ — непрерывная функция. □

VI. Из этой леммы сразу получаем, что функция $y = \ln x$ непрерывна на $(0, +\infty)$, функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$ непрерывны на $[-1, 1]$, функции $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ непрерывны на всей числовой прямой.

VII. Осталось рассмотреть степенную функцию $y = x^\alpha$. При любом α она определена при $x > 0$ (разумеется, при натуральных α она определена на всей числовой прямой, при целых отрицательных α — при $x \neq 0$ и т.д.; мы не будем отдельно изучать здесь частные случаи более широкой, чем $x > 0$ области определения). Тогда имеет место представление $y = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ и непрерывность степенной функции следует из непрерывности показательной и логарифмической функции.

□

2.6 Равномерная непрерывность и теорема Кантора.

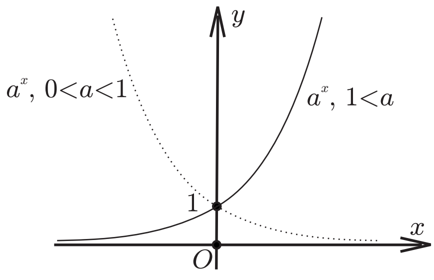


Рис. 2.25: a^x.

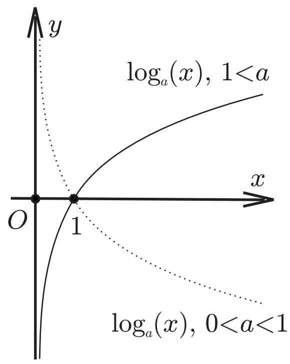


Рис. 2.26: $\log_a x$.

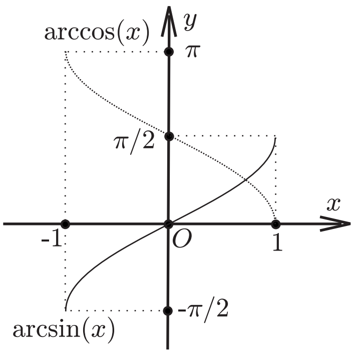


Рис. 2.27: $\arcsin x$.

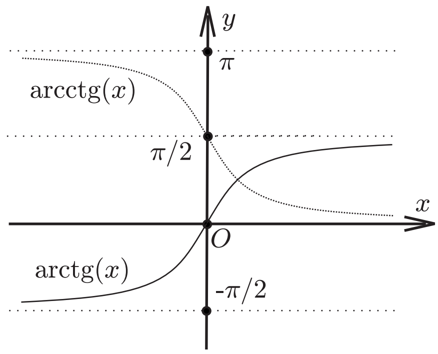


Рис. 2.28: $\operatorname{arctg} x$.

Определение 2.6.1 (Равномерно непрерывная функция)**.** Будем говорить, что функция $f(x)$ *равномерно непрерывна* на множестве A и писать $f \in UC(A)$, если выполнено

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in A : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon.$$

Замечание 24. Сразу из определений вытекает, что если функция равномерно непрерывна, то она непрерывна $f \in UC(A) \Rightarrow f \in C(A)$.

П р и м е р 2.6.1. Пусть $f(x) = \sin x$. Покажем, что $f(x) \in UC(\mathbb{R})$. Зафиксируем произвольное $\epsilon > 0$. Тогда для $\delta = \epsilon$ имеем

$$\forall\ x_1, x_2 : \quad |x_1 - x_2| < \delta \implies |\sin x_1 - \sin x_2| = 2\left|\sin\frac{x_1 - x_2}{2}\right| \cdot \left|\cos\frac{x_1 + x_2}{2}\right| \leqslant$$
$$\leqslant 2\left|\sin\frac{x_1 - x_2}{2}\right| \leqslant |x_1 - x_2| < \delta = \epsilon.$$

Предпоследнее неравенство написанно ввиду того, что $|\sin x| \leqslant |x|$. Этот факт нами доказан при доказательстве первого замечательного предела $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

Логическая запись того, что функция $f(x)$ не является равномерно непрерывной на множестве A (т.е. $f \notin UC(A)$), записывается таким образом

$$\exists \epsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x_1, x_2 \in A : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| > \epsilon.$$

В частности, если удается подобрать такие последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$, где все элементы последовательностей $x_n \in A$, $y_n \in A$, обладают свойством, что $|x_n - y_n| \to 0$ при $(n \to \infty)$, но при этом

$|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant C > 0$. Тогда функция $f(x)$ не является равномерно непрерывной на множестве A (т.е. $f \notin UC(A)$).

П р и м е р 2.6.2. Пусть $f_1(x) = \frac{1}{x}$. Покажем, что $f_1(x) \in C(0;1)$, но $f_1(x) \notin UC(0;1)$. Действительно, непрерывность данной функции на интервале $(0;1)$ очевидна. Положим $x_n = \frac{1}{n+1}$, $y_n = \frac{1}{n}$ тогда $|x_n - y_n| \to 0$, но при этом $|f_1(x_n) - f_1(y_n)| = 1$, что доказывает факт того, что функция $f_1(x)$ не является равномерно непрерывной на множестве $(0;1)$.

В предыдущем примере, построенная функция, обладала свойством непрерывности, но при этом не являлась равномерной непрерывной на интервале за счёт того, что она была неограниченной. Покажем, что существуют (см. рис. 2.29) ограниченные непрерывные функции на $\mathbb{R}$, которые не являются равномерно непрерывными на всей числовой оси.

П р и м е р 2.6.3.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \sin x^2 \\ f \in C(\mathbb{R}) \\ |f| \leqslant 1, \forall x \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow f \notin UC(\mathbb{R})$$

Выберем последовательность

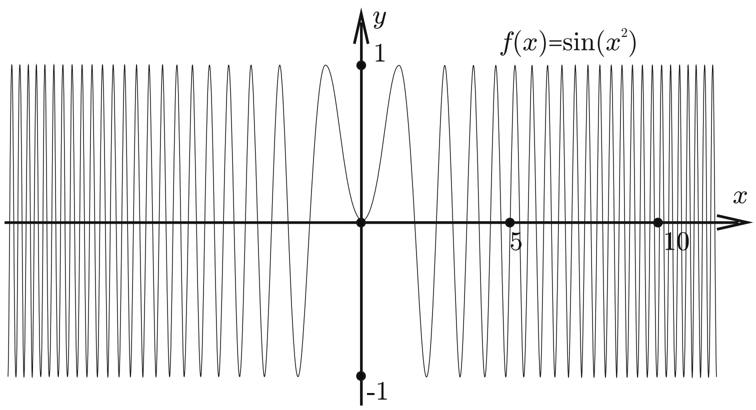


Рис. 2.29: Непрерывная функция на $\mathbb{R}$, но $f \notin UC(\mathbb{R})$.

$$x_n = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \quad y_n = \sqrt{2\pi n}.$$

Тогда справедливо:

$$\begin{array}{l} |x_n - y_n| \to 0 \quad (n \to +\infty), \\ |f(x_n) - f(y_n)| = 1 \end{array}$$

Теорема 2.6.1 (Кантора).

$$f \in C[a;b] \Leftrightarrow f \in UC[a;b]$$

Доказательство. $\Leftarrow$ очевидно, т.к. вытекает сразу из определений.

$\Rightarrow$ Зафиксируем произвольное $\epsilon > 0$. Пусть x — произвольная точка отрезка $[a;b]$. Из непрерывности функции $f \in C(x)$ следует $\omega(f,x) = 0$. Следовательно существует окрестность $\mathcal{U}_\delta(x)$ точки x такая, что

$$\omega(f, \mathcal{U}_\delta(x)) < \epsilon.$$

Рассмотрим с каждой точкой x отрезка $[a;b]$ окрестность $\mathcal{U}_{\delta/2}(x)$. Данные окрестности образуют покрытие отрезка $[a;b]$ интервалами. Выделим конечное подпокрытие

$$\mathcal{U}_{\delta_1/2}(x_1) \ldots \mathcal{U}_{\delta_k/2}(x_k)$$

$$[a,b] \subset \cup_{l=1}^{k} \mathcal{U}_{\delta_l/2}(x_l)$$

Положим $\delta^* = \min\{\frac{\delta_1}{2}, \dots, \frac{\delta_k}{2}\}$. Тогда для любых $x', x'' : |x' - x''| < \delta^*$ выполнено

- существует окрестность $\mathcal{U}_{\delta_m/2}(x_m)$ содержащая точку x';
- $|x'' - x_m| < |x'' - x'| + |x' - x_m| < \delta^* + \frac{\delta_m}{2} \leqslant \delta_m$.

Откуда вытекает, что $x' \in \mathcal{U}_{\delta_m}(x_m)$ и $x'' \in \mathcal{U}_{\delta_m}(x_m)$. Откуда

$$\omega(f, \mathcal{U}_{\delta_m}(x_m)) < \epsilon \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \epsilon.$$

□

Контрольные вопросы.

1. Дайте определение равномерной непрерывности функции на множестве.
2. В терминах ε, δ сформулируйте условие того, что функция $f(x)$ не является равномерно непрерывной на множестве A.

Упражнения к 2.6

Упражнение 2.6.1. *Исследуйте на равномерную непрерывность следующие функции: a) $f(x) = \sin x^3$ на $\mathbb{R}$; b) $g(x) = \sin^3 x$ на $\mathbb{R}$; c) $h(x) = e^{\operatorname{arctg} x}$ на $\mathbb{R}$; d) $j(x) = e^{\ln x}$ на $(0; +\infty)$.*

Ответы: 2.6.1 равномерная непрерывность будет для функций b), c). Для остальных функций на указанных множествах равномерной непрерывности не будет.

Глава 3

Дифференцируемость функции одного переменного.

3.1 Дифференцируемость.

3.1.1 Определение дифференцируемости.

Определение 3.1.1. Будем говорить, что функция f *дифференцируемая* в точке a и писать $f \in D(a)$, если существует константа A, такая что

$$f(x) - f(a) = A(x-a) + o(x-a), x \to a.$$

Константа A называется *прозводной* функции f в точке a и обозначается $f'(a)$. При этом величина $A(x-a) = f'(a)(x-a)$ называется *дифференциалом функции.*

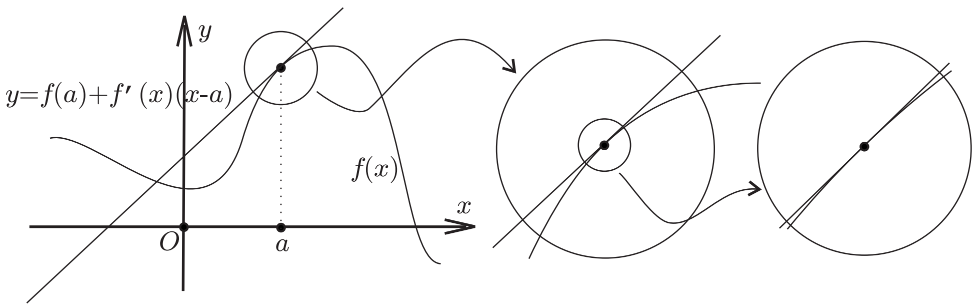


Рис. 3.1: Для дифференцируемой функции разность $f(x) - f(a) - A(x-a)$ есть $o(x-a)$, $x \to a$.

Иначе говоря, определение дифференцируемости функции f в точке a равносильно

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + o(h), h \to 0.$$

Поделив на h обе части уравнения получим

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) + o(1), h \to 0,$$

а перейдя к пределу по $h \to 0$ имеем

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Последнее равенство часто берут за определение производной.

Приращение функции $y = f(x)$ в точке a часто обозначают Δy или $\Delta f(a)$, а приращение $x - a = \Delta x$. При этом

$$x - a \to 0 \Longleftrightarrow \Delta x \to 0 \quad \text{и} \quad x - a \neq 0 \Longleftrightarrow \Delta x \neq 0,$$

поэтому формулу для вычисления производной записывают в одном из следующих видов:

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{\Delta f(a)}{\Delta x} = \lim_{x\to a} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Дифференциал функции $y = f(x)$ в точке a принято обозначать $d\,f(a)$. Таким образом,

$$d\,f(a) = f'(a)(x - a) = f'(a)\Delta x.$$

Если в качестве функции рассмотреть саму переменную величину x, то $\Delta x = dx$, поэтому часто пишут $d\,f(a) = f'(a)\,dx$. Эту формулу часто используют в качестве обозначения производной: $f'(a) = \frac{df(a)}{dx}$. Из определения дифференцируемости следует, что дифференциал функции $f(x)$ в точке a является главной (если он не равен нулю тождественно) линейной (относительно переменной Δx) частью приращения Δy и что имеет место формула

$$\Delta y = d\,f(a) + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0.$$

Понятие производной является одним из основных понятий математического анализа. С его помощью строятся многие важнейшие модели природных процессов. Мы вернёмся к многочисленным приложениям производной несколько позже.

Утверждение 3.1.1. *Из условия дифференцируемости функции $f(x)$ в точке a вытекает её непрерывность в этой точке, т.е. $f \in D(a) \Rightarrow f \in C(a)$.*

Доказательство. Действительно, из определения дифференцируемости получаем

$$\lim_{h\to 0}(f(a + h) - f(a)) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$$

□

П р и м е р 3.1.1. Покажем, что функция $f(x) = |x|$ непрерывна на всей числовой оси, но при этом не дифференцируема в точке 0. Действительно,

$$\lim_{h\to 0} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} \Rightarrow \text{ предел не существует}$$

П р и м е р 3.1.2. Найдём производную функции $f(x) = \sin x$. Используя определение, получаем:

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x + h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\frac{2x+h}{2}\sin\frac{h}{2}}{h} = \cos x$$

П р и м е р 3.1.3. Более сложный пример является функция

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad x \in (-\pi; \pi),$$

она не дифференцируема в точке 0, и имеет производные равные константам на каждом из промежутков $(-\pi; 0)$ и $(0; \pi)$. Здесь мы это доказывать не будем потому, что впоследствии это будет вытекать из общих соображений.

Также можно построить функцию всюду непрерывную на числовой оси, но при этом не дифференцируемую ни в одной точке[1].

$$f(x) \in C(\mathbb{R}), \quad f(x) \notin D(x_0), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$

---

[1]Такими примерами являются функции $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin((n+1)!x)}{n!}$, $f_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a^n \sin(b^n x)$, $f_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a^n \cos(b^n x)$ при условии, что $0 < a < 1$ и $ab > 1$. В более общем виде функциями всюду непрерывными, но при этом нигде недифференцируемыми являются

$$f_\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a^n \varphi(b^n x),$$

где $0 < a < 1$, $ab > 1$, φ — периодическая функция такая, что $\min \varphi(x) = 0$, $\max \varphi(x) = 1$, а также $\varphi \in \mathrm{Lip}_1$, т.е. существует такая положительная константа C, что неравенство $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant C|x - y|$ выполнено для любых $x, y \in \mathbb{R}$.

Теорема 3.1.2. *Пусть $f, g \in D(a)$.*

1. $(f+g)' = f' + g'$ *в точке* $x = a$.
2. $(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f$ *в точке* $x = a$.
3. *Если* $g(a) \neq 0$, *то* $(\frac{f}{g})' = \frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}$ *в точке* $x = a$.

Доказательство. 1) Из дифференцируемости функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке $x = a$ получаем

$$\begin{aligned}(f+g)(a+h) - (f+g)(a) &= (f(a+h) - f(a)) + (g(a+h) - g(a)) = \\ &= (f'(a) \cdot h + o(h)) + (g'(a) \cdot h + o(h)) = (f'(a) + g'(a)) \cdot h + o(h), \quad h \to 0.\end{aligned}$$

2) Опять, используя дифференцируемость функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке $x = a$

$$\begin{aligned}f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a) &= (f(a+h) - f(a))g(a+h) + (g(a+h) - g(a))f(a) = \\ &= (f'(a)h + o(h))(g(a) + o(1)) + (g'(a)h + o(h))f(a) = \\ &= (f'(a)g(a) + f(a)g'(a))h + o(h), \quad h \to 0.\end{aligned}$$

3) Из дифференцируемости функции $g(x)$ в точке $x = a$ вытекает её непрерывность. Следовательно из условия $g(a) \neq 0$ и локальных свойств непрерывной функции вытекает, что существует окрестность точки a в которой $g(x) \neq 0$. Для всех точек $a + h$ из этой окрестности справедливо

$$\left(\frac{f}{g}\right)(a+h) - \left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{f(a+h)g(a) - f(a)g(a+h)}{g(a+h)g(a)} = \frac{1}{g(a+h)g(a)} \cdot (f(a+h)g(a) - f(a)g(a+h)).$$

Оценим по отдельности каждый из множителей в произведении.

$$\begin{aligned}\frac{1}{g(a)g(a+h)} &= \frac{1}{g^2(a)} - \left(\frac{1}{g^2(a)} - \frac{1}{g(a)g(a+h)}\right) = \frac{1}{g^2(a)} - \frac{g(a+h) - g(a)}{g^2(a)g(a+h)} = \\ &= \frac{1}{g^2(a)} - \frac{g'(a)h + o(h)}{g^2(a)g(a) \cdot (1 + o(1))} = \frac{1}{g^2(a)} + O(h) = \frac{1}{g^2(a)} + o(1), \quad h \to 0.\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались равенством $g(a+h) = g(a) \cdot (1 + o(1))$ при $h \to 0$, которое вытекает из непрерывности функции $g(x)$ в точке a.

$$\begin{aligned}f(a+h)g(a) - f(a)g(a+h) &= (f(a+h) - f(a))g(a) - f(a)(g(a+h) - g(a)) = \\ &= (f'(a)h + o(h))g(a) - (g'(a)h + o(h))f(a) = \\ &= (f'(a)g(a) - f(a)g'(a))h + o(h), \quad h \to 0.\end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)(a+h) - \left(\frac{f}{g}\right)(a) &= \left(\frac{1}{g^2(a)} + o(1)\right) \cdot \Big((f'(a)g(a) - f(a)g'(a))h + o(h)\Big) = \\ &= \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)} \cdot h + o(h), \quad h \to 0.\end{aligned}$$

□

Теорема 3.1.3 (О дифференцировании сложной функции)**.** *Пусть* $f : X \to Y$, $f \in D(x)$, $g : Y \to X$, $g \in D(y)$, $y = f(x)$. *Тогда* $g \circ f \in D(x)$ *и*

$$(g \circ f)'(x) = g'(y) \cdot f'(x).$$

Доказательство. Согласно определению дифференцируемости

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + o(h), \quad h \to 0,$$
$$g(y+t) - g(y) = g'(y)t + o(t), \quad t \to 0,$$

где

$$o(t) = \gamma(t) \cdot t, \quad \lim_{t\to 0} \gamma(t) = 0.$$

Функцию $\gamma(t)$ доопределяем (если не определена) в нуле $\gamma(0) = 0$. Положим

$$t = f(x+h) - f(x) \to 0, \quad h \to 0.$$

Поскольку $f(x+h) - f(x) = f'(x)h + o(h) = O(h)$, $h \to 0$, то

$$t = O(h), \quad h \to 0,$$
$$\gamma(t) = \gamma(O(h)) = o(1), \quad h \to 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} g(f(x+h)) - g(f(x)) &= g(y+t) - g(y) = g'(y)t + \gamma(t)t = \\ &= g'(y) \cdot (f(x+h) - f(x)) + o(1) \cdot O(h) = \\ &= g'(y) \cdot (f'(x)h + o(h)) + o(h) = g'(y) \cdot f'(x) \cdot h + o(h), \quad h \to 0. \end{aligned}$$

□

инвариантность формы первого дифференциала

Пусть $y = f(x)$, $z = g(y)$, функции $f(x) \in D(a)$, $g(y) \in D(b)$, $b = f(a)$. Поскольку $dy = f'(a)\,dx$, мы по теореме о сложной функции получаем $dz = g'(b)f'(a)\,dx = g'(b)\,dy$.

Замечание 25. Эта простая формула показывает, что при вычислении дифференциала функции $z = g(y)$ в точке $y = b$ форма дифференциала, т.е. $dz = g'(b)dy$ остаётся той же самой как в случае, когда переменная y считается независимой, так и в том случае, когда она сама является функцией. В этом и состоит *инвариантность формы первого дифференциала.*

3.1.2 Дифференцируемость обратной функции. Правило Лейбница.

Теорема 3.1.4 (О дифференциировании обратной функции)**.** *Пусть функции $f : X \mapsto Y$, $f^{-1} : Y \mapsto X$ взаимнообратны и $f \in D(x_0)$ и $f'(x_0) \neq 0$, $f^{-1} \in C(y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$. Тогда $f^{-1} \in D(y_0)$ и более того*

$$(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Доказательство. Из условий теоремы вытекает, что $y_0 = f(x_0)$ равносильно $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Положим $t = f(x_0+h) - f(x_0)$, т.е. $y_0 + t = f(x_0+h)$. Тогда справедливо

$$t \to 0 \Longleftrightarrow h \to 0.$$

Действительно, из непрерывности f в точке x_0 вытекает, что из $h \to 0$ вытекает $t \to 0$, а из равенства $h = f^{-1}(y_0+t) - f^{-1}(y_0)$ и непрерывности f^{-1} в точке y_0 вытекает, что из $t \to 0$ следует $h \to 0$.

$$\lim_{t\to 0} \frac{f^{-1}(y_0+t) - f^{-1}(y_0)}{(y_0+t) - y_0} = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h) - x_0}{f(x_0+h) - f(x_0)}$$

Окончательно имеем

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h) - x_0}{f(x_0+h) - f(x_0)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}} = \frac{1}{\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

□

3.1.3 Производные основных элементарных функций.

Начнём с тривиального утверждения:

Производная постоянной функции равна 0 в любой точке. Действительно, для постоянной функции $y = c$ имеем: $\Delta y = 0$ и $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x} = 0$. (Из этого вытекает важный частный случай свойства 3 теоремы 3.1.2: $(cf(x))' = cf'(x)$.)

Производная e^x.

По определению,

$$(e^x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x$$

(здесь мы использовали найденный ранее $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = 1$).

Производная $\ln x$.

По теореме о производной обратной функции,

$$(\ln x)' = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

(так как $y = \ln x$, $x = e^y$; мы использовали также вычисленную производную для e^x).

Производная x^a.

Имеем равенство $y = x^a = e^{a\ln x}$ при $x > 0$. Тогда

$$(x^a)' = (e^{a\ln x})' = e^{a\ln x}(a\ln x)' = ae^{a\ln x}/x = ax^a/x = ax^{a-1}.$$

Производная $\sin x$.

Используем формулу для разности синусов и уже доказанное равенство $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$, по определению получаем

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin(\Delta x/2)\cos(x+\Delta x/2)}{\Delta x} = \cos x \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2} = \cos x.$$

Производная $\cos x$.

Используя теорему о производной сложной функции находим производную для косинуса

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = -\sin x.$$

Производные $\arcsin x$, $\arccos x$.

Из равенств $y = \arcsin x$ при $x \in (-1, 1)$ и $x = \sin y$ для $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ находим: $\cos y = \sqrt{1-x^2}$. По теореме о производной обратной функции

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Аналогично находим:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Производные $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

Вычислим данные пределы при помощи теоремы о производной частного:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Аналогично находим:

$$(\operatorname{ctg} x)' = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Производные $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$.

Воспользуемся равносильными для $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ равенствами $y = \operatorname{arctg} x$ и $x = \operatorname{tg} y$. Находим:

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Для $\operatorname{arcctg} x$ находим:

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

3.1.4 Приложения производной.

Геометрическая интерпретация.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке a. Рассмотрим прямую, проходящую через точку плоскости с координатами $(a, f(a))$ и имеющую угловой коэффициент $f'(a)$, т.е. имеющую уравнение

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Эта прямая называется *наклонной касательной к графику* $y = f(x)$ в точке $(a, f(a))$. При этом угловой

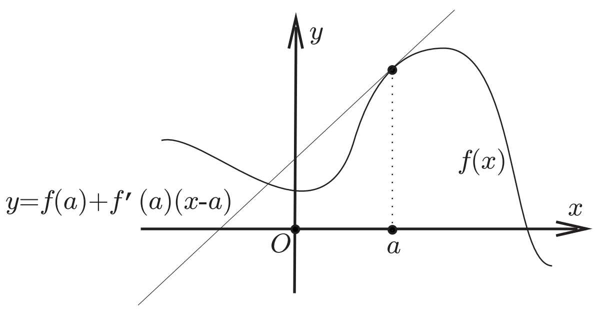


Рис. 3.2: График касательной.

коэффициент $f'(a)$ представляет собой предел угловых коэффициентов *секущей*, т.е. прямой, соединяющей точки графика $(a, f(a))$ и $(a + \Delta x, f(a + \Delta x))$. В этом смысле говорят, что касательная представляет собой предельное положение секущей.

Скорость движения.

Пусть t — текущее время, отсчёт которого начат в момент t_0, $s(a)$ — путь, пройденный к моменту времени a. Тогда за время от a до $a + \Delta t$ пройден путь $\Delta s = s(a + \Delta t) - s(a)$. Средняя скорость на этом отрезке равна $\Delta s(a)/\Delta t$. Предел этой величины при $\Delta t \to 0$ называется *мгновенной скоростью*. Он равен $s'(a)$.

3.1.5 Производные и дифференциалы высших порядков.

Пусть $y = f(x)$ является дифференцируемой в каждой точке интервала (a, b). Тогда каждой точке $x \in (a, b)$ можно поставить в соответствие величину $f'(x)$. Если полученная при этом функция сама имеет производную $(f'(x))'$, то эта производная называется второй производной функции $y = f(x)$ и обозначается $f''(x)$, т.е. $f''(x) = (f'(x))'$. Аналогично определяются $f'''(x) = (f''(x))'$, ..., и т.д., $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$.

Теорема 3.1.5. *Пусть существуют $u^{(n)}(x)$, $v^{(n)}(x)$. Тогда для любых постоянных α, β имеем:*

$$(\alpha u(x) + \beta v(x))^{(n)} = \alpha u^{(n)}(x) + \beta v^{(n)}(x).$$

Доказательство. Доказательство состоит в последовательном применении формул $(cf(x))' = cf'(x)$ и $(u(x)+v(x))' = u'(x) + v'(x)$. □

Для формулировки следующей теоремы нам потребуются некоторые сведения из комбинаторики. ***Факториал*** числа n (обозначение — $n!$) определим следующим образом: $0! = 1$, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ при $n \geqslant 1$. Обозначим

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!},$$

эта величина определена при $n \geqslant m$ и называется ***числом сочетаний из n элементов по m.*** Она равна числу способов, которым можно выбрать m элементов среди данных n различных элементов. Порядок элементов не учитывается. Для числа сочетаний также часто используется обозначение C_n^m. Очевидно, $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$.

Лемма 8.

$$C_n^m + C_n^{m-1} = C_{n+1}^m.$$

Доказательство.

$$C_n^m + C_n^{m-1} = \frac{n!}{m!(n-m)!} + \frac{n!}{(m-1)!(n-m+1)!} = \frac{n!}{(m-1)!(n-m)!}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n-m+1}\right) =$$
$$= \frac{n!}{(m-1)!(n-m)!} \cdot \frac{(n+1)}{m(n-m+1)} = \frac{(n+1)!}{m!(n-m+1)!} = C_{n+1}^m.$$

□

Теорема 3.1.6 (Лейбница)**.** *Пусть существуют $u^{(n)}(x)$, $v^{(n)}(x)$. Тогда*

$$(u(x)v(x))^{(n)} = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} u^{(m)}(x) v^{(n-m)}(x), \quad n \in \mathbb{N}$$

(под обозначением $f^{(0)}$ понимаем $f(x)$).

Доказательство. Используем метод математической индукции. Для $n = 1$ имеем:

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Правую часть этого равенства можно записать в виде

$$C_1^0 u'(x)v(x) + C_1^1 u(x)v'(x),$$

поскольку $C_1^0 = C_1^1 = 1$. В этом случае утверждение теоремы доказано.

Предположим далее, что теорема верна при некотором значении $n \geqslant 1$, т.е. что

$$(u(x)v(x))^{(n)} = \sum_{m=0}^{n} C_n^m u^{(m)}(x) v^{(n-m)}(x)$$

и докажем, что она останется верна при замене числа n на $n+1$. Для этого возьмём производную от левой и правой части этого равенства:

$$(u(x)v(x))^{(n+1)} = \left((u(x)v(x))^{(n)}\right)' = \left(\sum_{m=0}^{n} C_n^m u^{(m)}(x)v^{(n-m)}(x)\right)'$$

Получаем

$$\begin{aligned}(u(x)v(x))^{(n+1)} &= \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \left(u^{(m)}(x)v^{(n-m)}(x)\right)' = \\ &= \sum_{m=0}^{n} C_n^m \left(u^{(m+1)}(x)v^{(n-m)}(x) + u^{(m)}(x)v^{(n-m+1)}(x)\right).\end{aligned}$$

В последней сумме произведём перегруппировку слагаемых, объединив члены , содержащие $u^{(m)}(x)v^{(n-m+1)}(x)$. Для этого в одной сумм произведём замену индекса суммирования $s = m+1$.

$$\sum_{m=0}^{n} C_n^m u^{(m+1)}(x)v^{(n-m)}(x) + \sum_{m=0}^{n} C_n^m u^{(m)}(x)v^{(n-m+1)}(x) =$$

$$C_n^n u^{(n+1)}v + \sum_{m=0}^{n-1} C_n^m u^{(m+1)}v^{(n-m)} + C_n^0 uv^{(n+1)} + \sum_{m=1}^{n} C_n^m u^{(m)}v^{(n-m+1)} =$$

$$u^{(n+1)}v + \sum_{s=1}^{n} C_n^{s-1} u^{(s)}v^{(n-s+1)} + \sum_{m=1}^{n} C_n^m u^{(m)}v^{(n-m+1)} + uv^{(n+1)}.$$

Если опять переобозначить s через m получим сумму

$$u^{(n+1)}v + \sum_{m=1}^{n} \left(C_n^m + C_n^{m-1}\right) u^{(m)}(x)v^{(n-m+1)}(x) + uv^{(n+1)}.$$

Осталось воспользоваться леммой 8, согласно которой эта сумма равна

$$\sum_{m=0}^{n+1} C_{n+1}^m u^{(m)}(x)v^{(n-m+1)}(x),$$

что и требовалось доказать. □

Замечание 26. Почти таким же способом, используя лемму 8, можно доказать известную формулу бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^m b^{n-m}.$$

Замечание 27. Ещё одно важное замечание. Для вычисления чисел $\binom{n}{m}$ (также носящих название биномиальных коэффициентов ввиду написанной выше формулы бинома) можно воспользоваться простым алгоритмом. Рассмотрим так называемый *треугольник Паскаля*:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
...

Его строки нумеруем, начиная с нулевой. При этом в каждой следующей строке элемент, стоящий между двух элементов предыдущей строки, равен сумме этих элементов. Согласно доказанной лемме 8, это означает, что элемент с номером m из строки с номером n этого треугольника, равен как раз C_n^m.

По аналогии с тем, как это было сделано выше, можно определить понятие дифференциала n-го порядка. Дифференциал $df(x) = f'(x)\,dx$ функции $f(x)$, определённой на некотором промежутке, можно рассматривать, как функцию от x, вновь определённую на этом промежутке. Если эта функция является дифференцируемой, то определим её ***второй дифференциал*** равенством $d^2f(x) = d(df(x)) = (f'(x)dx)'dx = f''(x)dx^2$.

Обратите внимание на принятые обозначения: $(dx)^2 = dx^2$. Если Вы захотите продифференцировать функцию x^2, то придётся писать $d(x^2)$. В случае независимой переменной x величина dx не зависит от x и, поэтому, второй дифференциал от x, как дифференциал постоянной функции, равен 0, т.е. $d^2x = 0$. Если же x, в свою очередь, является функцией от некоторой переменной, то $d^2f(x) = d(df(x)) = d(f'(x))dx + f'(x)d(dx) = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x$. Таким образом, уже второй дифференциал не обладает свойством инвариантности формы .

Продолжая аналогичные рассуждения, получим, что если $(n-1)$-ый дифференциал является дифференцируемой функцией от x, то можно определить $d^nf(x)$, как $d^nf(x) = d(d^{n-1}f(x))$. При этом в случае независимой переменной x, с помощью метода математической индукции, получаем формулу:

$$d^nf(x) = d(d^{n-1}f(x)) = d(f^{(n-1)}dx^{n-1}) = (f^{(n-1)}dx^{n-1})'dx = f^{(n)}(x)dx^n.$$

Из этой формулы следует равенство, часто используемое в качестве обозначения для производной порядка n:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^nf(x)}{dx^n}.$$

Свойства дифференциала n-го порядка сразу следуют из свойств производной порядка n, на этом мы не будем здесь специально останавливаться.

3.1.6 Эластичность и её свойства.

Определение 3.1.2. Пусть функция y определена в некоторой окрестности точки x, дифференцируема в точке x и $y(x) \neq 0$. *Эластичностью* функции y в точке x называется величина

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y' \tag{3.1.1}$$

Если предположить, что $x \neq 0$, то можно рассматривать величину

$$\frac{\triangle y}{y} : \frac{\triangle x}{x}, \tag{3.1.2}$$

которая характеризует величину относительного изменения y в результате соответствующего относительного изменения x; например, процентное изменение спроса на товар в результате однопроцентного изменения цены этого товара. Тогда из (3.1.1) и (3.1.2) следует, что

$$E_x(y) = \lim_{\triangle x \to 0} \left(\frac{\triangle y}{y} : \frac{\triangle x}{x} \right).$$

1. Если $y > 0$, то $y'/y = (\ln y)'$ по теореме о производной сложной функции.

2. Если $y < 0$, то $y'/y = (-y)'/(-y) = (\ln(-y))'$, поэтому при $y < 0$, $E_x(y) = x \cdot (\ln(-y))'$.

Следовательно, формулу (3.1.1) можно переписать в виде

$$E_x(y) = \begin{cases} x \cdot (\ln y)', & \text{при } y > 0, \\ x \cdot (\ln(-y))', & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

Обе эти формулы можно объединить в одну: $E_x(y) = x \cdot (\ln |y|)'$.

Теорема 3.1.7. *1) Если u, v — функции, для которых определены эластичности $E_x(u)$ и $E_x(v)$, то:*

$$E_x(uv) = E_x(u) + E_x(v),$$
$$E_x(u/v) = E_x(u) - E_x(v).$$

2) Если для функции $y = y(x)$, определённой на интервале X, существует обратная функция $x = x(y)$, причём y дифференцируема на этом интервале X и ни в одной точке x интервала не выполняется равенство $y'(x) = 0$, то для всех $x \neq 0$, $y \neq 0$ определены величины $E_x(y)$ и $E_y(x)$, причём $E_y(x) = 1/E_x(y)$.

Доказательство. Первые утверждения данной теоремы вытекают из соотношений

$$E_x(uv) = x \cdot (\ln|uv|)' = x \cdot (\ln|u|)' + x \cdot (\ln|v|)' = E_x(u) + E_x(v),$$
$$E_x(u/v) = x \cdot (\ln|u/v|)' = x \cdot (\ln|u|)' - x \cdot (\ln|v|)' = E_x(u) - E_x(v).$$

Далее, по теореме о производной сложной функции

$$\frac{y}{x} \cdot x'_y = \frac{y}{x \cdot y'_x} = \frac{1}{\frac{x}{y} \cdot y'_x},$$

что в соответствии с (3.1.1) даёт $E_y(x) = 1/E_x(y)$. □

В качестве примера рассмотрим ценовую эластичность спроса.[2] Пусть P — первоначальная цена товара, Q — первоначальное количество получаемой продукции, т.е. первоначальный спрос, $\triangle P$ — изменение цены, $\triangle Q$ — соответствующее изменение спроса. Обычно при повышении цены, т.е. при $\triangle P > 0$, спрос на товар сокращается, т.е. $\triangle Q < 0$, поэтому

$$\frac{\triangle Q}{\triangle P} < 0 \Longrightarrow \frac{\triangle Q}{Q} : \frac{\triangle P}{P} < 0$$

и, по теореме о предельном переходе в неравенствах, $E_P(Q) \leqslant 0$.

Величина эластичности в зависимости от цен представляет собой важную характеристику спроса на товар. Спрос является эластичным, если $E_P(Q) < -1$. Причём уменьшение цен на 1% вызывает увеличение спроса меньше, чем на 1%. При спросе с единичной эластичностью, т.е. $E_P(Q) = -1$, процент увеличения спроса равен проценту уменьшения цен товара.

Теорема 3.1.8. *Пусть $R(P) = P \cdot Q(P)$ — выручка от реализации по цене P продукции в объёме $Q(P)$. Пусть $Q(P)$ — дифференцируемая функция.*

- *Если $E_P(Q) < -1$, т.е. если спрос эластичен, то с ростом цен выручка уменьшается, а с уменьшением цен — возрастает.*
- *Если $E_P(Q) > -1$, т.е. если спрос неэластичен, то с ростом цен выручка растёт, с уменьшением цен выручка уменьшается.*
- *Если $E_P(Q) = -1$, то выручка не меняется с изменением цен.*

Доказательство. Справедливо

$$R' = Q + PQ' = Q\left(1 + \frac{P}{Q}Q'\right) = Q(1 + E_P(Q)).$$

Откуда мы видим, что знак R' полностью определяется знаком выражения $1 + E_P(Q)$, т.е. выручка R — увеличивается, если $E_P(Q) > -1$ и наоборот R — уменьшается, если $E_P(Q) < -1$. При $E_P(Q) = -1$ выручка не меняется с изменением цен. □

[2]Спрос принято характеризовать так называемой эластичностью (плавностью, мягкостью). Эластичность спроса — показатель степени чувствительности (реакции) потребителей к изменениям цены товара.

Эластичность спроса может быть связана не только с изменением цены на товар, но и с изменением доходов покупателей. Поэтому различают эластичность спроса по цене и эластичность спроса по доходам. Мы рассматриваем первый вариант.

Реакция потребителей на изменение цены на товар может быть сильной, слабой и нейтральной. Каждая из них порождает соответствующий спрос: эластичный, неэластичный, единичный. Возможны варианты, когда спрос оказывается совершенно эластичным или совершенно неэластичным.

П р и м е р ы 3.1.1. Приведём примеры эластичных и неэластичных товаров.

1. $E_P(Q) = 0$. Совершенно неэластичные товары: предметы первой необходимости — соль, сахар, спички, продукты питания, транспортные услуги.
2. $E_P(Q) \in (-1; 0)$. Взаимодополняющие товары (кофе — сливки, шашлык — соус). Неэластичный спрос. При изменении цены на 1% спрос изменяется менее, чем на 1%. Падение цены приведет к снижению выручки
3. $E_P(Q) = -1$. Выручка максимальная. При изменении цены на 1% спрос изменяется тоже на 1%. Максимальная выручка.
4. $E_P(Q) < -1$. Взаимозаменяющие товары (товары конкурентов). Эластичный спрос. При изменении цены на 1% спрос изменяется более, чем на 1%. Падение цены приведет к росту выручки
5. $E_P(Q) = -\infty$. Совершенно эластичные товары: предметы роскоши.

Контрольные вопросы.

1. Чему равна производная от функций $\operatorname{arctg} x$, $\arcsin x$?

Упражнения к 3.1

Упражнение 3.1.1. *Функция $y(x)$ заданна уравнением*

$$y^3 + y^2x + x^2y - x^3 = 16.$$

Найдите производную этой функции в точках, где $y = x$

Ответы: 3.1.1 1/6.

3.2 Экстремумы. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши.

3.2.1 Теорема Ферма.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в $\mathcal{U}(a)$.

Определение 3.2.1. Будем называть точку *a точкой строгого максимума* функции $y = f(x)$, если существует такое число $\delta > 0$, что для всех $x \in \mathring{\mathcal{U}}_\delta(a)$ выполняется неравенство $f(x) < f(a)$.

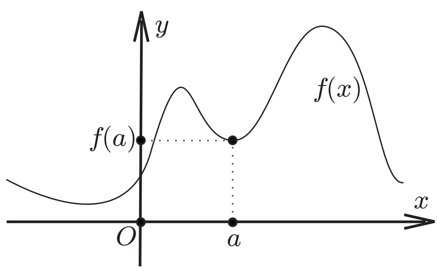


Рис. 3.3: К теореме Ферма.

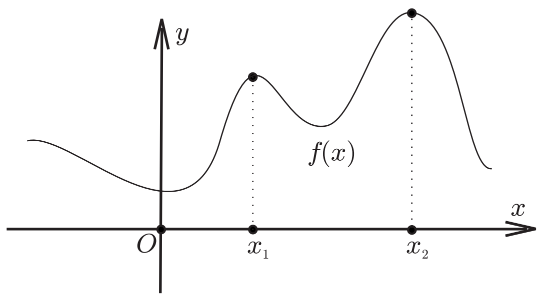


Рис. 3.4: Две точки локального максимума.

Определение 3.2.2. Аналогично, будем называть точку *a точкой строгого минимума* функции $y = f(x)$, если существует такое число $\delta > 0$, что для всех $x \in \mathring{\mathcal{U}}_\delta(a)$ выполняется неравенство $f(x) > f(a)$.

Определение 3.2.3. Будем называть точку *a точкой максимума (минимума)* функции $y = f(x)$, если существует такое число $\delta > 0$, что для всех $x \in \mathcal{U}_\delta(a)$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant f(a)$ $(f(x) \geqslant f(a))$.

Общее название точки максимума и точки минимума — *точка экстремума.*

Теорема 3.2.1 (Ферма). *Пусть функция $y = f(x)$ определена в $\mathcal{U}(a)$ и пусть a — точка экстремума этой функции. Тогда если существует $f'(a)$, то $f'(a) = 0$.*

Доказательство. Напишем условие дифференцируемости функции в точке a

$$f(a+h) - f(a) = h(f'(a) + \alpha(h)),$$

где $\alpha(h)$ бесконечно малая функция при $h \to 0$. Предположим $f'(a) \neq 0$, например, $f'(a) > 0$. Тогда ввиду равенства $\lim_{h\to 0} \alpha(h) = 0$ существует окрестность $\overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta$ точки a в которой знак выражения $f'(a) + \alpha(h)$ будет совпадать со знаком $f'(a) > 0$. Откуда

$$f(a+h) - f(a) = \begin{cases} > 0, & \text{при } 0 < h < \delta, \\ < 0, & \text{при } -\delta < h < 0. \end{cases}$$

Получено противоречие с тем, что a точка экстремума. ☐

Замечание 28. Эта теорема даёт *необходимое условие* экстремума. Однако не всегда в точке экстремума существует $f'(a)$. Например, для функции $y = |x|$ точка $x = 0$, очевидно, является точкой минимума, однако, она не имеет производной в этой точке.

П р и м е р 3.2.1. Теорема Ферма не является *достаточным условием* существованния экстремума, даже в случае дифференцируемости функции. Например, функция $f(x) = x^3$ всюду дифференцируема. Для неё выполнено $f'(0) = 0$ но при этом $x_0 = 0$ не является точкой экстремума.

3.2.2 Теорема Ролля.

Теорема 3.2.2 (Ролль).

$$\left.\begin{array}{l} f \in C[a,b] \\ f \in D(a,b) \\ f(a) = f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in (a,b) \quad f'(c) = 0$$

Доказательство. По теореме Вейерштрасса непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция принимает на этом отрезке своё минимальное значение m и максимальное значение M. Если $m = M$, то это означает, что функция $y = f(x)$ просто является постоянной на $[a,b]$ и $f'(c) = 0$ для всех $c \in (a,b)$. Если $m \neq M$, то хотя бы одно из этих значений должно приниматься во внутренней точке $c \in (a,b)$. Точка $c \in (a,b)$ при этом является точкой экстремума и, по условию, существует $f'(c)$. По теореме Ферма получаем: $f'(c) = 0$. Теорема доказана. ☐

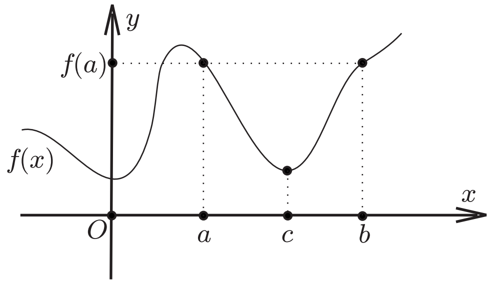


Рис. 3.5: К теореме Ролля.

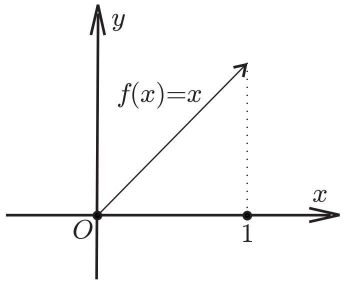


Рис. 3.6: Пример.

Замечание 29. Все условия теоремы существенны, т.е. при их отбрасывании заключение теоремы может стать неверным.

П р и м е р ы 3.2.1. Разберём несколько примеров:

1. Для функции (см. рис. 3.6)
$$y = \begin{cases} x, & x \in [0,1), \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$
нарушено условии непрерывности на отрезке (остальные выполнены). Её производная всюду на интервале $(0,1)$ равна 1.

2. $y = |x|$, $x \in [-1,1]$. Не выполняется условие дифференцируемости на интервале $(-1,1)$ (нет производной в точке $x = 0$), остальные условия выполнены. Точки, в которой производная равна 0, нет.

3. $y = x$, $x \in [0,1]$. Нарушено условие равенства значений в концах отрезка. производная всюду на интервале равна 1.

Следствие 3.2.1. Пусть $y = f(x)$ определена и непрерывна в $\mathcal{U}(a)$ и имеет в этой окрестности непрерывные производные $f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)$, а $f^{(n+1)}(x)$ пусть существует хотя бы в $\mathcal{U}(a)$. Пусть точка b принадлежит $\mathcal{U}(a)$ и пусть $f(a) = f'(a), \ldots, f^{(n)}(a) = f(b) = 0$. Тогда между точками a и b существует такая точка c, что $f^{(n+1)}(c) = 0$.

Доказательство. Для определённости считаем, что $a < b$. Рассмотрим отрезок $[a,b]$. Функция $y = f(x)$ удовлетворяет на этом отрезке всем условиям теоремы Ролля. Поэтому существует точка $b_1 \in (a,b)$ такая, что $f'(b_1) = 0$. Если $n = 0$, то утверждение доказано. Пусть $n \geqslant 1$. Рассмотрим теперь функцию $f'(x)$ на отрезке $[a, b_1]$. По условию, эта функция непрерывна во всей окрестности $U(a)$, значит, и на отрезке $[a, b_1]$. Кроме того, $f''(x)$ существует хотя бы на интервале (a, b_1). К функции $f'(x)$ на отрезке $[a, b_1]$ применяем теорему Ролля. Согласно этой теореме, существует точка $b_2 \in (a, b_1)$ такая, что $f''(b_2) = 0$. Если $n = 1$, то утверждение доказано. Для $n \geqslant 2$ продолжаем действовать аналогично. В результате мы последовательно получим точки $b_i, i = 1, 2, \ldots, n$ такие, что $f^{(i)}(b_i) = 0$. Рассмотрим отрезок $[a, b_n]$ и функцию $f^{(n)}(x)$. Она непрерывна на этом отрезке по условию, имеет $f^{(n)}(x)$ производную на интервале (a, b_n) и $f^{(n)}(a) = f^{(n)}(b_n) = 0$. По теореме Ролля, на интервале (a, b_n) существует точка c такая, что $f^{(n+1)}(c) = 0$, что и требовалось доказать. □

3.2.3 Теоремы о конечных приращениях

Теорема 3.2.3 (Лагранжа о конечных приращениях)**.**
$$\left.\begin{array}{l} f \in C[a,b] \\ f \in D(a,b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in (a,b) \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

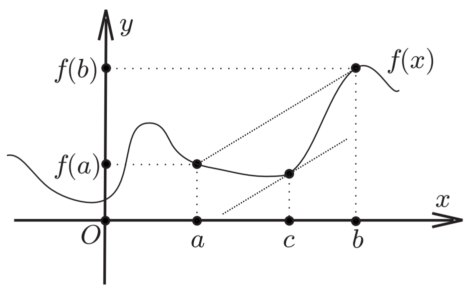


Рис. 3.7: К теореме Лагранжа.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию[3]
$$F(x) = \begin{vmatrix} f(x) - f(a) & x - a \\ f(b) - f(a) & b - a \end{vmatrix} = (b-a)(f(x) - f(a)) - (x-a)(f(b) - f(a))$$

[3]Определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ определяется как $|A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$. Из определения легко следуют следующие свойства для определителей:

Эта функция непрерывна на отрезке, т.к. $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ по условию, а линейная функция $(x-a)(f(b)-f(a))$, очевидно, всюду непрерывна. Кроме того, она дифференцируема на интервале (a,b) и $F'(x)=(b-a)f'(x)-(f(b)-f(a))$. Для $F(x)$ справедливо:

$$\left.\begin{array}{l} F(a)=F(b)=0 \\ F\in C[a,b] \\ F\in D(a,b) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ (по т. Ролля) } \exists c\in(a,b): F'(c)=0$$

$$f'(c)(b-a)-(f(b)-f(a))=0$$

□

Следствия, связанные с монотонностью функции

Следствие 3.2.2.

$$\left.\begin{array}{l} f\in D[a,b] \\ f'(x)>(<)0 \quad (\forall x\in[a,b]) \end{array}\right\} \Rightarrow f\uparrow(\downarrow) \text{ на } [a,b]$$

Доказательство.

$$a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$$

$$\text{По т. Лагранжа } c\in(x_1,x_2)$$

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)>(<)0$$

□

Следствие 3.2.3.

$$\left.\begin{array}{l} f\in D[a,b] \\ f'(x)\geqslant(\leqslant)0 \quad (\forall x\in[a,b]) \end{array}\right\} \Rightarrow f - \text{ неубывающая(невозрастающая) на } [a,b]$$

Равенство нулю производной на сегменте влечёт её постоянство

Следствие 3.2.4.

$$f\in D[a,b], \text{ тогда } (f=const)\Leftrightarrow(f'(x)=0,\forall x\in[a,b])$$

Доказательство.

$$\Rightarrow \text{ - очевидно}$$

$$\Leftarrow$$

$$a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$$

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)=0$$

□

---

1. Если один столбец (строчка) состоит из нулей, то определитель матрицы равен нулю. Действительно, $\begin{vmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{vmatrix}=0\cdot b-a\cdot 0=0$.
2. Если в матрице есть два одинаковых столбца (сторочки), то определитель матрицы также равен нулю. Действительно, $\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix}=a\cdot b-a\cdot b=0$.

(Данные свойства определителей справедливы и в случае матрицы порядка $n\times n$).

Отсутствие разрывов первого рода и устранимых разрывов у производной (для функции дифференцируемой в каждой точке сегмента).

Начнем с доказательства леммы.

Лемма 9. *Пусть функция $y = f(x)$ имеет конечную производную $f(x)$ всюду на интервале $(c, c+\delta)$, где δ — некоторое положительное число и, кроме того, имеет правую производную $f'_+(c)$. Тогда, если производная $f'(x)$ имеет в точке c правый предел $f'(c+0) = \lim_{x\to c+0} f'(x)$, то этот предел совпадает с правой производной $f'_+(c)$, т.е.*

$$f'_+(c) = f'(c+0).$$

Доказательство. Из существования правой производной $f'_+(c)$ вытекает существование конечного предела

$$\lim_{x\to c+0} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}.$$

Но это означает, что существует равный нулю предел $\lim_{x\to c+0}(f(x)-f(c)) = 0$, т. е. функция $y = f(x)$ является непрерывной в точке c справа.

Фиксируем любое x из интервала $(c, c+\delta)$. Так как функция $y = f(x)$ дифференцируема (а значит, и непрерывна) всюду на указанном интервале и, кроме того, непрерывна в точке с справа, то для этой функции выполнены на отрезке $[c, x]$ все условия теоремы Лагранжа. Следовательно, существует $\xi \in [c, x]$ такая, что

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(\xi).$$

Переходя к пределу $x \to c+0$ (а следовательно и $\xi \to c+0$) в последнем равенстве, получаем:

$$f'_+(c) = \lim_{\xi\to c+0} f'(\xi).$$

□

Применяя только что доказанную лемму в каждой точке c некоторого интервала (a, b), мы придем к следующему утверждению:

Следствие 3.2.5. Если функция $f(x)$ имеет конечную производную всюду на интервале (a, b), то эта производная $f(x)$ не может иметь на этом интервале ни точек устранимого разрыва, ни точек разрыва первого рода.

Доказательство. Действительно, если в некоторой точке c интервала (a, b) существуют конечные правый и левый пределы функции $f'(x)$, то $f'(x)$ непрерывна в точке c в силу доказанной леммы, поскольку

$$f'(c+0) = f'(c-0) = f'(c).$$

□

П р и м е р 3.2.2. Разрывы второго рода всё же возможны для функции, которая дифференцируема в каждой точке, например отрезка $[-1; 1]$. Положим,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Легко показать, что производная в каждой точке действительной оси вычисляется по формуле:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Поскольку не существует предел $f'(x+0)$, то производная в точке $x = 0$ имеет разрыв второго рода.

Пример 3.2.3. Разрывы первого рода для производной всё же возожны, если не требовать условие дифференцируемости в каждой точке сегмента, например отрезка $[-1;1]$. Это мы можем заметить на функции $f(x) = |x|$, для которой справедливо:

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

но в нуле производная функции $f(x) = |x|$, как нам известно не существует.

Теорема 3.2.4 (Коши о конечных приращениях)**.**

$$\left. \begin{array}{l} f, g \in C[a,b] \\ f, g \in D(a,b) \\ g'(x) \neq 0, \quad \forall x \in (a,b) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists c \in (a,b) \quad \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = \begin{vmatrix} f(x)-f(a) & g(x)-g(a) \\ f(b)-f(a) & g(b)-g(a) \end{vmatrix} = (g(b)-g(a))(f(x)-f(a)) - (g(x)-g(a))(f(b)-f(a)).$$

Эта функция непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b), причём

$$F'(x) = (g(b)-g(a))f'(x) - g'(x)(f(b)-f(a)).$$

Кроме того,

$$\left. \begin{array}{l} F \in C[a,b] \\ F \in D(a,b) \\ F(a) = F(b) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{ (по т. Ролля) } \exists c \in (a,b) : F'(c) = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (g(b)-g(a))f'(c) = (f(b)-f(a))g'(c).$$

Покажем, что $g(b)-g(a) \neq 0$. Действительно, если бы выполнялось равенство $g(b)-g(a) = 0$, то по теореме Ролля, применённой к функции $g(x)$, существовала бы точка $c \in (a,b)$ такая, что $g'(c) = 0$, что невозможно по условию. Поскольку, из условия вытекает, что $g'(c) \neq 0$, то разделив равенство $F'(c) = 0$ на отличную от нуля константу $g'(c)(g(b)-g(a))$ получаем, что $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$, что и требовалось доказать. □

Замечание 30. Разумеется, теорема Лагранжа представляет собой частный случай теоремы Коши, соответствующий $g(x) = x$.

3.3 Формула Тейлора.

Для функции $f \in D^n(x_0)$ определим *многочлен Тейлора*

$$P_n(x;x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

В следующей теореме мы найдём разность между $f(x) - P_n(x;x_0)$, а эту разность будем называть остатком от разложения в ряд Тейлора и обозначать через $R_n(f,x,x_0)$. Таким образом справедливо $f(x) = P_n(x;x_0) + R_n(f,x,x_0)$.

Теорема 3.3.1 (Формула Тейлора с остатком в общем виде)**.**

$$\begin{array}{l} \varphi, f^{(n)} \in C[x,x_0] \textit{ или } [x_0,x] \\ \varphi, f^{(n)} \in D(x,x_0) \textit{ или } (x_0,x) \\ \varphi'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (x,x_0) \textit{ или } (x_0,x) \end{array}$$

Тогда существует константа c, лежащая между точками x_0 и x, такая, что

$$f(x) - P_n(x;x_0) = \frac{(\varphi(x) - \varphi(x_0))f^{(n+1)}(c)}{\varphi'(c)\cdot n!}(x-c)^n.$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(t) = f(x) - P_n(x;t) = f(x) - \left(f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\right).$$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi, F \in D(x,x_0) \text{ или } (x_0,x) \\ \varphi, F \in C[x,x_0] \text{ или } [x_0,x] \\ \varphi'(x) \neq 0, \quad \forall x \in (x,x_0) \text{ или } (x_0,x) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ (по т. Коши) } \exists c \in (x,x_0) \text{ или } (x_0,x)$$

$$\frac{F(x_0) - F(x)}{\varphi(x_0) - \varphi(x)} = \frac{F'(c)}{\varphi'(c)}$$

Найдем производную функции $F(t)$

$$F'(t) = -\left(f'(t) + \left(\frac{f''(t)}{1!}(x-t) - f'(t)\right) + \left(\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 - \frac{f''(t)}{1!}(x-t)\right) + \dots + \right.$$
$$\left.\left(\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\right)\right) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

Откуда

$$\frac{f(x) - P_n(x;x_0) - 0}{\varphi(x_0) - \varphi(x)} = \frac{-f^{(n+1)}(c)(x-c)^n}{n!\varphi'(c)}.$$

Следовательно

$$f(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right) + \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(c)n!} f^{(n+1)}(c)(x-c)^n.$$

Таким образом найден остаток ряда Тейлора:

$$R_n(f,x,x_0) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(c)n!} f^{(n+1)}(c)(x-c)^n.$$

□

Следствие 3.3.1 (Остаток в форме Коши)**.** Подставим в разложение теремы 3.3.1 функцию $\varphi(t) = x - t$, на функцию f требуем условия из теоремы. Тогда остаток запишется в виде

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n(x-x_0).$$

Следствие 3.3.2 (Остаток в форме Лагранжа)**.** Подставим в разложение теремы 3.3.1 функцию $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$, на функцию f требуем условия из теоремы. Тогда остаток запишется в виде

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Следствие 3.3.3 (Остаточный член в форме Шлемильха-Роша)**.** Подставим в разложение теремы 3.3.1 функцию $\varphi(t) = (x-t)^{\alpha}$, $\alpha > 0$. Данная функция имеет производную $\varphi'(t) = -\alpha(x-t)^{\alpha-1} \neq 0$ на интервале между x и x_0 поэтому все условия теремы на $\varphi(t)$ выполнены. На функцию $f(t)$ требуем условия из теоремы. Тогда остаток запишется в виде

$$R_n = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{x-x_0}{x-c}\right)^{\alpha}(x-c)^{n+1}\cdot\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}.$$

Примечание. 1. Поскольку в случае независимой переменной имеют место равенства $x - x_0 = dx$, $f'(x_0)(x-x_0) = df(x_0)$, ..., $f^{(n)}(x_0)dx^n = d^n f(x_0)$, $f^{(n+1)}(c)dx^{n+1} = d^{n+1}f(c)$, доказанную формулу Тейлора можно записать в виде:

$$\Delta f(x_0) = df(x_0) + \frac{d^2 f(x_0)}{2} + \dots + \frac{d^n f(x_0)}{n!} + \frac{d^{n+1} f(c)}{(n+1)!}.$$

2. Так как точка ξ лежит между точками x_0 и x, существует число $0 < \theta < 1$ такое, что $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$.
3. В случае $x_0 = 0$ доказанная формула приобретает вид:

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x) + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Обычно формула Тейлора при $a = 0$ с остаточным членом в любой форме называется *формулой Маклорена.*

3.3.1 Разложение основных функций в ряд Тейлора (ряд Маклорена)

Определение 3.3.1. Разложение функции в ряд Тейлора в нуле $x = x_0$ называется разложением в ряд Маклорена.

Пример 3.3.1. Разложим в ряд Тейлора функцию $f(x) = e^x$ в нуле $x_0 = 0$. Поскольку

$$f^{(n)}(x) = e^x, \quad f^{(n)}(0) = 1, \quad f^{(n+1)}(c) = e^c,$$

то ряд Маклорена с остатком в форме Лагранжа принимает вид

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1} \quad c \in (0; x).$$

Для $x \in [-A; A]$ оценим остаток ряда

$$|R_n(e^x)| = \left|\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \leqslant e^A \frac{A^{n+1}}{(n+1)!} \to 0, \quad (n \to +\infty).$$

Откуда вытекает, что e^x представима своим бесконечным рядом на всей числовой оси, т.е.

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Пример 3.3.2. Разложим в ряд Тейлора функцию $f(x) = \sin x$ в нуле $x_0 = 0$. Поскольку

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$$

и

$$f^{(2k)}(0) = 0, \quad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k,$$

то ряд Маклорена с остатком в форме Лагранжа принимает вид

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{\sin(c + \frac{\pi}{2}(2n+2))}{(2n+2)!}x^{2n+2}$$

Для $x \in [-A; A]$ оценим остаток ряда

$$|R_{2n+2}(\sin x)| \leqslant \frac{A^{2n+2}}{(2n+2)!} \to 0, \quad (n \to +\infty).$$

Откуда вытекает, что $\sin x$ представима своим бесконечным рядом на всей числовой оси, т.е.

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Как видно из картинки 3.8 полиномы Тейлора, с увеличением степени все лучше приближают функцию $\sin x$. На картинке изображены многочлены $P_1(x) = x$, $P_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$, $P_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$, $P_7(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$.

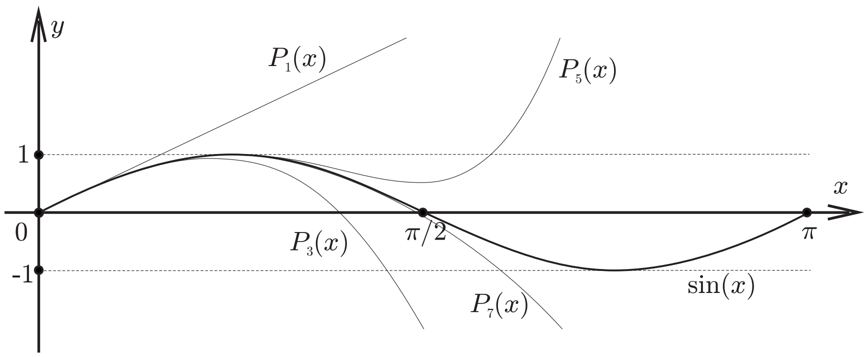


Рис. 3.8: Полиномы Тейлора для $\sin x$.

П р и м е р 3.3.3. Разложим в ряд Тейлора функцию $f(x) = \cos x$ в нуле $x_0 = 0$. Поскольку

$$f^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{\pi n}{2})$$

и

$$f^{(2k+1)}(0) = 0, \quad f^{(2k)}(0) = (-1)^k,$$

то ряд Маклорена с остатком в форме Лагранжа принимает вид

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \frac{\cos(c + \frac{\pi}{2}(2n+2))}{(2n+2)!} x^{2n+2}$$

Для $x \in [-A; A]$ оценим остаток ряда

$$|R_{2n+2}(\cos x)| \leqslant \frac{A^{2n+2}}{(2n+2)!} \to 0, \quad (n \to +\infty).$$

Откуда вытекает, что $\cos x$ представима своим бесконечным рядом на всей числовой оси, т.е.

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

П р и м е р 3.3.4. Для $\alpha \neq \mathbb{Z}_+$ разложим в ряд Тейлора функцию $f(x) = (1+x)^\alpha$ в нуле $x_0 = 0$. Найдём n -ую производную функции $f(x)$:

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}.$$

Откуда

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1).$$

Разложение в ряд Маклорена с остатком в форме Коши принимает вид:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!}(1+c)^{\alpha-n-1}x(x-c)^n.$$

Пусть $|x| < 1$; $c \in (0; x)$ или $(x; 0)$. Поскольку функция $\psi(c) = \frac{x-c}{1+c}$ монотонна между 0 и x, а также $\psi(x) = 0$, то

$$|\psi(c)| = \left|\frac{x-c}{1+c}\right| \leqslant |\psi(0)| = |x|.$$

$$|R_n((1+x)^\alpha)| \leqslant \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!}\right| \cdot (1+c)^{\alpha-1} \cdot |x|^{n+1},$$

где $c \in (0; x)$ или $c \in (x; 0)$ в зависимости от знака x. Зафиксируем произвольное $q \in (0; 1)$ и положим

$$C(\alpha, q) = \max\Big\{(1-q)^{\alpha-1}, (1+q)^{\alpha-1}\Big\}.$$

Поскольку $(1+c)^{\alpha-1} \leqslant C(\alpha, q)$, то для $|x| \leqslant q < 1$ справедливо

$$\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!}\right| \cdot (1+c)^{\alpha-1} \cdot |x|^{n+1} \leqslant C(\alpha, q)\, q^{n+1} \left|\alpha\left(1-\frac{\alpha}{1}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\dots\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)\right|.$$

Обозначим величину справа, полученную в последнем неравенстве через a_n. Покажем, что для a_n выполнено $a_n \to 0 (n \to +\infty)$. Справедливо

$$a_{n+1} = q\left|1-\frac{\alpha}{n+1}\right| a_n.$$

Начиная с некоторого N будет выполнено $q\left|1-\frac{\alpha}{n+1}\right| < 1$, следовательно $\forall n > N$ будет $0 \leqslant a_{n+1} < a_n$. Откуда по теореме Вейерштрасса о монотонной последовательности, вытекает существование предела $\lim a_n = A$. Найдём его.

$$A = q \cdot A \Rightarrow A = 0.$$

Откуда вытекает, что остаток ряда Тейлора стремится к нулю при $n \to +\infty$. Таким образом приходим к формуле

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \quad |x| < 1,\ \alpha \notin \mathbb{Z}_+.$$

П р и м е р 3.3.5. Найдём ряд Тейлора функции $f(x) = \ln(1+x)$ в нуле $x_0 = 0$. Найдём n -ую производную функции $f(x)$:

$$\begin{aligned} f' &= (1+x)^{-1}, \\ f'' &= -(1+x)^{-2}, \\ f''' &= 2! \cdot (1+x)^{-3}, \\ &\dots \\ f^{(n)} &= (-1)^{n+1}(n-1)!(1+x)^{-n}. \end{aligned}$$

Откуда находим разложение в ряд Маклорена с остатком в форме Коши:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + (-1)^n(1+c)^{-n-1}(x-c)^n x.$$

Пусть $|x| < 1$, тогда $c \in (0; x)$ и, как доказано в предыдущем примере, справедливо

$$\left|\frac{x-c}{1+c}\right| \leqslant |x|.$$

Следовательно остаток ряда Тейлора для $|x| \leqslant q < 1$ оценивается

$$|R_n(\ln(1+x))| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{1-q} \to 0, \quad (n \to +\infty),$$

поэтому справедливо разложение в бесконечный ряд на интервале $x \in (-1; 1)$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}, \quad |x| < 1$$

П р и м е р 3.3.6. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

Найдём её ряд Тейлора

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} = \lim_{t\to\infty} te^{-t^2} = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^{t^2}} = 0$$

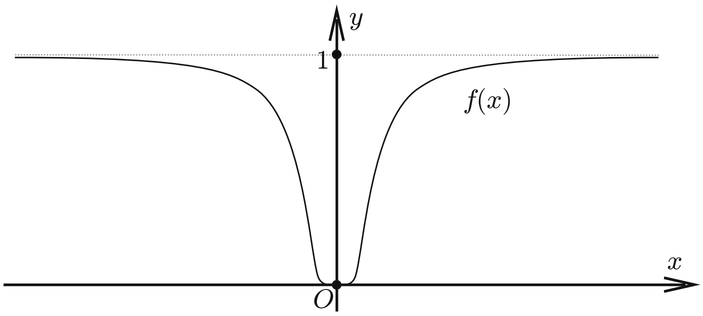


Рис. 3.9: График функции $e^{-x^{-2}}$.

Откуда вытекает, что $f'(0) = 0$.

Найдём производные функции $f(x)$ в точке отличной от нуля:

$$f'(x) = 2x^{-3}e^{-x^{-2}},$$
$$f''(x) = 2(2-3x^2)x^{-6}e^{-x^{-2}},$$
$$f'''(x) = 2^2(2-9x^2+6x^4)x^{-9}e^{-x^{-2}}.$$

По индукции несложно доказать, что $f^{(k)}(x) = \frac{P_{2k-2}(x)}{x^{3k}}e^{-x^{-2}}$, где $P_{2k-2}(x)$ — полином степени $2k-2$. Докажем, что производные $f^{(k)}(0) = 0$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Проведём доказательство по индукции. Для $k = 1$ уже доказано, докажем, что если $f^{(k)}(0) = 0$, то и $f^{(k+1)}(0) = 0$. Справедливо равенство

$$f^{(k+1)}(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(k)}(h) - f^{(k)}(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{P_{2k-2}(h)}{h^{3k+1}}e^{-h^{-2}}.$$

При замене $t = 1/h \to \infty$ (при $t \to 0$), получаем $P_{2k-2}(h) = \frac{P^*_{2k-2}(t)}{t^{2k-2}}$, где $P^*_{2k-2}(x)$ — полином степени не выше чем $2k-2$. Поэтому

$$f^{(k+1)}(0) = \lim_{t\to\infty} t^{3k+1} \cdot \frac{P^*_{2k-2}(t)}{t^{2k-2}}e^{-t^2} = \lim_{t\to\infty} t^{k+3} \cdot P^*_{2k-2}(t)e^{-t^2} = 0.$$

Таким образом разложение в ряд Тейлора принимает вид:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R_n(f, x, x_0) = R_n(f, x, x_0).$$

Т.е. остаток совпадает с самой функцией и к нулю с ростом n не стремится ни в одной точке, кроме нуля, конечно. Поэтому данная функция, хоть она и класса $C^\infty(\mathbb{R})$, не представима своим бесконечным рядом Тейлора только в единственной точке $x = 0$. Действительно, бесконечным рядом Тейлора для $f(x)$ — тождественный ноль:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \equiv 0.$$

3.3.2 Остаток в форме Пеано для формулы Тейлора.

Теорема 3.3.2. *Пусть функция $f(x)$ такова, что $\exists f(x_0), f'(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$, то*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n), x \to x_0.$$

Доказательство. Приведём два различных доказательства

I. Способ доказательства.

Лемма 10. *Пусть для функции* $\varphi(x)$ *выполнено:* $\varphi(x) \in D^n(x_0)$ *и* $\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \dots = \varphi^{(n)}(x_0) = 0$. *Тогда*

$$\varphi(x) = o(x - x_0)^n, \quad x \to x_0.$$

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции

1. Пусть $n = 1$. Тогда утверждение следует из определения дифференцируемости в точке:

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \to x_0.$$

Поскольку в этом случае $\varphi(x) = o(x - x_0)$.

2. Предположим, что утверждение теоремы верно для $n = k$.

3. Докажем для утверждение для $n = k + 1$. Для этого воспользуемся предположением индукции для функции $\varphi'(x)$. Поскольку

$$\varphi'(x_0) = (\varphi')'(x_0) = \dots = (\varphi')^k(x_0) = 0,$$

то согласно индуктивному предположению $\varphi'(x) = o(x - x_0)^k, \quad x \to x_0$. Заметим, что из существования $\varphi^{(k)}(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{\varphi^{(k-1)}(x) - \varphi^{(k-1)}(x_0)}{x - x_0}$ вытекает, что существует и определена, в хоть сколь угодно малой окрестности точки x_0 функция $\varphi^{(k-1)}(x)$. А потому мы можем считать, что существует окрестность точки x_0 в которой $\varphi(x)$ дифференцируема. Тогда теореме Лагранжа в этой окрестности имеем:

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi'(c)(x - x_0)$$
$$|\varphi(x)| \leqslant |\varphi'(c)(x - x_0)| = |(c - x_0)^k o(1)| \cdot |x - x_0| \leqslant |o(1)| \cdot |x - x_0|^{k+1}$$

□

Доказательство теоремы. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k. \tag{3.3.3}$$

Для которой выполнены условия леммы. Действительно,

$$\begin{aligned} &\varphi(x_0) = 0 \\ &\varphi'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0 \\ &\vdots \\ &\varphi^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x_0) = 0 \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

Остаётся применить доказанную лемму. □

II. Способ доказательства. Воспользуемся $n - 1$ -раз правилом Бернулли-Лопиталя (см. теорему 3.7.1) для функции $\varphi(x)$, определённой в (3.3.3)

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0} \frac{\varphi(x)}{(x - x_0)^n} &= \lim_{x\to x_0} \frac{\varphi'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \ldots = \lim_{x\to x_0} \frac{\varphi^{(n-1)}(x)}{n!(x - x_0)} = \\ &= \frac{1}{n!}\left(\lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)}\right) = \\ &= \frac{1}{n!}\left(\lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{(x - x_0)} - f^{(n)}(x_0)\right) = \frac{1}{n!}\left(f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)\right) = 0. \end{aligned}$$

Мы должны обосновать применимость правила Бернулли-Лопиталя $n - 1$ -раз. Неопределённость $\frac{0}{0}$ на каждом шаге вытекает из определения функции $\varphi(x)$ и равенств (3.3.4). Дифференцируемость $n-1$ - раз функции $(x-x_0)^n$ в проколотой окрестности точки x_0 очевидна, а функции $\varphi(x)$ вытекает из того, что существование $\varphi^{(k)}(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{\varphi^{(k-1)}(x)-\varphi^{(k-1)}(x_0)}{x-x_0}$ влечёт существание и определённость, в хоть сколь угодно малой окрестности точки x_0 функции $\varphi^{(k-1)}(x)$. Свойство о том, что функция $g(x) = (x-x_0)^n$ имеет отличные от нуля все производные до $n-1$ — порядка включительно в проколотой окрестности точки x_0 — очевидны.

□

П р и м е р 3.3.7. Написать первые семь членов разложения в ряд по степеням x функции $f(x) = e^{\operatorname{arctg} x}$ в точке $x=0$.

Найдём первую производную:

$$f'(x) = e^{\operatorname{arctg} x}/(1+x^2).$$

Откуда

$$(1+x^2)f'(x) = f(x).$$

Продифференцируем, использую правило Лейбница, последнее равенство $(n-1)$ раз. Получим

$$(1+x^2)f^{(n)}(x) + 2(n-1)xf^{(n-1)}(x) + (n-1)(n-2)f^{(n-2)}(x) = f^{(n-1)}(x).$$

Откуда получаем рекурентное соотношение на производные в нуле:

$$f^{(n)}(0) = f^{(n-1)}(0) - (n-1)(n-2)f^{(n-2)}(0).$$

Следовательно

$$\begin{aligned}
&f(0) = 1,\\
&f'(0) = 1,\\
&f''(0) = f'(0) = 1,\\
&f'''(0) = f''(0) - 2f'(0) = -1,\\
&f^{(4)}(0) = f'''(0) - 6f''(0) = -7,\\
&f^{(5)}(0) = f^{(4)}(0) - 12f'''(0) = 5,\\
&f^{(6)}(0) = f^{(5)}(0) - 20f^{(4)}(0) = 145,\\
&f^{(7)}(0) = f^{(6)}(0) - 30f^{(5)}(0) = -5,
\end{aligned}$$

Ряд Тейлора в нуле имеет вид:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{7} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^7) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{7x^4}{24} + \frac{x^5}{24} + \frac{29x^6}{144} - \frac{x^7}{1008} + o(x^7),\ x \to 0.$$

П р и м е р 3.3.8. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x) = \sin x$ в точке $x_0 = \pi/4$. Поскольку нами изучены разложения в нуле, то сведём к разложению в нуле, сделав замену переменного $t = x - \pi/4$, тогда если x находится в окрестности $\pi/4$, то t будет в окрестности 0.

$$\begin{aligned}
\sin x &= \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin t + \cos t) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + t - \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^6}{6!} - \frac{t^7}{7!} + \frac{t^8}{8!} + \frac{t^9}{9!} + \dots\right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{n!}t^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{\sqrt{2}\cdot n!}(x-\pi/4)^n.
\end{aligned}$$

Поскольку мы использовали ряды для $\sin t$, $\cos t$, которые сходятся на всей чиловой прямой, то и полученный ряд также будет представлять исходную функцию всюду на вещественной оси (и даже в комплексной области).

П р и м е р 3.3.9. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x) = \ln x$ в точке $x_0 = 10$. Поскольку нами изучены разложения в нуле, то нам надо свести к разложению в нуле. Поскольку

$$\ln x = \ln 10 + \ln \frac{x}{10} = \ln 10 + \ln\left(1 + \left(\frac{x}{10} - 1\right)\right),$$

то сделав замену переменного $t = x/10 - 1$, мы добъемся того, что если x находится в окрестности 10, то t будет в окрестности 0. Поэтому

$$\begin{aligned}\ln x = \ln 10 + \ln\left(1 + \left(\frac{x}{10} - 1\right)\right) &= \ln 10 + \ln(1+t) = \\ = \ln 10 + t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^6}{6} + \frac{t^7}{7} - \frac{t^8}{8} + \frac{t^9}{9} + \dots &= \\ = \ln 10 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} t^n = \ln 10 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{10^n \cdot n}(x-10)^n.\end{aligned}$$

Поскольку мы использовали ряд для $\ln t$, который сходится на множестве $(-1; 1)$, то тогда полученный ряд будет сходится на множестве $\left|\frac{x}{10} - 1\right| < 1$, т.е. при $x \in (0; 20)$.

П р и м е р 3.3.10. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x) = \sin(\sin x)$ в точке $x_0 = 0$ с точностью до $O(x^9)$. Поскольку данная функция нечётная (см. рис. 3.10), то её ряд Тейлора будет иметь в разложении коэффициенты только по нечётным степеням. Используя разложение

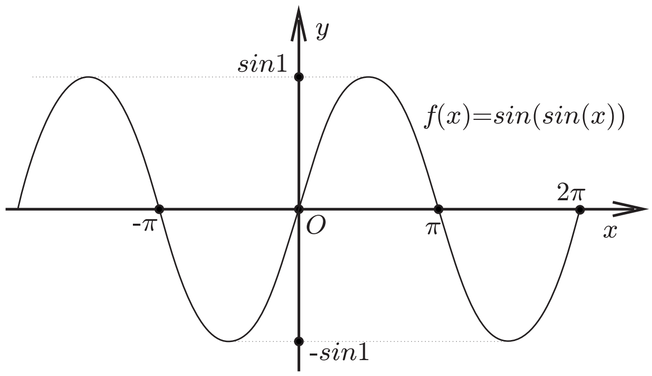


Рис. 3.10: График функции $f(x) = sin(sinx)$.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + O(x^9), \quad x \to 0,$$

сделаем замену переменного $u = \sin x$. Если x находится в окрестности 0, то и $u = \sin x$ будет в окрестности 0. Поэтому мы можем в разложение $\sin u$ использовать разложение в нуле.

$$\begin{aligned}\sin(\sin x) = \sin(\sin x) = \sin u &= \\ = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \frac{u^7}{7!} + O(u^9), &\quad u \to 0.\end{aligned}$$

Теперь вернемся к переменнной x

$$\begin{aligned}u &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + O(x^9), \\ u^3 &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + O(x^9)\right)^3 = x^3 - 3\cdot\frac{x^5}{3!} + \left(3\cdot\frac{1}{(3!)^2} + 3\cdot\frac{1}{5!}\right)x^7 + O(x^9), \\ u^5 &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + O(x^9)\right)^5 = x^5 - 5\cdot\frac{x^7}{3!} + O(x^9), \\ u^7 &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + O(x^9)\right)^7 = x^7 + O(x^9), \\ O(x^9) &= O(u^9).\end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned}\sin(\sin x) &= x + \left(-\frac{1}{3!} - \frac{1}{3!}\right)\cdot x^3 + \\ &+ \left(\frac{1}{5!} + \frac{3}{3!\cdot 3!} + \frac{1}{5!}\right)\cdot x^5 + \left(-\frac{1}{7!} - \frac{3}{(3!)^3} - \frac{3}{5!\cdot 3!} - \frac{5}{3!\cdot 5!} - \frac{1}{7!}\right)\cdot x^7 + O(x^9) = \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{8x^7}{315} + O(x^9), \quad x\to 0.\end{aligned}$$

П р и м е р 3.3.11. Разложить в ряд Тейлора функцию $\operatorname{tg} x$ в точке $x_0 = 0$ с точностью до $O(x^9)$. Для этого поделим $\sin x$ на $\cos x$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \ldots}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \ldots}.$$

Проведём деление стоолбиком

$$\begin{array}{rrrr|l} x - \frac{x^3}{6} & + \frac{x^5}{120} & - \frac{x^7}{5040} & + \cdots + & 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \cdots + \\ \cline{5-5} x - \frac{x^3}{2} & + \frac{x^5}{24} & - \frac{x^7}{720} & & x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots + \\ \cline{1-3} \frac{x^3}{3} & - \frac{x^5}{30} & + \frac{x^7}{840} & & \\ \frac{x^3}{3} & - \frac{x^5}{6} & + \frac{x^7}{72} & & \\ \cline{1-3} & \frac{2x^5}{15} & - \frac{4x^7}{315} & & \\ & \frac{2x^5}{15} & - \frac{x^7}{15} & & \\ \cline{2-3} & & \frac{17x^7}{315} & & \end{array}$$

Нами получено разложение

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + O\left(x^9\right), \quad x\to 0.$$

3.3.3 Приближённые вычисления.

Поставим задачу вычислить, например, $\sqrt[10]{1000}$ с точностью до $0,001$. Для её решения естественно применить разложение

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}x^n + \\ \frac{a(a-1)\ldots(a-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\theta x)^{a-n-1}, 0<\theta<1,$$

в котором $a = \frac{1}{10}$. Разумеется считать, что $x = 999$ не стоит — это не приведёт нас к желаемому результату, так как остаточный член $\frac{a(a-1)\ldots(a-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\theta x)^{a-n-1}, 0<\theta<1$ при $a = \frac{1}{10}$, не стремится к 0 при $n\to\infty$. Поэтому сначала преобразуем вычисляемую величину удобным образом. Учтём, что $2^{10} = 1024$. Следовательно, $\sqrt[10]{1000} = 2\sqrt[10]{\frac{1000}{1024}} = 2\left(1 - \frac{24}{1024}\right)^{1/10} = 2\left(1 - \frac{3}{128}\right)^{1/10}$. Поэтому мы будем пользоваться приведённым выше разложением при $x = -\frac{3}{128}$. Прежде всего, установим при каком n наши вычисления дадут требуемую точность. Это означает, что мы должны найти такое n, что

$$\left|2\frac{\left(\frac{1}{10}-1\right)\dots\left(\frac{1}{10}-n\right)}{10(n+1)!}\left(-\frac{3}{128}\right)^{n+1}\left(1-\theta\frac{3}{128}\right)^{1/10-n-1}\right| < 0.001.$$

Нам необязательно искать наименьшее возможное значение n, поэтому можно немного упростить это неравенство. Так как для любого k выполняется неравенство $\left|\frac{1}{10}-k\right| < k$, достаточно найти такое n, что

$$\left|\frac{2}{10(n+1)}\left(-\frac{3}{128}\right)^{n+1}\left(1-\theta\frac{3}{128}\right)^{1/10-n-1}\right| < 0.001.$$

Далее,

$$\left|\left(1-\theta\frac{3}{128}\right)^{1/10-n-1}\right| < \left|\left(1-\frac{3}{128}\right)^{1/10-n-1}\right| < \left|\left(1-\frac{3}{128}\right)^{-n-1}\right| = \left(\frac{125}{128}\right)^{-n-1} = \left(\frac{128}{125}\right)^{n+1}.$$

Эти неравенства, возможно, требуют пояснений. В первом из них мы уменьшили число, которое возводится в отрицательную степень, тем самым получив большее число. Следующее неравенство получено так: степень, в которую возводится меньшее 1 число, уменьшается. В результате снова получено большее число. Таким образом, неравенство $\left|\frac{2}{10(n+1)}\left(-\frac{3}{128}\right)^{n+1}\left(1-\theta\frac{3}{128}\right)^{1/10-n-1}\right| < 0.001.$ будет следовать из неравенства $\left|\frac{2}{10(n+1)}\left(-\frac{3}{128}\right)^{n+1}\right| < 0.001.$. Уже при $n = 1$ мы получаем в левой части этого неравенства число $\left|\frac{2}{10*2}\frac{9}{(125)^2}\right| < \frac{1}{(125)^2} < 0.001$. Поэтому искомым приближением к $\sqrt[10]{1000}$ служит величина $2(1+\frac{1}{10}\left(-\frac{3}{128}\right))$.

3.4 Необходимые и достаточные условия существования экстремума.

Пример 3.4.1. Функция $f(x) = |x| \notin D(0)$, но при этом 0 — точка локального минимума.

Пример 3.4.2. Функция $f(x) = x^3$. Её производная $f'(x) = 3x^2$ в нуле обращается в ноль, но при этом $x = 0$ — не является точкой экстремума.

Пример 3.4.3. Рассмотрим функцию (см. рис 3.11)

$$f(x) = \begin{cases} x^2(2+\sin\frac{1}{x}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Данная функция дифференцируема в нуле и её производная равна 0. Точка $x = 0$ — точка локального мини-

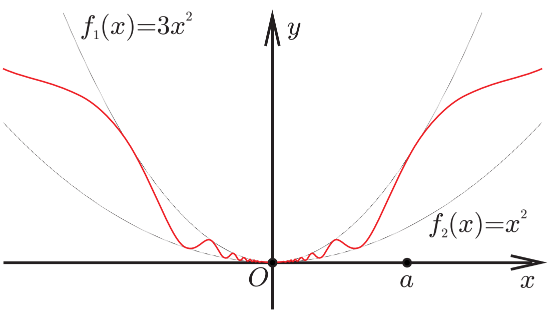


Рис. 3.11: График функции $x^2(2+\sin\frac{1}{x})$.

мума. При этом в любой окрестности нуля $U_\delta(0)$ функция $f(x)$ не сохраняет знак у производной, поскольку

$$f'(x) = 2x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right) - x^2\cos\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2} = 2x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right) - \cos\frac{1}{x}.$$

Теорема 3.4.1. *Пусть* $f \in D(a;b)$. *Тогда*

- $f'(x) \geqslant 0,\ \forall x \in (a,b) \Longleftrightarrow f(x)$ — *неубывает на* (a,b);
- $f'(x) \leqslant 0,\ \forall x \in (a,b) \Longleftrightarrow f(x)$ — *невозрастает на* (a,b).

Причем, если

- $f' > 0$ *на* $(a,b) \Rightarrow f(x)$ — *возрастает на* $(a,b) \Rightarrow f'(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in (a,b)$;
- $f' < 0$ *на* $(a,b) \Rightarrow f(x)$ — *убывает на* $(a,b) \Rightarrow f'(x) \leqslant 0 \quad \forall x \in (a,b)$.

Доказательство. Докажем третье утверждение.
A) Пусть $x_1 < x_2$. Тогда по теореме Лагранжа существует $c \in (a,b)$ такое, что

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1) \Rightarrow f \text{ - возрастает}$$

B) Пусть $x_0 \in (a,b)$. Тогда

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0.$$

$$x > x_0 \quad \frac{+}{+} \geqslant 0$$

$$x < x_0 \quad \frac{-}{-} \geqslant 0$$

Следовательно $f'(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in (a,b)$.
Все остальные утверждения доказываются аналогично. □

Теорема 3.4.2 (Необходимые условия существования экстремума)**.** *Пусть* x — *точка* extr *для* $f(x)$. *Тогда либо* $f \notin D(x_0)$, *либо* $f \in D(x_0)$ *и* $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. См. теорему Ферма □

Теорема 3.4.3 (Достаточные условия существования экстремума)**.** *Пусть* $f \in D(\mathcal{U}(x_0))$. *Тогда*

$$\left.\begin{aligned} 1) f'(x) > 0 \text{ в } \mathring{\mathcal{U}}^-(x_0) \\ f'(x) < 0 \text{ в } \mathring{\mathcal{U}}^+(x_0) \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_0 - loc\max$$

$$\left.\begin{aligned} 2) f'(x) < 0 \text{ в } \mathring{\mathcal{U}}^- \\ f'(x) > 0 \text{ в } \mathring{\mathcal{U}}^+ \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_0 - loc\min$$

$$\left.\begin{aligned} 3) f'(x) > 0 \text{ в } \mathring{\mathcal{U}}^-(x_0) \text{ и } f'(x) > 0 \text{ в } \mathring{\mathcal{U}}^+(x_0) \\ f'(x) < 0 \text{ в } \mathring{\mathcal{U}}^+(x_0) \text{ и } f'(x) < 0 \text{ в } \mathring{\mathcal{U}}^-(x_0) \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_0 \text{ - не является точкой экстремума}$$

Доказательство. 1) По предыдущей теореме

$$\forall x \in \mathring{\mathcal{U}}^-(x_0) : f(x) < f(x_0)$$

$$\forall x \in \mathring{\mathcal{U}}^+(x_0) : f(x) < f(x_0)$$

2) Аналогично 3) По предыдущей теореме

$$\left.\begin{aligned} \forall x \in \mathring{\mathcal{U}}^-(x_0) : f(x) < f(x_0) \\ \forall x \in \mathring{\mathcal{U}}^+(x_0) : f(x) > f(x_0) \end{aligned}\right\} \Rightarrow extr \text{ нет}$$

□

Теорема 3.4.4 (Достаточные условия существования экстремума)**.** *Пусть у функции $f(x)$ существуют все производные до n – го порядка включительно в точке x_0. Известно, что $f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ и $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда*

- *если n — нечетно, то x_0 — не является точкой экстремума;*
- *если n - четно, то:*
  1. $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow loc \min$ *в* x_0*;*
  2. $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow loc \max$ *в* x_0.

Доказательство. Из разложения в ряд Тейлора с остатком в виде Пеано, получаем

$$f(x) - f(x_0) = f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!} + o(x-x_0)^n, \quad x \to x_0 \Longleftrightarrow$$
$$f(x) - f(x_0) = (x-x_0)^n \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1)\right), \quad x \to x_0.$$

Откуда

$$\operatorname{sign}(f(x) - f(x_0)) = \operatorname{sign}(x-x_0)^n \operatorname{sign}(f^{(n)}(x_0)), \quad \forall x \in U_\delta(x_0)$$

Далее рассматриваем изменение функции при четном и нечетном n. □

П р и м е р 3.4.4. Рассмотрим функцию $f(x) = x^5$. Поскольку

$$f'(0) = f''(0) = f'''(0) = f^{(4)}(0) = 0 \quad f^{(5)}(0) = 5! = 120,$$

то, так как $n = 5$ — нечетно, экстремума в точке 0 нет.

3.5 Неравенства Юнга, Гельдера, Минковского.

Лемма 11. *Для любого $x \geqslant 0$ выполнено*

$$\begin{aligned} &1) \quad x^\alpha - \alpha x \leqslant 1 - \alpha, \alpha \in (0,1),\\ &2) \quad x^\alpha - \alpha x \geqslant 1 - \alpha, \alpha \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty). \end{aligned}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(x) = (x^\alpha - \alpha x) - (1-\alpha)$ (см. рис. 3.12-3.14). Тогда $f'(x) = \alpha(x^{\alpha-1} - 1)$.

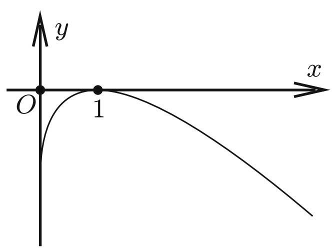


Рис. 3.12: $\alpha \in (0,1)$

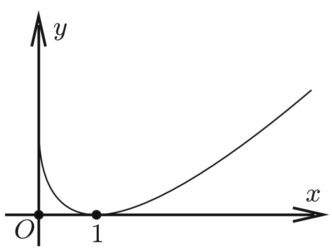


Рис. 3.13: $\alpha > 1$

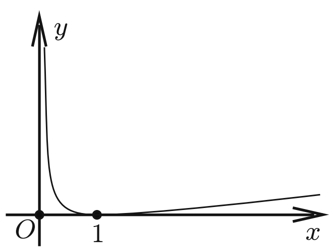


Рис. 3.14: $\alpha < 0$

1) Пусть $\alpha \in (0,1)$. Тогда $x = 1$ — точка локального максимума. Поэтому для $x \geqslant 0$ выполнено $f(x) \leqslant f(1) = 0$.

2)Аналогично. □

Теорема 3.5.1 (Неравенство Юнга). *Пусть* $a, b > 0$, $p \neq 0, 1$, $q \neq 0, 1$ *и выполнено* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Тогда*

$$a^{\frac{1}{p}} \cdot b^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{q}, \quad p \in (1; +\infty),$$
$$a^{\frac{1}{p}} \cdot b^{\frac{1}{q}} \geqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{q}, \quad p \in (-\infty; 0) \cup (0; 1).$$

Доказательство. Положим $x = \frac{a}{b}$, $\alpha = \frac{1}{p}$ в лемму 11:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p}} - \frac{1}{p} \cdot \frac{a}{b} \leqslant \frac{1}{q}.$$

После домнажения на b, получаем

$$a^{\frac{1}{p}} \cdot b^{1-\frac{1}{p}} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

□

Замечание 31. При помощи интегрального исчесления, неравенство Юнга для $p \geqslant 1$ можно было бы получить следующим образом. Рассмотрим функцию $x^{p-1}, p > 1$ (см. рис. 3.15 и 3.16).

Тогда сумма площадей под графиками функций $f(x)$ на отрезке $[0; a]$ и $f^{-1}(y)$ на отрезке $[0; b]$ меньше либо равна, чем ab. Действительно,

$$ab \leqslant \int\limits_0^a x^{p-1} dx + \int\limits_0^b y^{q-1} dx = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Здесь мы использовали то, что обратная функция к $y = x^{p-1}$ будет $x = y^{1/(p-1)}$ или $x = y^{q-1}$. Поскольку в нашем случае $(p-1)(q-1) = 1$.

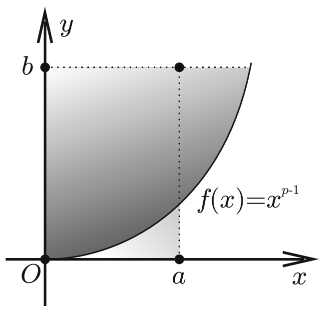


Рис. 3.15: $p \geqslant 2$

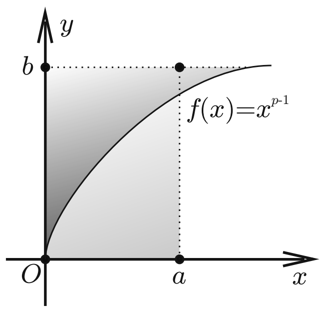


Рис. 3.16: $1 < p < 2$

Теорема 3.5.2 (Неравенства Гельдера). *Пусть* $x_k, y_k \geqslant 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *где* $p \neq 0, 1$, $q \neq 0, 1$. *Тогда*

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{\frac{1}{q}}, \quad p > 1,$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{\frac{1}{q}}, \quad p \in (-\infty; 0) \cup (0; 1).$$

Доказательство. Докажем первое неравенство. Положим $a = \dfrac{x_k^p}{X}$, $b = \dfrac{y_k^p}{Y}$, где $X = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^p$, $Y = \sum\limits_{k=1}^{n} y_k^q$. Пусть для определённости $p > 1$. Воспользуемся неравенсвтом Юнга:

$$\frac{x_k y_k}{X^{\frac{1}{p}} Y^{\frac{1}{q}}} \leqslant \frac{x_k^p}{pX} + \frac{y_k^q}{qY},$$

Просуммируем последнии неравеснвта для всех $k = 1, \ldots, n$.

$$\frac{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)}{X^{\frac{1}{p}} Y^{\frac{1}{q}}} \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Второе неравенство доказывается аналогично. □

Теорема 3.5.3 (Неравенство Минковского). *Пусть* $x_k, y_k \geqslant 0$. *Тогда*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad p \geqslant 1,$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad p < 1, p \neq 0.$$

Доказательство. Поскольку случай $p = 1$ очевиден, то разберём оставшиеся случаи. Начнём с $p > 1$. (Случай $p < 1, p \neq 0$ отличается только знаком в другую сторону в неравенстве). Т.к. в случае, когда $x_k = y_k = 0$ для всех $k = 1, \ldots, n$ теорема очевидна, то будем предполагать, что x_k, y_k таковы, что хотя бы при некоторм $k = 1, \ldots n$ выполнено $x_k + y_k > 0$.

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p = \sum_{k=1}^{n} x_k (x_k + y_k)^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} y_k (x_k + y_k)^{p-1} \leqslant$$

Применим к каждой из сумм неравенство Гёльдера с $\left(\frac{1}{q} = \frac{p-1}{p}\right)$.

$$\leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

Далее необходимо разделить на общий множитель. □

3.6 Направление вогнутости. Точки перегиба.

Определение 3.6.1 (Выпуклость (a, b)). Пусть константы α_1, α_2 удовлетворяют условиям

$$\forall \alpha_1, \alpha_2 \geqslant 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1.$$

Если для любых x_1, x_2 таких, что $x_1 < x_2 \in (a, b)$ выполнено неравенство

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2),$$

то говорят, что функция $f(x)$ *выпукла вниз* на (a, b).

Если знак направлен в другую сторону, называется *вогнутостью или выпуклостью вверх*. Если потребывать, чтобы в определении выпуклости $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ и выполнялось сторогое неравенство, т.е.

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) < \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2),$$

то будем говорить, что функция $f(x)$ *строго выпукла* на (a, b).

Геометрически определение выпуклой вниз функции означает, что если мы соеденяем любые две точки $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$, где $x_1, x_2 \in (a, b)$, отрезком, то все значения функции $f(x)$ для $x \in [x_1, x_2]$ ($x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, $\alpha_1, \alpha_2 \geqslant 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$) лежат не выше этого отрезка, т.е. $f(x) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$) (см. рис. 3.17).

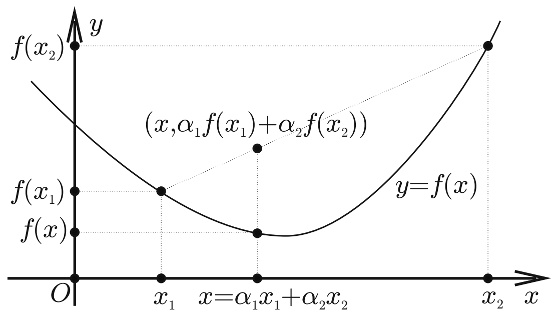


Рис. 3.17: График функции выпуклой вниз.

Обозначим $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$. Тогда найдём α_1, α_2 из следующей системы:

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = x \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \\ \alpha_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \end{cases}$$

Следовательно условие $f(\alpha x_1 + \alpha_2 x_2) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$ равносильно

$$f(x) \leqslant f(x_1)\left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}\right) + f(x_2)\left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right).$$

Выражение, стоящее слева неравенства — уравнение прямой, проходящей через точки $(x_1; f(x_1))$ и $(x_2; f(x_2))$.

Утверждение 3.6.1 (критерий выпуклости)**.**

$$1) \begin{pmatrix} f \text{ - } \textit{выпукла вниз} \\ \textit{на } (a, b) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \\ \forall x_1, x, x_2 \in (a, b): \ x_1 < x < x_2 \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} f \text{ - } \textit{строго выпукла} \\ \textit{на } (a, b) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \\ \forall x_1, x, x_2 \in (a, b): \ x_1 < x < x_2 \end{pmatrix}$$

Доказательство. Докажем первое утверждение

$$f(x) \leqslant \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

Домножим обе части неравенства на положительную величину $x_2 - x_1$ и представим $x_2 - x_1 = (x_2 - x) + (x - x_1)$. Тогда

$$((x_2 - x) + (x - x_1))f(x) \leqslant (x_2 - x)f(x_1) + (x - x_1)f(x_2) \Longleftrightarrow$$
$$(x_2 - x)(f(x) - f(x_1)) \leqslant (x - x_1)(f(x_2) - f(x)) \Longleftrightarrow$$
$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Второе доказывается аналогично. □

Теорема 3.6.2. *Пусть* $f \in D(a,b)$. *Тогда*

1. f *— выпукла вниз* $\Leftrightarrow f'$ *не убывает на* (a,b)*;*

2. f *— строго выпукла вниз* $\Leftrightarrow f'$ *возрастает на* (a,b)*;*

3. f *— выпукла вверх* $\Leftrightarrow f'$ *не возрастает на* (a,b)*;*

4. f *— строго выпукла вверх* $\Leftrightarrow f'$ *убывает на* (a,b).

Доказательство. Докажем первое утверждение.

$\Longrightarrow$ Пусть $x_1 < x < x_2 \in (a,b)$.

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

Теперь поочереди устремляя, сначало $x \to x_2$, а затем $x \to x_1$, получаем

$$x \to x_2 \quad \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant f'(x_2),$$
$$x \to x_1 \quad f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

Таким образом получили, что для произвольных $x_1 < x_2 \in (a,b)$ будет выполнено $f'(x_1) \leqslant f'(x_2)$.

$\Longleftarrow$ Пусть $x_1 < x < x_2 \in (a,b)$. Тогда, использую теорему Лагранжа получаем

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(c_1) \leqslant f'(c_2) = \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x},$$

где $x_1 < c_1 < x < c_2 < x_2$. □

Из предыдущей теоремы и теремы 3.4.1, сразу вытекает:

Теорема 3.6.3. *Пусть* $f \in D^2(a,b)$. *Тогда*

- f *— выпукла вниз* $\Leftrightarrow f'' \geqslant 0$ *на* (a,b)*;*
- f *— выпукла вверх* $\Leftrightarrow f'' \leqslant 0$ *на* (a,b).

Причем, если

- $f'' > 0$ *на* $(a,b) \Rightarrow f(x)$ *— строго выпукла вниз на* $(a,b) \Rightarrow f''(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in (a,b)$*;*
- $f'' < 0$ *на* $(a,b) \Rightarrow f(x)$ *— строго выпукла вверх на* $(a,b) \Rightarrow f''(x) \leqslant 0 \quad \forall x \in (a,b)$.

Напомним, что уравнение касательной к дифференцируемой функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ записывается в виде $y_{\text{кас}}(x,x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$.

Теорема 3.6.4. *Пусть* $f(x) \in D(a,b)$. *Тогда*

1. f *— выпукла вниз на* $(a,b) \Leftrightarrow f(x) \geqslant y_{кас}(x,x_0); \forall x \in (a,b) \;\; \forall x_0 \in (a,b)$*;*

2. f *— выпукла вверх на* $(a,b) \Leftrightarrow f(x) \leqslant y_{кас}(x,x_0); \forall x \in (a,b) \;\; \forall x_0 \in (a,b)$*;*

3. f *— строго выпукла вниз на* $(a,b) \Leftrightarrow f(x) > y_{кас}(x,x_0); \forall x \in (a,b) \;\; \forall x_0 \in (a,b), \;\; x \neq x_0$*;*

4. f *— строго выпукла вверх на* $(a,b) \Leftrightarrow f(x) < y_{кас}(x,x_0); \forall x \in (a,b) \;\; \forall x_0 \in (a,b), \;\; x \neq x_0$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ Нужно установить справедливость следующего неравенства

$$f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

или что равносильно

$$f(x) - f(x_0) \geqslant f'(x_0)(x - x_0).$$

Предположим, что $x > x_0$. Тогда, используя теорему 3.6.2, получаем

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c) \geqslant f'(x_0)$$

$$\text{случай } x < x_0 \text{ аналогично}$$

$$\Leftarrow$$

$$f(x) \geqslant y_{\text{кас}}(x, x_0)$$

$$f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$f(x) - f(x_0) \geqslant f'(x_0)(x - x_0)$$

$$x_1 < x_0 < x_2$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \geqslant f'(x_0) \geqslant \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \Rightarrow \text{функция выпукла вниз}$$

□

Таким образом для дифференцируемой функции проверять выпуклость можно по расположению касательных (см. рис. 3.18, 3.19).

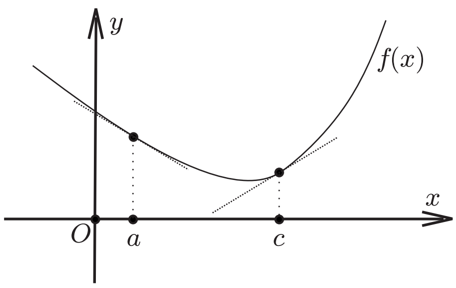


Рис. 3.18: Функция выпуклая вниз.

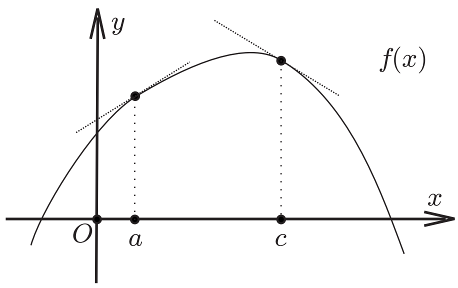


Рис. 3.19: Функция выпуклая вверх.

3.6.1 Точки перегиба

Определение 3.6.2. Точку кривой $(x_0; f(x_0))$, называют точкой перегиба, если она отделяет участок кривой, где функция выпукла вверх, от участка кривой, где функция выпукла вниз.

Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$, то по теореме 3.6.2 в некоторой окрестности абсциссы $x_0 \in (a; b)$ точки перегиба её производная либо возрастает (неубывает) слева от точки $x_0 \in (a; b)$, а справа от неё убывает (невозрастает), либо — наоборот (см. рис. 3.20). В первом случае рассматриваемая точка будет точкой максимума производной $f'(x)$, во втором случае — точкой минимума. Если предположить существование $f''(x_0)$, то по теореме Ферма, применённой к функции $f'(x)$, получим: $f''(x_0) = 0$. Это условие играет такую же роль в отношении точек перегиба, какую играло условие $f'(x_0) = 0$ в отношении точек экстремума, т.е. оно является необходимым, но не достаточным. Действительно, функция $f(x) = x^4$, очевидно, выпукла вниз, но её вторая производная, равная $12x^2$, обращается в ноль при $x = 0$.

Достаточное условие точки перегиба даёт следующее правило, вытекающее из теоремы 3.4.3:

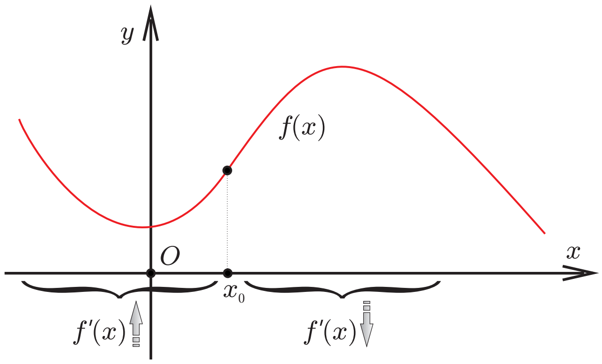


Рис. 3.20: x_0 — точка перегиба и точка максимума для $f'(x)$.

Теорема 3.6.5. *Если $f(x) \in D^2(\mathcal{U}(x_0))$ и при переходе через значение x_0 вторая производная меняет знак, то x_0 — точка перегиба. Если же знак не меняется, то перегиба нет.*

Используя формулу Тейлора, так же, как при исследовании функции на экстремум, можно доказать следующее утверждение:

Теорема 3.6.6. *Пусть у функции $f(x)$ существуют все производные до n – го порядка включительно в точке x_0. Известно, что $f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ и $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда*

- *если n — нечетно, то в точке x_0 — перегиб;*
- *если n - четно, то в точке x_0 — перегиба нет.*

Доказательство. Из разложения в ряд Тейлора с остатком в виде Пеано, получаем

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!} + o(x-x_0)^n, \quad x \to x_0 \Longleftrightarrow$$
$$f(x) - y_{\text{кас}}(x, x_0) = (x - x_0)^n \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1)\right), \quad x \to x_0.$$

□

3.6.2 Зависимость спроса от дохода. Функции Торнквиста.

Теоретическая модель:

$$y = f(x) + \epsilon,$$

где y — объём спроса одного потребителя, x — доход потребителя, ϵ — влияние на спрос факторов, не связанных с доходом. Для простоты мы будем расматривать модель в предположении, что нет влияние на спрос факторов, не связанных с доходом, т.е. $\epsilon = 0$.

График функции $y = f(x)$ называется *кривой Энгеля.*

Рассмотрим функции Торнквиста[4]:

- **Для товаров первой необходимости**

$$y = \frac{ax}{x+c}, \quad a > 0, \quad c > 0, \quad x > 0.$$

Спрос возникает при любом доходе и имеет уровень насыщения a.

[4] В своей работе Торнквист рассматривал параметр c разных знаков, но мы для определённости будем рассматривать только положительные значения параметра c.

- **Для товаров второй необходимости**

$$y = \frac{a(x-b)}{x-c}, \quad a > 0, \quad b > c > 0, \quad x > c.$$

  Спрос возникает при доходе, превышающем b (считаем $b > 0$), и имеет уровень насыщения a.

- **Для предметов роскоши**

$$y = \frac{ax(x-b)}{x-c}, \quad a > 0, \quad b > c > 0, \quad x > c.$$

  Спрос возникает при доходе, превышающем b, и является ненасыщаемым.

Разберем графики функций Торнквиста более подробно.

Пример 3.6.1 (Для товаров первой необходимости)**.** Поскольку график функции

$$y = \frac{ax}{x-c}, \quad a > 0, \quad c > 0, \quad x > 0,$$

является частным случаем следующего графика (см. рис. 3.22) при $b = 0$, то предоставим читателю самостоятельно провести исследовании и получить следующую картинку (см. рис. 3.21).

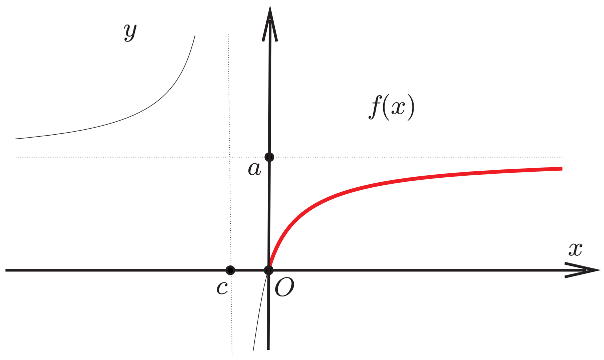


Рис. 3.21: Функция Торнквиста.

Пример 3.6.2 (Для товаров второй необходимости)**.** Построим график функции

$$y = \frac{a(x-b)}{x-c}, \quad a > 0, \quad b > c > 0, \quad x > c.$$

1. Область определения функции $x \in (-\infty; c) \cup (c; +\infty)$.

2. Функция не является чётной, нечётной и периодической (по условию $b, c, a > 0$).

3. Первая производная

$$y' = a\left(1 + \frac{c-b}{x-c}\right)' = \frac{-a(c-b)}{(x-c)^2} > 0.$$

Откуда делаем вывод о том, что функция монотонно возрастает на каждом из своих промежутков определения, т.е. на $(-\infty; -c)$ и на $(-c; +\infty)$. Поскольку производная одного знака точек экстремума нет.

4. Вторая производная

$$y'' = \left(\frac{-a(c-b)}{(x-c)^2}\right)' = \frac{2a(c-b)}{(x-c)^3}.$$

Последнее равенство означает, что

- при $x > c$ выполнено $y'' < 0$, а следовательно функция выпукла вверх;
- при $x < c$ выполнено $y'' > 0$, а следовательно функция выпукла вниз.

Точек перегиба нет. Вторая производная меняет знак в точке $x = c$, но не определена в ней.

5. Асимптоты:

- $x = c$ — вертикальная асимптота;
- $y = a$ — горизонтальная асимптота, поскольку $\lim_{x\to\infty} y(x) = b$.

6. Строим график функции (см. рис. 3.22).

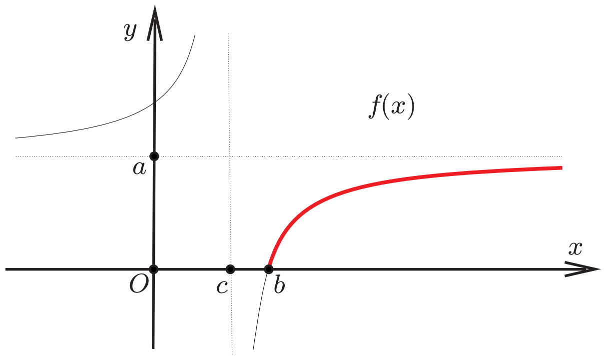


Рис. 3.22: Функция Торнквиста.

Пример 3.6.3 (Для предметов роскоши)**.** Построим график функции

$$y = \frac{ax(x-b)}{x-c}, \quad a > 0, \quad b > c > 0, \quad x > c.$$

Преобразуем данную функцию

$$y = \frac{ax(x-b)}{x-c} = a\left(x + (c-b)\frac{x}{x-c}\right) = a\left(x + (c-b) + \frac{c(c-b)}{x-c}\right).$$

1. Область определения функции $x \in (-\infty; c) \cup (c; +\infty)$.

2. Функция не является чётной, нечётной и периодической (по условию $b, c, a > 0$).

3. Первая производная

$$y' = a\left(x + (c-b) + \frac{c(c-b)}{x-c}\right)' = a\left(1 - \frac{c(c-b)}{(x-c)^2}\right) > 0.$$

Откуда делаем вывод о том, что функция монотонно возрастает на каждом из своих промежутков определения, т.е. на $(-\infty; c)$ и на $(c; +\infty)$. Поскольку производная одного знака точек экстремума нет.

4. Вторая производная

$$y'' = a\left(1 - \frac{c(c-b)}{(x-c)^2}\right)' = \frac{2ac(c-b)}{(x-c)^3}.$$

Последнее равенство означает, что

- при $x > c$ выполнено $y'' < 0$, а следовательно функция выпукла вверх;
- при $x < c$ выполнено $y'' > 0$, а следовательно функция выпукла вниз.

Точек перегиба нет. Вторая производная меняет знак в точке $x = c$, но не определена в ней.

5. Асимптоты:

- $x = c$ — вертикальная асимптота;
- из разложения

$$y = ax + a(c-b) + \frac{ca(c-b)}{x-c} = ax + a(c-b) + o(1), \quad x \to \infty,$$

делаем вывод о том, что прямая $y = ax + a(c-b)$ — наклонная асимптота к графику функции.

6. Строим график функции (см. рис. 3.23).

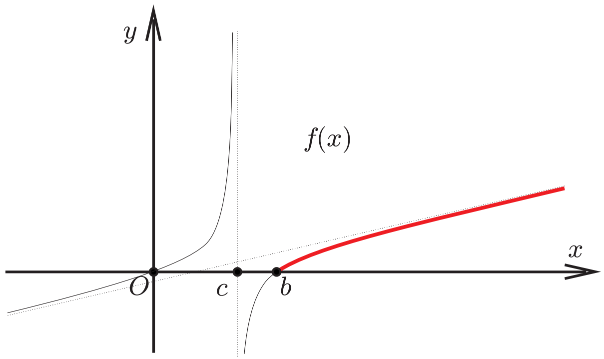


Рис. 3.23: Функция Торнквиста.

П р и м е р 3.6.4. Построим график функции

$$y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}.$$

Сделаем замену переменного $t = x - 1$. Тогда

$$y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} = \frac{(t+2)^3}{t^2} = t + 6 + \frac{12}{t} + \frac{8}{t^2}.$$

1. Область определения функции $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

2. Функция не является чётной, нечётной и периодической.

3. Первая производная

$$y'_t = 1 - \frac{12}{t^2} - \frac{16}{t^3} = \frac{t^3 - 12t - 16}{t^3} = \frac{(t+2)^2(t-4)}{t^3}.$$

Если перейти к переменной x (замечая, что в нашем случае $y'_t = y'_x$), то производная равна

$$y'_x = \frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}.$$

Откуда делаем вывод о том, что функция монотонно возрастает множестве $(-\infty; 1)$ и на $(5; +\infty)$, и монотонно убывает на множестве $(1; 5)$. Поскольку производная меняет знак в точках $x = 1$ и $x = 5$, но определена только в точке $x = 5$, то $y_{\min} = y(5) = 27/2$.

4. Вторая производная

$$y''_{tt} = \frac{24}{t^3} + \frac{48}{t^4} = \frac{24(t+2)}{t^4}.$$

Если перейти к переменной x (замечая, что в нашем случае $y''_{tt} = y''_{xx}$), то

$$y''_{xx} = \frac{24(x+1)}{(x-1)^4}.$$

Последнее равенство означает, что

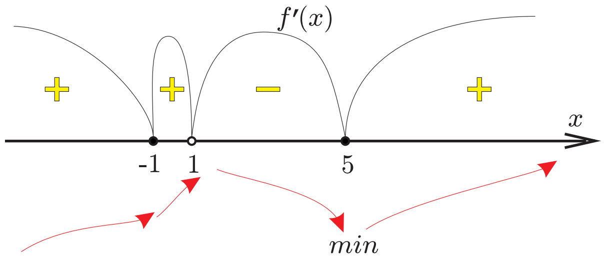


Рис. 3.24: Участки монотонности.

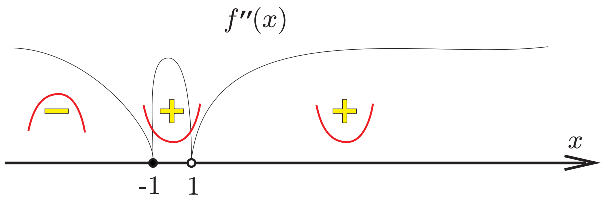


Рис. 3.25: Участки выпуклости.

- при $x \in (-\infty; -1)$ выполнено $y'' < 0$, а следовательно функция выпукла вверх;
- при $x \in (-1; 1) \cup (5 : +\infty)$ выполнено $y'' > 0$, а следовательно функция выпукла вниз.

Точка перегиба только одна $x = -1$ в которой $y(-1) = 0$.

5. Асимптоты:

- $x = 1$ — вертикальная асимптота;
- из разложения
$$y = t + 6 + \frac{12}{t} + \frac{8}{t^2} = t + 6 + o(1) = x + 5 + o(1), \quad x \to \infty,$$
делаем вывод о том, что прямая $y = x + 5$ — наклонная асимптота к графику функции.

6. Строим график функции (см. рис. 3.26).

П р и м е р 3.6.5. Построим график функции
$$y = x \operatorname{arctg} x.$$

1. Область определения функции $x \in \mathbb{R}$.

2. Функция является чётной, поскольку $f(-x) = f(x)$. Поэтому достаточно провести исследование на участке $[0; +\infty)$, а далее продолжим по симметрии (симметрично отобразим относительно оси Oy).

3. Первая производная
$$y' = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}.$$
Откуда делаем вывод о том, что функция монотонно возрастает множестве $(0; +\infty)$ (поскольку обе функции $\operatorname{arctg} x$ и $\dfrac{x}{1+x^2}$ положительны на этом множестве), и монотонно убывает на множестве $(-\infty; 0)$. Поскольку производная меняет знак в точке $x = 0$, то $y_{\min} = y(0) = 0$.

4. Вторая производная
$$y'' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} - \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{(1+x^2)^2} > 0.$$
Последнее неравенство означает, что выполнено $y'' > 0$, а следовательно функция выпукла вниз на всей действительной оси. Точек перегиба нет.

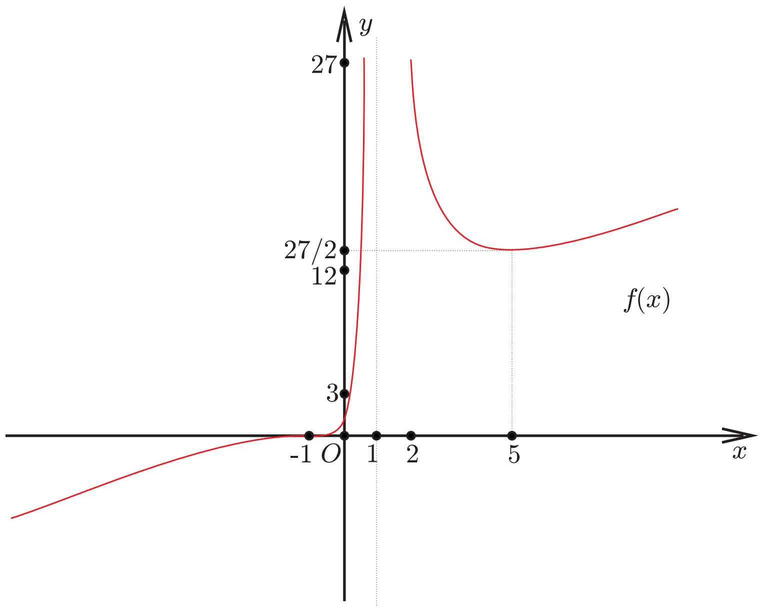


Рис. 3.26: Функция $f(x) = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$.

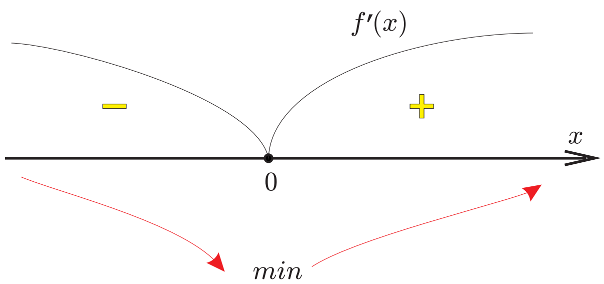


Рис. 3.27: Участки монотонности.

5. Асимптоты: Проведём исследование только на $+\infty$ (в силу того, что функция чётная, то на $-\infty$ симметрично).

$$y = x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x\right) = x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right) = x\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{\pi}{2}x - 1 + o(1), \quad x \to +\infty,$$

в силу чётности, делаем вывод о том, что $y = \frac{\pi}{2}|x| - 1$ — наклонные асимптоты к графику функции на $\pm\infty$.

6. Строим график функции (см. рис. 3.28).

П р и м е р 3.6.6. Построим график функции

$$y = (x - 12)e^{-\frac{2}{x}}.$$

1. Область определения функции $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2. Функция не является чётной, нечётной и периодической.

3. Первая производная

$$y'_x = e^{-\frac{2}{x}} + \frac{2(x-12)}{x^2}e^{-\frac{2}{x}} = \frac{x^2 + 2x - 24}{x^2} \cdot e^{-\frac{2}{x}} = \frac{(x-4)(x+6)}{x^2} \cdot e^{-\frac{2}{x}}.$$

Откуда делаем вывод о том, что функция монотонно возрастает множестве $(-\infty; -6)$ и на $(4; +\infty)$, и монотонно убывает на множестве $(-6; 0)$ и $(0; 6)$. Поскольку производная меняет знак в точках $x = -6$ и $x = 4$ (в которых и определена), то $y_{\max} = y(-6) = -18e^{1/3}$, $y_{\min} = y(4) = -8e^{-1/2}$.

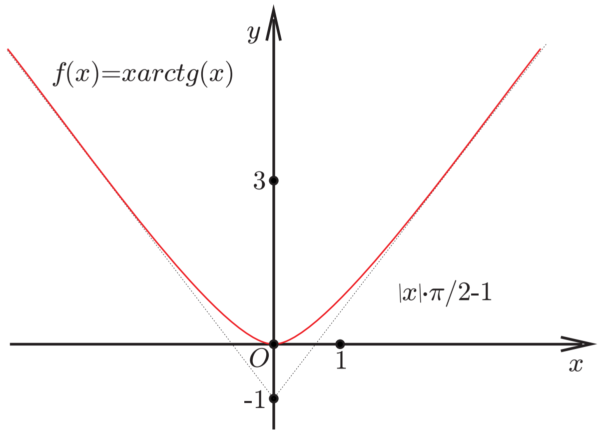


Рис. 3.28: Функция $f(x) = x \operatorname{arctg} x$.

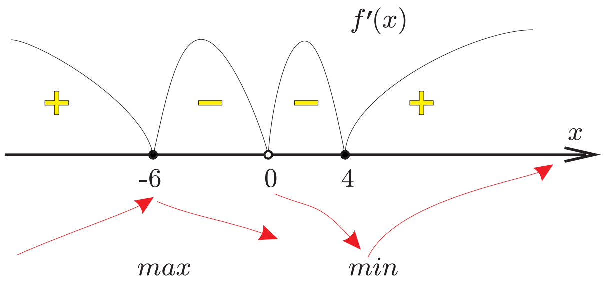


Рис. 3.29: Участки монотонности.

4. Вторая производная

$$y''_{xx} = e^{-\frac{2}{x}} \cdot \frac{52x - 48}{x^4} = \frac{52}{x^4} e^{-\frac{2}{x}} \cdot \left(x - \frac{12}{13} \right).$$

Последнее равенство означает, что

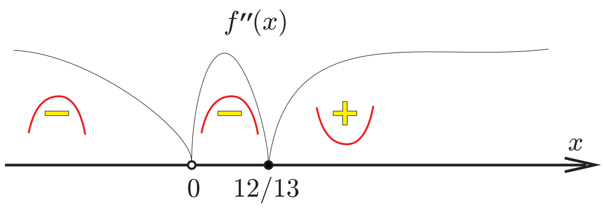


Рис. 3.30: Участки выпуклости.

- при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 12/13)$ выполнено $y'' < 0$, а следовательно функция выпукла вверх;
- при $x \in (12/13 : +\infty)$ выполнено $y'' > 0$, а следовательно функция выпукла вниз.

Точка перегиба только одна $x = 12/13$ в которой $y(12/13) = -\frac{168}{13} e^{13/6}$.

5. Асимптоты:

- поскольку

$$\lim_{x \to +0} (x - 12) e^{-\frac{2}{x}} = 0, \quad \lim_{x \to -0} (x - 12) e^{-\frac{2}{x}} = +\infty$$

$x = 0$ — вертикальная асимптота;

- из разложения
$$y = (x-12)\left(1 - \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x - 14 + o(1), \quad x \to \infty,$$
делаем вывод о том, что прямая $y = x - 14$ — наклонная асимптота к графику функции.

6. Строим график функции (см. рис. 3.31 и 3.32).

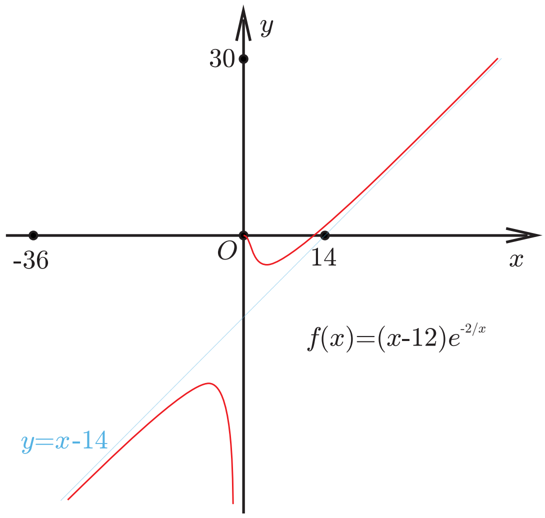


Рис. 3.31: Функция $f(x) = (x-12)e^{-\frac{2}{x}}$.

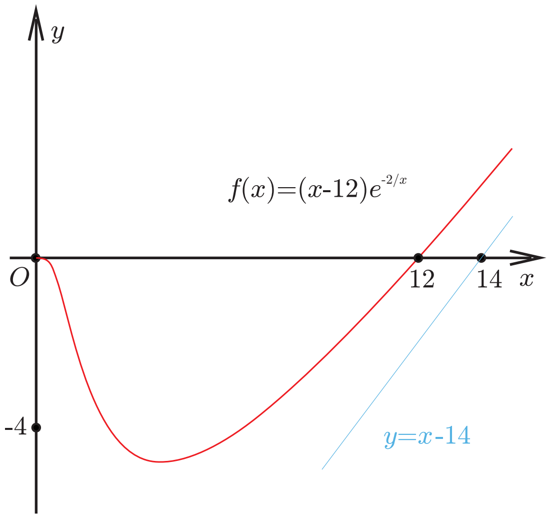


Рис. 3.32: Другой масштаб.

3.6.3 Неравенство Йенсена.

Теорема 3.6.7 (Неравенство Йенсена)**.** *Пусть* f *выпукла (вниз) на* $[a, b]$ *и* $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$. *Тогда для чисел* $\alpha_1, \dots, \alpha_n \geqslant 0: \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$ *выполняется*
$$f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n).$$

Доказательство. Докажем, используя метод математической индукции.

- Для минимального натурального номера $n = 2$ (очевидно, т.к. совпадает с определением).
- Предположим, что утверждение верно для номера $n - 1$.
- Докажем для следующего натурального номера n.

Положим $\beta = \alpha_2 + \dots + \alpha_n$. Тогда $\alpha_1, \beta \geqslant 0$ (случай $\beta = 0$ тривиален, поэтому будем считать, что $\beta > 0$), $\alpha_1 + \beta = 1$ и
$$f\left(\alpha_1 x_1 + \beta\left(\frac{\alpha_2}{\beta}x_2 + \dots + \frac{\alpha_n}{\beta}x_n\right)\right) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \beta f\left(\frac{\alpha_2}{\beta}x_2 + \dots + \frac{\alpha_n}{\beta}x_n\right) \leqslant$$
$$\leqslant \alpha_1 f(x_1) + \beta\left(\frac{\alpha_2}{\beta}f(x_2) + \dots + \frac{\alpha_n}{\beta}f(x_n)\right)$$

Далее остаётся воспользоваться индукцией, для чисел
$$\frac{\alpha_2}{\beta}, \dots, \frac{\alpha_n}{\beta} \geqslant 0; \quad \frac{\alpha_2}{\beta} + \dots + \frac{\alpha_n}{\beta} = 1.$$

$\square$

Замечание 32. Если функция выпукла вверх, знак неравенства меняется

$$f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) \geqslant \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n)$$

П р и м е р ы 3.6.1. Рассмотрим $f(x) = \ln x$. Функция $\ln x$ — выпукла вверх. Напишем неравенство Йенсена:

$$\ln(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) \geqslant \alpha_1 \ln x_1 + \dots + \alpha_n \ln x_n,$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_n \geqslant 0$, $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$. Или что равносильно

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \geqslant x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

Положим $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = \frac{1}{n}$. Получим неравенство, связывающее среднее арифметическое со среднем геометрическим.

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}$$

П р и м е р ы 3.6.2. Рассмотрим функцию $f(x) = x^p$, при $p > 1$. При $p > 1$ данная функция выпукла вниз, поэтому для любых $\alpha_1, \dots, \alpha_n \geqslant 0$, $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$ выполнено

$$\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k\right)^p \leqslant \sum_{k=1}^n \alpha_k \left(x_k\right)^p.$$

Пусть $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $a_k, b_k \geqslant 0$ и $B = \sum_{k=1}^n b_k^q$. Положим

$$\alpha_k = \frac{b_k^q}{B}, \quad x_k = \frac{a_k B}{b_k^{q-1}}.$$

Тогда

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right) \leqslant \left(\sum_{k=1}^n \frac{a_k^p}{B} B^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

При $p < 1$ функция $f(x) = x^p$ выпукла вверх, поэтому аналогично получаем неравенство Гёльдера для $p < 1$.

Замечание 33. Пусть $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^d$. Тогда

$$\vec{a} = (a_1, \dots, a_d) \quad \vec{b} = (b_1, \dots, b_d).$$

Положим

$$\|\vec{a}\|_p = (\sum_{k=1}^d a_k^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Тогда неравенство Гёльдера равносильно следующему:

$$(\vec{a}, \vec{b}) \leqslant \|\vec{a}\|_p \cdot \|\vec{b}\|_q, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p > 1.$$

В случае $p = q = 2$

$$(\vec{a}, \vec{b}) \leqslant \|\vec{a}\|_2 \cdot \|\vec{b}\|_2.$$

Это последнее неравенство поясняет корректность введения угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по следующей формуле:

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{\|\vec{a}\|_2 \cdot \|\vec{b}\|_2}.$$

Контрольные вопросы.

1. Сформулируйте неравенство Йенсена.

Упражнения к 3.6

Упражнение 3.6.1. *Пусть* $f(x)$ *выпуклая вверх функция на* $[0;+\infty)$ *и* $f(0)=0$. *Докажите, что для* $k \geqslant 1$ *справедливо неравенство* $kf(x) \geqslant f(kx)$.

Упражнение 3.6.2. *Докажите равносильность неравенств: Бернулли*

$$x^n \geqslant 1+n(x-1), \forall x>0, n \in \mathbb{N} \tag{B}$$

и неравенства между средними арифметическими и геометрическими

$$A_n = \frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} = G_n, \quad (x_k>0,\ \forall k=1,\ldots n). \tag{AM-GM}$$

Ответы: 3.6.1 *Указание:* используйте определение выпуклости с параметрами $x_1=kx$, $x_2=0$, $\alpha_1=1/k$. **3.6.2** *Указание:* ($\Rightarrow$) Применить неравенство Бернулли для $x=A_n/A_{n-1}>0$ и получить неравенство $A_n^n \geqslant x_n A_{n-1}^{n-1}$ из последнего неравенства последовательно найти $A_n^n \geqslant x_n \cdots x_1 = G_n^n$. ($\Leftarrow$) Применить неравенство между средними арифметическими и геометрическими для чисел $1+(n-1)x$, $\underbrace{1,\ldots,1}_{n-1 \text{ раз}}$ см. также [8].

3.7 Правило Бернулли (Лопиталя).

Теорема 3.7.1. *Если выполнены следующие условия*[a]

$$\begin{aligned}
&1) \quad f,g \in \mathbb{D}(a,b),\\
&2) \quad g'(x) \neq 0, \forall x \in (a,b),\\
&3) \quad \exists \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \bar{\mathbb{R}},\\
&4) \quad \textit{либо } \frac{0}{0}, \ \textit{т.е. } \lim_{x\to a+} f(x) = 0 = \lim_{x\to a+} g(x), \textit{либо } g(x)\to+\infty, x\to a+,
\end{aligned}$$

то существует предел $\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}$ *и более того*

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

[a]Здесь мы подрузумеваем, что константа A в условии 3 может равняться и бесконечности.

Доказательство. Согласно теореме Коши имеем

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} &= \frac{f'(c)}{g'(c)} \iff\\
\frac{f(x)-f(y)}{g(x)} &= \frac{f'(c)}{g'(c)}\left(\frac{g(x)-g(y)}{g(x)}\right) \iff\\
\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(y)}{g(x)} + \frac{f'(c)}{g'(c)}\left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right).
\end{aligned}$$

Покажем, что в обоих случаях (либо $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0$, либо $g(x)\to+\infty$, $x\to a+$), при согласованном стремлении $x\to a+$ и $y\to a+$ будет выполнено

$$\frac{f(y)}{g(x)} \to 0, \qquad \frac{g(y)}{g(x)} \to 0.$$

Действительно, в случае $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0$ выберем точки (см. рис. 3.33) и устремим $y\to a+$. В случае $\lim_{x\to a+} g(x) = +\infty$ выберем точки (см. рис. 3.34) и устремим $x\to a+$.

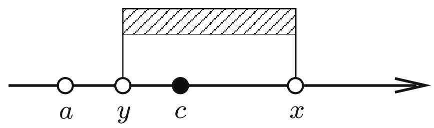


Рис. 3.33: Случай $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0$.

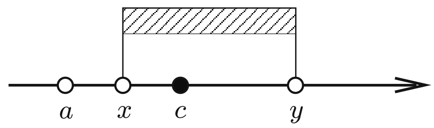


Рис. 3.34: Случай $\lim_{x\to a+} g(x) = +\infty$.

Таким образом в обоих случаях устремляя $x \to a+$, $y \to a+$ получаем, что и $c \to a+$, т.к. c лежит между x и y. Поэтому

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to a+} \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

□

П р и м е р 3.7.1. Вычислим первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

Сразу предостережём читателя от такого рода доказательств первого замечательного предела, поскольку возникает замкнутый круг. Действительно, нахождение производной от синуса получаем при помощи первого замечательного предела, а если мы данный предел будем доказывать через правило Бернулли, то используем производную от синуса.

П р и м е р 3.7.2. Найдём предел

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+\sin x}{3x-\cos x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{\sin x}{x}}{3-\frac{\cos x}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+o(1)}{3+o(1)} = \frac{2}{3}.$$

Но тем не менее формальное применение правила Бернулли ведём к неверному результату

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+\sin x}{3x-\cos x} \neq \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\cos x}{3+\sin x}.$$

Поскольку последний предел просто не существует. Таким образом правило Бернулли применять нельзя, поскольку не выполняется условие 3 теоремы.

П р и м е р 3.7.3. Легко вычислить, что

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x} = 0.$$

Но тем не менее формальное применение правила Бернулли опять ведёт к неверному результату

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x} \neq \lim_{x\to 0} \frac{1}{e^x} = 1.$$

Таким образом правило Бернулли в данном примере применять нельзя, поскольку не выполняется условие 4 теоремы (об неопределённости вида $0/0$).

П р и м е р 3.7.4. Докажем, уже известное асимптотическое равенство

$$e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) \sim \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Данная оценка равносильна существованию предела

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)}{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}$$

и равенству его единицы. Перейдём к доказательству (обоснование ниже)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}\right)}{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}=$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right)}{\frac{x^{n}}{n!}}=$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\right)}{\frac{x^{n-1}}{(n-2)!}}=$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2!}\right)}{\frac{x^{2}}{2!}}=$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-(1+x)}{\frac{x^{2}}{2!}}=$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=1.$$

Здесь обоснование, проведённых выкладок по правилу Бернулли, нужно обосновывать с конца. Действительно, из равенства $\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=1$, по правилу Бернулли вытекает равенство $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$, т.к.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=1.$$

Применим опять правило Бернулли и получим $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-(1+x)}{\frac{x^2}{2!}}=1$, т.к.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-(1+x)}{\frac{x^2}{2!}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

и т.д.

Глава 4

Дифференциальное исчисление функций многих переменных

4.1 Понятие функций нескольких переменных.

Когда исследуемое явление или процесс зависят не от одной, а от нескольких величин, для его описания используют *функции нескольких переменных.*

Например, если прямоугольник имеет стороны x,y, то его периметр вычисляется по формуле $P(x, y) = 2(x + y)$. Эта формула определяет функцию, которая каждой паре чисел (x, y), $x > 0$, $y > 0$, сопостовляет число $P(x, y)$.

Аналогично, формула для объема прямоугольного параллелепипеда со сторонами x, y, z определяет функцию $V(x, y, z) = xyz$, которая каждой тройке чисел (x, y, z), $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ сопоставляет число $V(x, y, z)$.

Рассмотрим задачу определения среднего балла для группы из d студентов. Произведем нумерацию списка студентов и обозначим символом x_i ту оценку, которую получил на экзамене студент с номером i из этого списка. Тогда средний балл равен

$$M(x_1, \ldots, x_d) = \frac{x_1 + \cdots + x_d}{d}.$$

Эта формула дает пример функции d переменных, возможными значениями каждой переменной являются числа 2, 3, 4, 5.

Итак, для задания функции d переменных (обозначим ее $f(x_1, \ldots, x_d)$), следует указать правило, по которому набору чисел $(x_1, \ldots, x_m)$ ставится в соответствие число $f(x_1, \ldots, x_d)$ и условия, которым должны удовлетворять числа $(x_1, \ldots, x_d)$. Эти условия задают область определения функции $f(x_1, \ldots, x_d)$.

4.1.1 Пространство $\mathbb{R}^d$.

Из школьного курса математики известно, что множество пар чисел (x_1, x_2), обозначаемое $\mathbb{R}^2$, находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством точек плоскости, на которой введена система координат. Аналогично, множество троек чисел (x_1, x_2, x_3), обозначаемое $\mathbb{R}^3$, находятся во взаимно-однозначном соответствии с множеством точек пространства.

Пространство $\mathbb{R}^d$ — это множество наборов чисел $(x_1, .., x_d)$. При $d \geqslant 4$ у нас нет образного представления о пространстве $\mathbb{R}^d$. Однако, формальные аналогии с пространствами $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ позволяют ввести в $\mathbb{R}^d$ многие геометрические понятия. Например, расстояние в $\mathbb{R}$ между точками x и a задается формулой $|x - a|$. Расстояние в $\mathbb{R}^2$ между точками $\vec{x} = (x_1, x_2)$ и $\bar{a} = (a_1, a_2)$ равно $\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2}$, в $\mathbb{R}^3$ расстояние между точками $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ равно $\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2}$. По аналогии, расстояние в $\mathbb{R}^d$ между $\vec{x} = (x_1, .., x_d)$ и $\vec{a} = (a_1, .., a_d)$ равно $\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + ... + (x_d - a_d)^2}$. Окрестность $\overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(\vec{a})$ точки a в множестве $\mathbb{R}$ — это множество точек x, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$. Окрестность $\mathcal{U}_\delta(\vec{a})$ точки $\vec{a}$ в $\mathbb{R}^2$ — это множество пар $\vec{x} = (x_1, x_2)$ таких, что $\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} < \delta$ и т.д. $\mathcal{U}_\delta(\vec{a})$ — окрестность точки $\vec{a}$ в $\mathbb{R}^d$ — это множество $\vec{a} = (x_1, .., x_d)$ таких, что

$$\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + ... + (x_d - a_d)^2} < \delta.$$

Окрестность $\mathcal{U}_\delta(\vec{a})$ мы будем также называть шаром $\mathcal{B}(\vec{a}, \delta)$, т.е. $\mathcal{U}_\delta(\vec{a}) = \mathcal{B}(\vec{a}, \delta)$.

4.1.2 Метрическое пространство.

Определение 4.1.1. *Метрическим пространством* называется пара (X, d), где X некоторое множество, а $d : X \times X \mapsto \mathbb{R}_+ = [0; +\infty)$ — функция расстояния (*метрика*), удовлетворяющая следующим аксиомам (аксиомам расстояния)

1. Для любых $x, y \in X$ выполнено $d(x, y) \geqslant 0$, причём $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$ (неотрицательность).
2. Для любых $x, y \in X$ выполнено $d(x, y) = d(y, x)$ (симметричность).
3. Для любых $x, y, z \in X$ выполнено $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (неравенство треугольника).

В дальнейшем, зачастую метрическое пространство будем обозначать тем же символом, что и само множество X.

Примеры метрических пространств:

Пример 4.1.1 (Пространство изолированных точек)**.** Для произвольного множества изолированных точек X введём метрику следующим образом:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y; \\ 1, & \text{если } x \neq y. \end{cases}$$

Легко проверить, что все аксиомы расстояния выполнены.

Пример 4.1.2 (Пространство $\mathbb{R}^d$)**.** Расстояние вводится следующим образом:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_d - y_d)^2}.$$

Легко проверить, что первые две аксиомы расстояния выполнены. Третья аксиома равносильна неравенству Минковского (см. теорему 3.5.3 с $p = 2$).

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2\right)^{1/2}.$$

Пример 4.1.3 (Пространство $\mathbb{R}^d_p$, $p \geqslant 1$)**.** Расстояние вводим следующим образом:

$$d(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{d} |x_k - y_k|^p\right)^{1/p}.$$

Легко проверить, что первые две аксиомы расстояния выполнены. Третья аксиома следует из неравенства Минковского (см. теорему 3.5.3 с $p \geqslant 1$).

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{1/p}.$$

Пример 4.1.4 (Пространство непрерывных на отрезке функций)**.** Расстояние в пространстве $C[a; b]$ вводится следующим образом:

$$d(x, y) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)|.$$

Легко проверить, что аксиомы расстояния выполнены.

4.2 Открытые и замкнутые множества.

Будем рассматривать метрическое пространство (X, d).

Определение 4.2.1. Множество $\mathcal{B}(x,\delta) = \{y \in X \,:\, d(x,y) < \delta\}$ называется *открытым шаром* с центром в x и радиуса δ. Мы будем говорить просто шар.

А множество $\mathcal{B}(x,\delta) = \{y \in X \,:\, d(x,y) \leqslant \delta\}$ будем называть *замкнутым шаром* с центром в x и радиуса δ. Здесь слово замкнутый, чтобы не было путаницы, мы никогда не будем опускать.

Определение 4.2.2. Множество $G \subset X$ - называется *открытым*, если для любого $x \in G$ существует шар $\mathcal{B}(x,\delta) \subset G$.

Множество $F \subset X$ — *замкнутое* множество, если $X \setminus F$ — открытое.

Множества X и $\emptyset$ открыты и замкнуты одновременно.

П р и м е р 4.2.1. Шар $\mathcal{B}(x,r)$ — открытое множество.

Доказательство. Пусть $y \in \mathcal{B}(x,r)$. Положим $\delta = r - d(x,y)$. Тогда $\mathcal{B}(y,\delta) \subset \mathcal{B}(x,r)$. Действительно, для

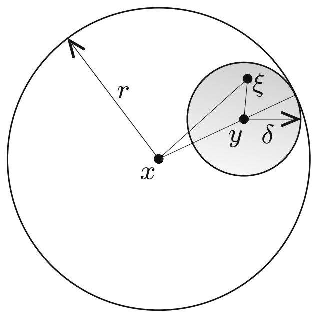


Рис. 4.1:

$\xi \in \mathcal{B}(y,\delta)$ имеем

$$d(x,\xi) \leqslant d(x,y) + d(y,\xi) < d(x,y) + \delta = r.$$

□

Определение 4.2.3. Назовём x — *внутренней* точкой множества $X \subset \mathbb{R}^d$, если существует $\mathcal{B}(x,\delta) \subset X$.

Назовём x — *внешней* точкой $X \subset \mathbb{R}^d$, если существует $\mathcal{B}(x,\delta) \cap X = \emptyset$

Назовём x — *граничной* точкой $X \subset \mathbb{R}^d$, если она не является ни внутренней ни внешней точкой.

Определение 4.2.4. Будем говорить, что x — *предельная* точка множества $E \subset \mathbb{R}^d$, если в любом шаре $\mathcal{B}(x,\delta)$ существует хотя бы одна точка из E, отличная от x.

Множество предельных точек для E будем обозначать через E'.

Определение 4.2.5. Обозначим $\bar{E}$ — *замыкание* множества E, т.е. $\bar{E} = E + E'$.

Теорема 4.2.1. *$F = \bar{F} \Leftrightarrow F$ - замкнутое множество.*

Доказательство. $\Longrightarrow$ Пусть $x \notin F = \bar{F}$. Тогда $\exists \mathcal{B}(x,\delta) \cap F$ — конечное число точек (см. рис. 4.2) $x_1, \ldots, x_n$.
1. $\exists \mathcal{B}(x,\delta_1)$ такая, что $x_1 \notin \mathcal{B}(x,\delta_1)$, где $\delta_1 < d(x,x_1)$.
2. $\exists \mathcal{B}(x,\delta_2)$ такая, что $x_2 \notin \mathcal{B}(x,\delta_2)$, где $\delta_2 < d(x,x_2)$.
. . . .
n. $\exists \mathcal{B}(x,\delta_n)$ такая, что $x_n \notin \mathcal{B}(x,\delta_n)$, где $\delta_n < d(x,x_n)$.

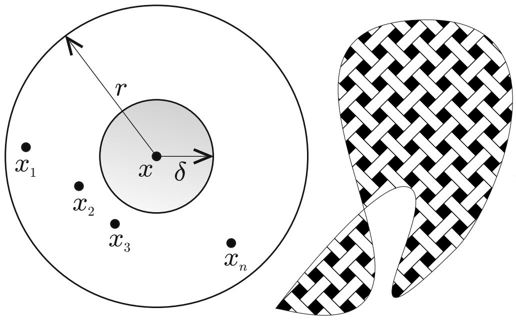


Рис. 4.2:

Положим

$$\delta = \min(\delta_1, \dots, \delta_n).$$

Тогда $\mathcal{B}(x,\delta) \cap F = \emptyset$. Следовательно $X \setminus F$ — открытое множество, а следовательно F — замкнутое.

$\Longleftarrow$. Пусть F — замкнутое множество. Рассмотрим $x \notin F$. Поскольку $X \setminus F$ открытое, то

$$\exists \mathcal{B}(x,\delta) \cap F = \emptyset \Rightarrow x \text{ — не является предельной точкой.}$$

□

Теорема 4.2.2. *Пусть G_α — открытые множества, F_α — замкнутые множества. Тогда справедливо*

$$\begin{aligned}
&1) \cup_\alpha G_\alpha \ \text{ — открытое множество,}\\
&2) \cap_{\alpha=1}^n G_\alpha \ \text{ — открытое множество,}\\
&3) \cup_{\alpha=1}^n F_\alpha \ \text{ — замкнутое множество,}\\
&4) \cap_\alpha F_\alpha \ \text{ — замкнутое множество.}
\end{aligned}$$

Доказательство. 1) Пусть $x \in \cup_\alpha G_\alpha \Rightarrow \exists \alpha^* : x \in G_{\alpha^*}$. Тогда

$$\exists \mathcal{B}(x,\delta) \subset G_{\alpha^*} \subset \cup_\alpha G_\alpha.$$

2) Пусть $x \in \cap_{\alpha=1}^n G_\alpha$ - открыто.
Поскольку $x \in G_\alpha, \forall \alpha$, то $\exists \mathcal{B}(x,\delta_\alpha) \subset G_\alpha, \forall \alpha = 1, \dots, n$. Положим $\delta = \min(\delta_1, \dots, \delta_n)$, тогда $\mathcal{B}(x,\delta) \subset \cap_{\alpha=1}^n G_\alpha$.
3) Вытекает из $C(\cup_{\alpha=1}^n F_\alpha) = \cap_{\alpha=1}^n C(F_\alpha)$.
4) Вытекает из $C(\cap_\alpha F_\alpha) = \cup_\alpha C(F_\alpha)$. □

Тот факт, что любое открытое множество есть счетное объединение шаров (не обязательно непересекающихся) можно доказать, используя следующее утверждение.

Утверждение 4.2.3. *Любое открытое множество G можно представить в виде объединения шаров с рациональными радиусами (т. е. радиус шара равен рациональному числу).*

Доказательство. Рассмотрим объединение $\mathcal{U}$ всех шаров с рациональными радиусами, являющихся подмножествами нашего множества. Докажем, что это объединение совпадает со всем множеством. Действительно, если a — какая-то точка из G, то существует шар $\mathcal{B}(a,\delta) \subset G$, содержащий a (это следует из того, что G — открытое). На любом интервале $(0;\delta)$ можно найти рациональную точку δ_1. Тогда шар $\mathcal{B}(a,\delta_1) \subset G$, т.е. точка a покрыта объединением $\mathcal{U}$, а именно, шаром $\mathcal{B}(a,\delta_1)$. Таким образом, мы доказали, что каждая точка a из G покрыта объединением $\mathcal{U}$. Кроме того, как очевидно следует из построения $\mathcal{U}$, никакая точка, не содержащаяся в G, не покрыта $\mathcal{U}$. Значит, $\mathcal{U}$ и G совпадают. □

4.2.1 Структура открытого и замкнутого множества числовой прямой.

В случае одной переменной утверждение о том, что любое открытое множество есть счетное объединение интервалов естествено переносится. Но, недостаток доказательства, приведённого выше, состоит в том, что ничего не говорится о том можно ли представить в виде непересекающихся интервалов.

Например, приведённое доказательство не обеспечивает непересекающихся интервалов даже для открытого множества $(\sqrt{2};\sqrt{3})$, т.к. данное множество $(\sqrt{2};\sqrt{3})$ будет представимо в виде рациональных инервалов, только как объединение счётного числа интервалов с концами в рациональных точках. Поэтому приведём более сильную формулировку для случая одной переменной.

> **Определение 4.2.6.** Интервал, лежащий в открытом множестве G, концы которого не принадлежат множеству, называется *составляющим* интервалом множества.

Теорема 4.2.4 (Структура открытого множества числовой прямой)**.** *Любое ограниченное, непустое, открытое множество G можно единственным образом представить в виде конечного либо счётного объединения попарно непересекающихся интервалов, концы которых не принадлежат G.*

Иначе говоря, *любое ограниченное, непустое, открытое множество можно единственным образом представить в виде объединения не более чем счетного числа его составляющих интервалов.* В общей ситуации, т.е. если G — открытое множество, то возможны следующие случаи:

1. $G = \emptyset$.

2. $G = \mathbb{R}$.

3. $G = \sqcup_{k\geqslant 1}(a_k;b_k)$, $a_k, b_k \notin G$.

4. $G = (\sqcup_k(a_k;b_k)) \sqcup (y;+\infty), \quad y, a_k, b_k \notin G$.

5. $G = (-\infty;z) \sqcup (\sqcup_k(a_k;b_k)), \quad z, a_k, b_k \notin G$.

6. $G = (-\infty;z) \sqcup (\sqcup_k(a_k;b_k)) \sqcup (y;+\infty), \quad y, z, a_k, b_k \notin G$.

Доказательство. Обозначим $B = \mathbb{R}\backslash G$.

I. Предположим, что множество G — ограничено. Тогда для любого $g \in G$ существуют $a_1, b_1 \in B$ такие, что $a_1 < g < b_1$. Докажем, что в этом случае для любого $a \in G$ существует интервал $(a_1;b_1) \subseteq G$ такой, что $a_1, b_1 \in B$.

Рассмотрим произвольное $g_0 \in G$. Тогда множество $[g_0;+\infty) \cap B$ — непустое, замкнутое множество, ограниченное снизу. Следовательно у него есть минимум B_1, т.к. замкнутое множество содержит все свои предельные точки. Таким образом $[g_0;B_1) \subset A$ и при этом $B_1 \notin G$. Аналогично находим точку $A_1 \in B$ такую, что $(A_1;g_0] \in G$, но при этом $A_1 \notin G$. Интервал $(A_1;B_1)$ — искомый, т.е. составляющий.

Проделав такую процедуру с каждой точкой множества G нами будут построены непересекающиеся интервалы, объединение которых образует множество G. Очевидно, что объединение каких интервалов не более чем счетно (в каждом интервале можно выбрать по рациональной точке).

II. Предположим, что множество G — неограничено сверху. Тогда существует такое $g \in A$, что $[g;+\infty) \in G$. Рассмотрим множесто $Y = \{g \in A : [g;+\infty) \subseteq G\}$. Если множество Y не ограничено снизу, то $G = \mathbb{R}$. Иначе существует $y = \inf Y$. Докажем, что $y \notin G$. Предположим, что $y \in G$, но тогда существует окрестность содержащая y, а следовательно y не является точной нижней гранью множества Y.

Рассмотрим множество $\dot{G} = G\backslash(y;+\infty)$. Если оно пусто, то всё доказано. Пусть множество $\dot{G}$ не пусто, то оно ограничено сверху и открыто.

Если множество $\dot{G}$ ограничено снизу, то по пункту **I** данной теоремы будет всё доказано.

III. Предположим, что $\dot{G}$ неограничено снизу. Тогда проделав аналогичную процедуру с множеством $Z = \{g \in G : (-\infty;g) \subseteq G\}$ получим, что $\dot{G} = (-\infty;z) \cup \ddot{G}$. Причём $z \notin G$ и $\ddot{G}$ — открытое, ограниченное множество. Если $\ddot{G}$ пустое, то всё доказано. Если $\ddot{G}$ не пустое, то согласно пункту **I** данной теоремы, окончательно получаем

$$G = (-\infty;z) \cup (\cup_k(a_k;b_k)) \cup (y;+\infty),$$

где количество составляющих интервалов $(a_k; b_k)$ конечно либо счётно.

IV. Покажем, что данное представление единственно. Достаточно доказать, что если $I_1 = (a; b)$, $I_2 = (a_1; b_1)$ два составляющих интервала, то они либо не пересекаются, либо совпадают. Предположим противное, т.е. найдётся два различных составляющих интервала, которые пересекаются $I_1 \cap I_2 \not\emptyset$. Рассмотрим, например, случай $a < a_1$. Тогда $a < a_1 < b$ и получаем, что $a_1 \in G$, т.к. $a_1 \in (a; b)$, но также $a_1 \notin G$ поскольку a_1 один из концов составляющего интервала. Полученное противоречее доказывает, что два составляющих интервала, то они либо не пересекаются, либо совпадают. $\square$

Теорема 4.2.5 (Структура замкнутого множества числовой прямой)**.** *Любое замкнутое, ограниченное, непустое множество F получается из отрезка $[A; B]$ удалением не более чем счётного числа попарно не пересекающихся интервалов, концы которых принадлежат F. Данное представление единственно.*

В общей ситуации, т.е. если F — замкнутое множество, то возможны следующие случаи:

1. $F = \emptyset$.

2. $F = \mathbb{R}$.

3. $F = [A; B] \setminus \sqcup_k (a_k; b_k),\ a_k, b_k \in F$.

4. $F = [A; B] \setminus (\sqcup_k (a_k; b_k)) \sqcup [y; +\infty), \quad y, a_k, b_k \in F$.

5. $F = (-\infty; z] \sqcup [A; B] \setminus (\sqcup_k (a_k; b_k)), \quad z, a_k, b_k \in F$.

6. $F = (-\infty; z] \sqcup [A; B] \setminus (\sqcup_k (a_k; b_k)) \sqcup [y; +\infty), \quad y, z, a_k, b_k \in F$.

Доказательство. Доказательство состоит в том, что $G = \mathbb{R} \setminus F$ — открытое. А структура открытых множеств описанна выше. $\square$

4.3 Компакт и критерий компактности в n-мерном пространстве.

Определение 4.3.1. Множество K называется *компактом*, если из любого его покрытия открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие.

П р и м е р 4.3.1. $I = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^d : a_k \leqslant x_k \leqslant b_k, k = 1, \ldots, d, \} \quad I$ - компакт.

Доказательство. Пусть $\{G_\alpha\}$ — произвольное покрытие I открытыми множествами, предположим, что нельзя выделить конечное подпокрытие. Тогда, поделив пополам по каждой из координатных осей отрезки

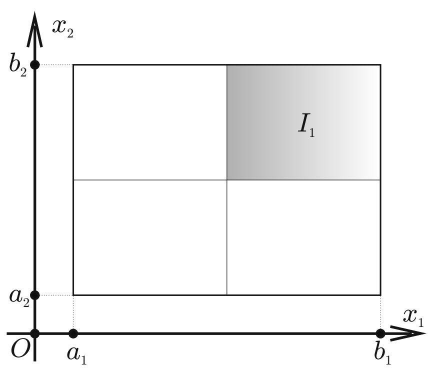


Рис. 4.3: Множество I_1.

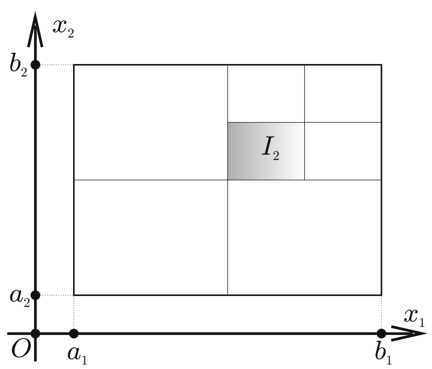


Рис. 4.4: Множество I_2.

$[a_k; b_k]$ получим 2^d прямоугольных параллелепипеда. Поскольку из I нельзя было выделить конечное подпокрытие, то существует I_1 (см. рис. 4.3) из которого также нельзя выделить конечное подпокрытие (иначе конечное подпокрытие допускалось бы). Проделав ту же процедуру с I_1 получим прямоугольный параллелепипед I_2 (см. рис. 4.4) из которого нельзя выделить конечное подпокрытие. Продолжаю так дальше, на n-ом шаге находим I_n из которого нельзя выделить конечное подпокрытие и т.д. Следовательно существует и единственна $\vec{c} \in I_n, \forall n \in \mathbb{N}$, так как $\vec{c} \in I \quad \exists \alpha^* : \vec{c} \in G_{\alpha^*} \Rightarrow \exists I_n \subset G_{\alpha^*}$, то получаем противоречие с тем, что I_n не допускает конечного покрытия системы множеств в G_α. ☐

Теорема 4.3.1. *1)K - компакт $\Rightarrow$ K - замкнуто*
2)F - замкнуто и содержится в компакте $\Rightarrow$ F - компакт.

Доказательство. 1) Рассмотрим $\vec{x} \notin K$.

$$\forall \vec{y} \in K \quad \exists \mathcal{B}(\vec{y}, \frac{d(\vec{x}, \vec{y})}{2}) \not\ni \vec{x}$$

Получили покрытие компакта открытыми множествами. Выделили конечное подпокрытие (см. рис. 4.5).

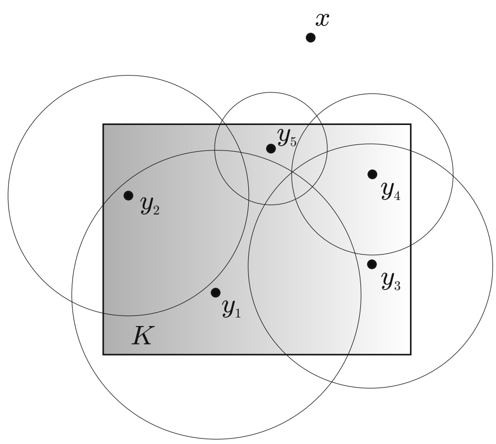


Рис. 4.5:

$$\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n \text{ - открытое}$$

$$K \subset (\bigcup_{l=1}^{n} \mathcal{B}_l)$$

$$\mathcal{B}(y_1, \delta_1), \ldots, \mathcal{B}(y_n, \delta_n)$$

$$K \subset (\bigcup_{l=1}^{n} \mathcal{B}(y_l, \delta_e))$$

$$\delta = \frac{1}{2} \min\{d(\vec{y}_k, \vec{x}_k) - \delta_k\}$$

$$\mathcal{B}(\delta, \vec{x}) \cap \mathcal{B}(y_k, \delta_k) = \emptyset \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ мы определили шар, который целиком содержит $\vec{x}$ и не имеет точек пересечения с компактом, так как x - произвольная $\Rightarrow$ множество открытое $\Rightarrow$ K - замкнутое.

2) Докажем второе утверждение. Пусть G_α — произвольное покрытие открытыми множествами множества F.

$$G = \mathbb{R}^d \setminus F \text{ - открытое}$$

$$G \text{ и } G_\alpha \text{ образуют покрытие } K$$

$$\exists G_1, \ldots, G_n, G \text{ - покрытие } K$$

G не имеет общих точек с $F \Rightarrow G_1, \ldots, G_n$ - покрытие $F \Rightarrow F$ - компакт ☐

Теорема 4.3.2 (Критерий компактности в $\mathbb{R}^d$)**.** *K - компакт $\Leftrightarrow$ K - ограничено и замкнуто.*

Доказательство.

$$\Rightarrow$$

$$K \text{ - замкнутое, доказано в предыдущей теореме}$$

$$\mathcal{B}_n = \mathcal{B}(\vec{0}, n)$$

$$K \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathcal{B}_n \Rightarrow \text{ выделяем конечное подпокрытие}$$

$$\exists \mathcal{B}_{k_1}, \ldots, \mathcal{B}_{k_n}$$

$$\max n \text{ содержит его } \Rightarrow K \text{ - ограничено}$$

$$\Leftarrow$$

$$\exists I = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^d : a_k \leqslant x_k \leqslant b_k\}$$

$$K \subset I$$

Мы доказали, что K содержится в компакте и оно замкнуто $\Rightarrow$ K - компакт ☐

4.4 Критерий Коши для функции многих переменных.

Определение 4.4.1. Если пространство (X, d) является метрическим, где $d(x, y)$ — метрика, $x \in X$ называется пределом $x_n \in X$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, если

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \Rightarrow d(x_n, x) < \epsilon.$$

Писать будем, как и ранее: $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$.

В частности, если взять пространство $\mathbb{R}^d$ с метрикой, например $d(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{\sum_{k=1}^{d}(x_k - y_k)^2}$, то получим определение предела последовательности в пространстве $\mathbb{R}^d$.

Пусть функция f определена на $\mathbb{R}^d$ со значениями в $\mathbb{R}^m$, т.е. $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$.

Определение 4.4.2. Пусть $A \in \mathbb{R}^m$, (т.е. $A = (A_1, \ldots, A_m)$ — конечное число из пространства $\mathbb{R}^m$). Тогда определение $\lim_{\vec{x}\to a} f(\vec{x}) = A$ равносильно следующему:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \vec{x} : 0 < d_{\mathbb{R}^d}(\vec{x}, \vec{a}) < \delta \Rightarrow d_{\mathbb{R}^m}(f(\vec{x}), A) < \epsilon$$

Данное определение можно, как и ранее, записать в терминах окрестностей:

$$\forall V_\epsilon(A) \exists \mathring{\mathcal{U}}_\delta(\vec{a}) \quad f(\mathring{\mathcal{U}}_\delta(\vec{a})) \subset V_\epsilon(A)$$

Теорема 4.4.1 (Критерий Коши)**.** *Пусть $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$. Тогда*

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(x) \text{ - существует конечный предел } \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$$

$$\omega(f, \mathring{\mathcal{U}}_\delta(\vec{a})) < \epsilon$$

$$\omega(f, A) = \sup_{\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in A} d_{\mathbb{R}^m}(f(\vec{x}_1), f(\vec{x}_2)).$$

4.5 Непрерывность функции многих переменных.

Определение 4.5.1. Непрерывность, как и ранее определяется следующем образом:

$$f \in C(\vec{a}) \Leftrightarrow f(\vec{a}) = \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x})$$

В частности, можно записать непрерывность в терминах колебания функции

$$f \in C(\vec{a}) \Leftrightarrow \lim_{\delta\to 0} \omega(f, \mathcal{U}_\delta(\vec{a})) = 0$$

Из определения непрерывности, критерия Коши и свойств предела получаем, как и ранее, локальные свойства непрерывных функций:

Теорема 4.5.1 (Локальные свойства непрерывных функций)**.** *Пусть* $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^m$, $f, g \in C(\vec{a})$. *Тогда*

1. $\alpha f + \beta g \in C(\vec{a})$,
2. $f \cdot g \in C(\vec{a})$,
3. *Пусть* $m = 1$, *то* $g(\vec{a}) \neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g} \in C(\vec{a})$,
4. *Пусть* $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^s$, $g : \mathbb{R}^s \mapsto \mathbb{R}^m$ *и* $\left.\begin{array}{l} f \in C(\vec{a}) \\ g \in C(\vec{b}) \\ \vec{b} = f(\vec{a}) \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f \in C(\vec{a})$.

Остаётся в силе, также и теоремы о композиции для функции.

Теорема 4.5.2 (О композиции предела I)**.** *Пусть* $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^s$, $g : \mathbb{R}^s \mapsto \mathbb{R}^m$.

1. $\exists \lim_{\mathcal{B}_y} g(y) = A$,
2. $\forall B_y \in \mathcal{B}_y : \exists B_x \in \mathcal{B}_x : f(B_x) \subset B_y$.

Тогда

$$\lim_{\mathcal{B}_x} g \circ f = A.$$

Теорема 4.5.3 (О композиции предела II)**.** *Пусть* $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^s$, $g : \mathbb{R}^s \mapsto \mathbb{R}^m$. *Пусть "внешняя"функция* $g(\vec{y})$ *будет определена и непрерывна в некоторой окрестности точке* $\vec{b} \in \mathbb{R}^s$, *функция* $f(\vec{x})$ *будет определена в некоторой прокотолотой окрестности точке* $\vec{a} \in \mathbb{R}^d$ *и существует предел* $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = \vec{b}$, *т.е. выполнены условия*

1. $\lim_{\vec{y}\to\vec{b}} g(\vec{y}) = g(\vec{b})$;

2. $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = \vec{b}$.

Тогда существует $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} g(f(\vec{x})) = g(\vec{b})$.

Определение 4.5.2. G — *линейно связное множество* в метрическом пространстве X (в качестве X можно брать и $\mathbb{R}^d$), если $\forall x_1, x_2 \in G \subseteq X$ существует непрерывная функция $\Gamma(t) : \mathbb{R}^1 \mapsto X$, такая, что $\Gamma(t_1) = x_1$, $\Gamma(t_2) = x_2$ и $\Gamma(t) \in G$, $\forall t \in [t_1; t_2]$. Отображение $\Gamma(t)$ называют *путём* в G, соединяющим точки

x_1 и x_2.

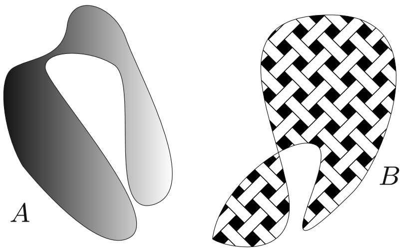


Рис. 4.6: Линейно связные множества. (Здесь множесво B предполагаем замкнутым).

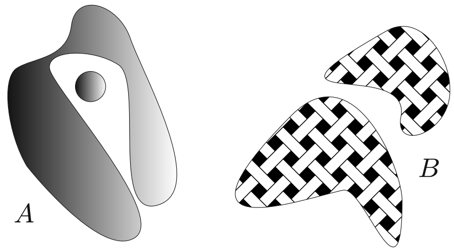


Рис. 4.7: Множества не удовлетворяющие свойству линейной связности.

Теорема 4.5.4 (Глобальные свойства непрерывных функций). **1.** *Пусть $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^m$, f — непрерывна на компакте $\mathcal{K}$. Тогда f - ограничена на компакте $\mathcal{K}$.*

2. *Пусть $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$, $f \in C(\mathcal{K})$, где $\mathcal{K}$ — компакт $\Rightarrow \exists\, \vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{K} : f(\vec{a}) = \min\limits_{\mathcal{K}} f(\vec{x}), f(\vec{b}) = \max\limits_{\mathcal{K}} f(\vec{x})$.*

3. *Пусть $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$, G — линейно связно $f \in C(G)$ и $\vec{a}, \vec{b} \in G$, $f(\vec{a}) = A \in \mathbb{R}$, $f(\vec{b}) = B \in \mathbb{R}$. Тогда для любого $C \in [A, B]$, $\exists \vec{c} \in G : f(\vec{c}) = C$.*

Доказательство. Первые два утверждения доказываются дословным повторением того, что было в случае одной переменной. Докажем третье утверждение.

3)Пусть G — линейно связное. Тогда $\exists \Gamma(t)$ — непрерывная функция такая, что

$$\Gamma(t_1) = \vec{a}, \quad \Gamma(t_2) = \vec{b}.$$

Определим функцию $g(t)$, как функцию одного переменного для $t \in [t_1, t_2]$ по формуле

$$g(t) = f(\Gamma(t)) \Rightarrow g \in C[t_1, t_2].$$

Тогда

$$\begin{cases} g(t_1) = A \\ g(t_2) = B \end{cases}$$

Остаётся воспользоваться одномерной теоремой о промежуточном значении для непрерывной функции. ☐

4.6 Дифференцируемость функции многих переменных.

Определение 4.6.1. Пусть $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^m$, $x^0, x^0 + h \in \mathbb{R}^d$. Если выполнено

$$f(x^0 + h) = f(x^0) + L(x^0)h + o(h), h \to 0,$$

где $L(x^0) : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^m$ — линейное отображение (относительно h), то говорят, что $f \in D(x^0)$, а L — дифференциал функции f в точке x^0.

$$\vec{h} = h_1\vec{e}_1 + \cdots + h_d\vec{e}_d$$

$$L(x^0)\vec{h} = h_1 L(x^0)\vec{e}_1 + \cdots + h_d L(x^0)\vec{e}_d$$

$$o(\vec{h}) = \alpha(\vec{x}^0, \vec{h}) \cdot |h| \quad \text{если } \lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \alpha(\vec{x}^0, \vec{h}) = 0$$

Поскольку $L(x^0)\vec{h} = (L^1(x^0)\vec{h}, L^2(x^0)\vec{h}, \ldots, L^m(x^0)\vec{h})$ и равенство означает m равенств по координатам, то достаточно научиться находить дифференциал $L^j(x^0)$ его координатных функций $f^j : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$. Здесь

$f(x) = (f^1(x), f^2(x), \ldots, f^m(x))$. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$.

$$f(x^0 + h) = f(x^0) + \sum_{k=1}^{d} h_k L_k + o(h), \quad L_k = L(x^0)\vec{e}_k$$

Пусть $\vec{h} = (0, \ldots, 0, h_k, 0, \ldots, 0)$. Тогда

$$\frac{f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_k^0 + h_k, \ldots, x_d^0) - f(x_1^0, \ldots, x_d^0)}{h_k} = L_k + o(1), \quad h_k \to +0.$$

$$L_k = \lim_{h_k \to 0} \frac{f(\vec{x}^0 + h_k \vec{e}_k) - f(\vec{x}^0)}{h_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k}\Big|_{\vec{x}=\vec{x}^0},$$

последнее выражение мы называем *частной производной* по переменной x_k.

Из определения дифференцируемости функции в точке $x^0 \in \mathbb{R}^d$ вытекает непрерывность этой функции в точке x^0, поскольку из определения дифференцируемости следует равенство $\lim_{h \to \vec{0}} f(x^0 + h) = f(x^0)$. Данное условие называется *необходимым условием дифференцируемости.*

Глядя на определение дифференцируемости возникает мысль "а не следует ли дифференцируемость из существования частных производных"? Покажем на примере, что существование частных производных не гарантирует дифференцируемости в заданной точке.

П р и м е р 4.6.1. Исследуем функцию от двух переменных

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}.$$

Покажем, что у данной функции существуют частные производные и найдём их:

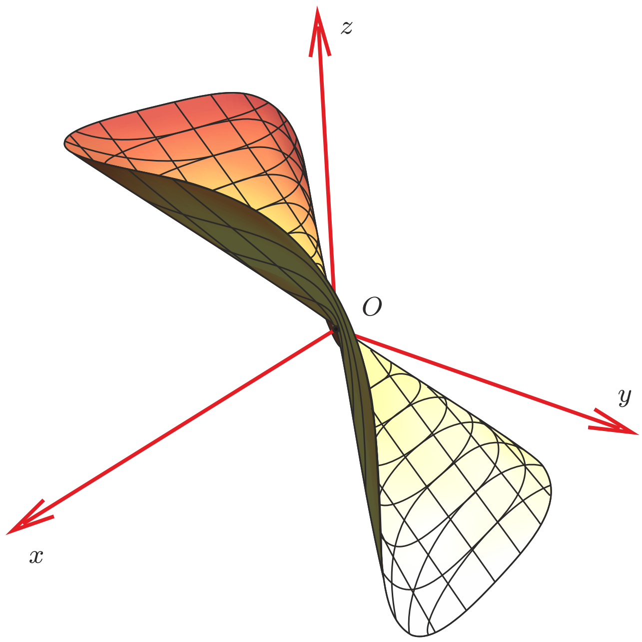


Рис. 4.8: График функции $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$.

$$f'_x(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1,$$
$$f'_y(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{y} = 1.$$

Выясним является ли данная функция дифференцируемой в точке $(0,0)$. Действительно, дифференцируемость функции $f(x,y)$ в точке $(0,0)$ равносильно равенству

$$f(x,y) = f(0,0) + f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y + o(\sqrt{x^2+y^2}), \quad (x,y) \to (0,0),$$

или

$$\sqrt[3]{x^3+y^3} = x + y + o(\sqrt{x^2+y^2}), \quad (x,y) \to (0,0).$$

Докажем, что последнее равенство невыполняется. Для этого докажем, что предел

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{x^3+y^3} - x - y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

не существует (и тем более не равен нулю). Предположим, что последний предел существует. Тогда должен существовать предел от той же функции по произвольной прямой вида $y = kx$, $x \to 0$, т.е. $(x, kx) \to (0,0)$, причём независить от $k \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^3+(kx)^3} - x - kx}{\sqrt{x^2+(kx)^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x(\sqrt[3]{1+k^3} - 1 - k)}{|x|\sqrt{1+k^2}}.$$

Поскольку оба односторонних предела $x \to +0$ и $x \to -0$ существует, но не равны друг другу, то двойного предела не существует, а следовательно исходная функция не дифференцируема в точке $(0,0)$. Отметим, что, если бы последний предел существовал бы, то всё равно отсюда вытекало бы, что двойной предел не существет, т.к. он бы зависит от k.

Теорема 4.6.1 (Лагранжа). *Пусть $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Пусть $f \in D(\vec{a}, \vec{b})$, $f \in C[\vec{a}, \vec{b}]$. Тогда существует $\vec{c} \in (\vec{a}, \vec{b})$ такая, что*

$$f(\vec{b}) - f(\vec{a}) = f'(\vec{c})(\vec{b} - \vec{a}) = \sum_{k=1}^{d} f'_{x_k}(\vec{c})(b_k - a_k).$$

Здесь отрезок в пространстве $\mathbb{R}^d$ понимается как

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \{\vec{a}t + (1-t)\vec{b}; t \in [0,1]\}.$$

Доказательство.

$$F(t) = f(\vec{a}(1-t) + t\vec{b}) = f(\vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}))$$

$$\left.\begin{matrix} F \in C[0,1] \\ F \in D(0,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow F(1) - F(0) = F'(\theta) = \sum_{k=1}^{d} f'_{x_k}(\vec{a} + \theta(\vec{b} - \vec{a}))(b_k - a_k),$$

где $\theta \in (0,1)$, $\vec{c} \in (\vec{a}, \vec{b})$. □

Теорема 4.6.2 (Достаточное условие дифференцируемости). *Пусть $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Если существуют и непрерывны $f'_{x_1}, \dots, f'_{x_d}$ в точке $\vec{a}$ тогда $f \in D(\vec{a})$.*

Доказательство.

$$\begin{aligned} f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a}) = & (f(a_1 + h_1, \dots, a_d + h_d) - f(a_1, a_2 + h_2, \dots, a_d + h_d)) + \\ & + (f(a_1, a_2 + h_2, \dots, a_d + h_d) - f(a_1, a_2, a_3 + h_3, \dots, a_d + h_d)) + \dots + \\ & + (f(a_1, \dots, a_{d-1}, a_d + h_d) - f(a_1, \dots, a_d)) = \\ = & f'_{x_1}(a_1 + \theta_1 h_1, a_2 + h_2, \dots, a_d + h_d)h_1 + f'_{x_2}(a_1, a_2 + \theta_2 h_2, a_3 + h_3, \dots, a_d + h_d)h_2 + \\ & + \dots + f'_{x_d}(a_1, \dots, a_{d-1}, a_d + \theta_d h_d)h_d = \\ = & (f'_{x_1}(\vec{a}) + o(1))h_1 + (f'_{x_2}(\vec{a}) + o(1))h_2 + \dots + (f'_{x_d}(\vec{a}) + o(1))h_d = \sum_{k=1}^{d} f'_{x_k}(\vec{a})h_k + o(|h|), \;\; h \to 0. \end{aligned}$$

Здесь $\theta_k \in (0;1)$, для всех $k = 1, \dots n$. □

Теорема 4.6.2 даёт только достаточное условие, покажем, что существуют функции не удовлетворяющие условию теоремы 4.6.2, но тем не менее дифференцируемые в точке.

П р и м е р 4.6.2. Исследуем функцию от двух переменных

$$f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^4}.$$

Покажем, что у данной функции существуют частные производные и найдём их:

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1,$$
$$f'_y(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0}\frac{y^{4/3}}{y} = 0.$$

Заметим, что производная по переменной x разрывна в точке $(0,0)$. Действительно, для $y\neq 0$ справедливо

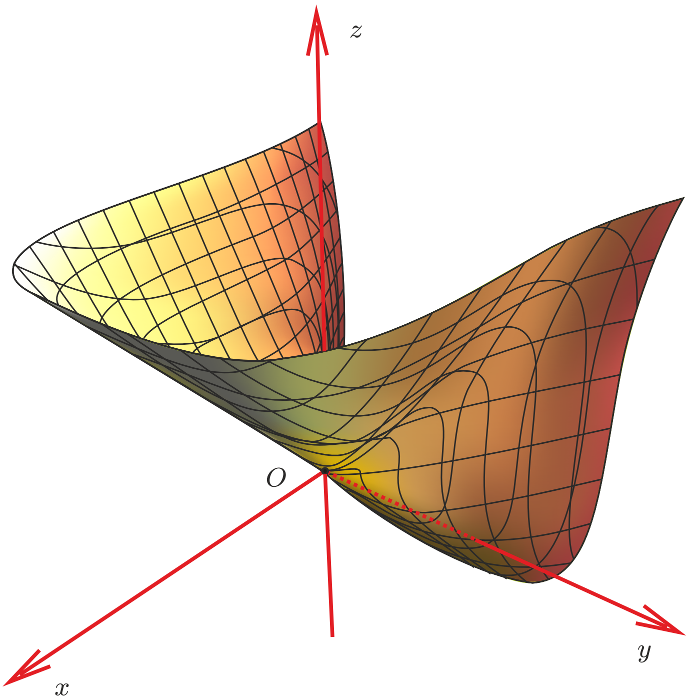


Рис. 4.9: График функции $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^4}$.

$$f'_x(0,y) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^3+y^4}-\sqrt[3]{y^4}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{y^4}\left(\sqrt[3]{1+\frac{x^3}{y^4}}-1\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{3xy^{8/3}} = 0.$$

Следовательно $\lim_{y\to 0} f'_x(0,y) = 0 \neq 1 = f'_x(0,0)$. Выясним является ли данная функция дифференцируемой в точке $(0,0)$. Действительно, дифференцируемость функции $f(x,y)$ в точке $(0,0)$ равносильна равенству

$$f(x,y) = f(0,0) + f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y + o(\sqrt{x^2+y^2}), \quad (x,y)\to(0,0),$$

или

$$\sqrt[3]{x^3+y^4} = x + o(\sqrt{x^2+y^2}), \quad (x,y)\to(0,0).$$

Докажем, что последнее равенство выполняется. Для этого докажем, что предел

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt[3]{x^3+y^4}-x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

существует и равен нулю. Перейдём в полярную систему координат.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{x^3+y^4}-x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0+} \frac{r(\sqrt[3]{\cos^3\varphi + r\sin^4\varphi} - \cos\varphi)}{r} = \lim_{r\to 0+} (\sqrt[3]{\cos^3\varphi + r\sin^4\varphi} - \cos\varphi) = 0.$$

Следовательно функция $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^4}$ дифференцируема в точке $(0,0)$.

Определение 4.6.2. Производные высших порядков в случае многих переменных определяются также, как и в случае одной переменной — последовательно, т.е.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right); \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right).$$

Пример 4.6.3. Покажем, что вообще говоря, частные производные второго порядка, взятые в разном порядке различны. Рассмотрим функцию

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{если } x^2+y^2 \neq 0; \\ 0, & \text{если } x=y=0. \end{cases}$$

Тогда

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{\vec{0}} \neq \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right|_{\vec{0}}.$$

Точнее

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{\vec{0}} = -1, \quad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right|_{\vec{0}} = 1.$$

Найдём частные производные первого порядка:

$$f'_x(x,y) = \begin{cases} y \cdot \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right), & \text{если } x^2+y^2 \neq 0; \\ 0, & \text{если } x=y=0. \end{cases}$$

$$f'_y(x,y) = \begin{cases} x \cdot \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right), & \text{если } x^2+y^2 \neq 0; \\ 0, & \text{если } x=y=0. \end{cases}$$

При $y \neq 0$ получаем $f'_x(0,y) = -y$, откуда

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f'_x(0,y) - f'_x(0,0)}{y} = -1.$$

При $x \neq 0$ получаем $f'_y(x,0) = x$, откуда

$$f''_{yx}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'_y(x,0) - f'_y(0,0)}{x} = 1.$$

Теорема 4.6.3 (теорема Шварца)**.** *Пусть $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Тогда если существуют частные производные*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k}$$

в точке $\vec{a}$ и непрерывны в этой точке, то

$$f''_{x_k x_l}(\vec{a}) = f''_{x_l x_k}(\vec{a}).$$

Доказательство. Положим $y_1 = x_k$, $y_2 = x_l$. Рассмотрим функцию

$$\Delta = \Delta(y_1, y_2, h_1, h_2) = f(y_1 + h_1, y_2 + h_2) - f(y_1, y_2 + h_2) - f(y_1 + h_1, y_2) + f(y_1 . y_2).$$

Определим $\varphi(y_1 + t) = f(y_1 + t, y_2 + h_2) - f(y_1 + t, y_2)$. Тогда из теоремы Лагранжа, получаем

$$\begin{aligned}\Delta &= (f(y_1 + h_1, y_2 + h_2) - f(y_1 + h_1, y_2)) - (f(y_1, y_2 + h_2) - f(y_1, y_2)) = \\ &= \varphi(y_1 + h_1) - \varphi(y_1) = \varphi'(y_1 + \theta_1 h_1) h_1 = \\ &= \left(f'_{y_1}(y_1 + \theta_1 h_1, y_2 + h_2) - f'_{y_1}(y_1 + \theta_1 h_1, y_2)\right) h_1 = f''_{y_1 y_2}(y_1 + \theta_1 h_1, y_2 + \theta_2 h_2) h_1 h_2,\end{aligned}$$

где $\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$. Аналогично получаем

$$\begin{aligned}\Delta &= (f(y_1 + h_1, y_2 + h_2) - f(y_1, y_2 + h_2)) - (f(y_1 + h_1, y_2) - f(y_1, y_2)) = \\ &= \left(f'_{y_2}(y_1 + h_1, y_2 + \theta_2^* h_2) - f'_{y_2}(y_1, y_2 + \theta_2^* h_2)\right) h_2 = f''_{y_2 y_1}(y_1 + \theta_1^* h_1, y_2 + \theta_2^* h_2) h_1 h_2,\end{aligned}$$

где $\theta_1^*, \theta_2^* \in (0, 1)$. Доказано равенство

$$f''_{y_2 y_1}(y_1 + \theta_1^* h_1, y_2 + \theta_2^* h_2) = f''_{y_1 y_2}(y_1 + \theta_1 h_1, y_2 + \theta_2 h_2),$$

которое ввиду непрерывности вторых частных производных равносильно

$$f''_{y_2 y_1}(y_1, y_2) + o(1) = f''_{y_1 y_2}(y_1, y_2) + o(1), \quad |h| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \to 0.$$

Откуда вытекает утверждение теоремы. □

Контрольные вопросы.

1. Дайте определение дифференцируемости функции в точке (случай $\mathbb{R}^d$).
2. Сформулируете теорему Шварца.

Упражнения к 4.6

Упражнение 4.6.1. *Доказать, что функция* $f(x, y) = \sqrt[3]{xy^2}$ *непрерывна на* $[-1; 1]^2$ *и существуют частные производные в каждой точке, но функция не дифференцируема в* $(0, 0)$.

Упражнение 4.6.2. *Доказать, что функция*

$$f(x,\ y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \cos \dfrac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

дифференцируема в точке $(0,\ 0)$, *но её частные производные — разрывные функции в точке* $(0,\ 0)$.

Упражнение 4.6.3. *Доказать, что функция*

$$f(x,\ y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

всюду имеет равные смешанные производные второго порядка (в том числе и в точке $(0,\ 0)$*), однако частные производные второго порядка не являются непрерывными в точке* $(0,\ 0)$.

Упражнение 4.6.4. *Будет ли функция*

$$f(x,\ y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 5y^2}{|x| + |y|}, & x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

непрерывной в точке $(0; 0)$*? Является ли она дифференцируемой в точке* $(0,\ 0)$*?*

Ответы:

4.6.1 . **4.6.4** Непрерывна, но не дифференцируема.

4.7 Теорема о неявной функции.

Нам хорошо известен пример окружности. Уравнение вида $x^2 + y^2 = 1$. Это простейшая неявно заданная функция.

Зададимся вопросом: *когда существует окрестность точки x_0 для точки окружности (x_0, y_0) в которой существует её явное задание как функции $y = y(x)$?*

Поскольку из уравнения окружности можно найти: $y = \pm\sqrt{1-x^2}$, то для любых точек $x_0 \in (-1,1)$ ответ на вопрос положителен, т.е. существует явное выражение в некоторой окрестности. В точках же $x_0 = \pm 1$ не существет однозначной функции $y = y(x)$, определённой в некоторой окрестности точки $x_0 = 1$ либо $x_0 = -1$, которая бы задавала уравнение окружности (а не её части).

Приведём общий результат такого рода:

Теорема 4.7.1. *Пусть $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$. И выполнены следующие условия:*

1. $f(x_0, y_0) = 0$.

2. $f, f'_x, f'_y \in C(\mathcal{U}_\delta(x_0, y_0))$.

3. $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Тогда существует окрестность $I_\delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ такая, что

- *Существует функция $y = \varphi(x)$ на I_δ, такая, что $y_0 = \varphi(x_0)$ и $f(x, \varphi(x)) = 0$, $\forall x \in I_\delta$. Т.е. функция $y = \varphi(x)$ является явным заданием исходной функции, заданной неявно.*
- *Кроме того $y = \varphi(x) \in C^1(I_\delta)$, причём $y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y}$.*

Доказательство. Из непрерывности $\exists \mathcal{U}(x_0, y_0) : |f'_y| \geqslant m > 0$, $|f'_x| \leqslant M$. Докажем существование функции $y = \varphi(x)$ такой, что $f(x, \varphi(x)) = 0$. Предположим, что $f'_y(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow f(x_0, y) \uparrow$ в некоторой окрестности y_0. Так как функция возрастает, а в точке (x_0, y_0) выполнено $f(x_0, y_0) = 0$, то существует такое $\tilde{\delta}_1 > 0$,

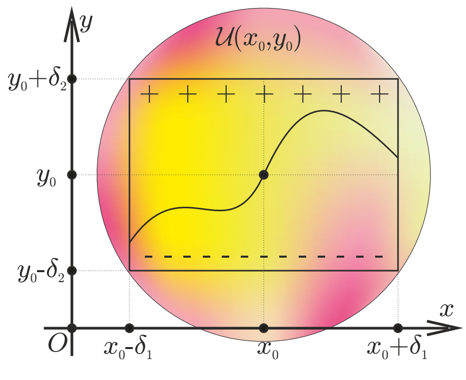


Рис. 4.10: К теореме о неявной функции.

что $f(x_0, y_0 - \tilde{\delta}_1) < 0$, $f(x_0, y_0 + \tilde{\delta}_1) > 0$. Из непрерывности $f(x, y)$ вытекает существование δ^* такого, что $\forall x \in [x_0 - \delta^*, x_0 + \delta^*]$ выполнено $f(x, y_0 - \tilde{\delta}_1) < 0$ и $f(x, y_0 + \tilde{\delta}_1) > 0$.

$$\exists y = \varphi(x) \quad f(x, \varphi(x)) = 0.$$

Рассмотрим точку $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, лежащую на графике функции $y = \varphi(x)$. Тогда из теоремы Лагранжа получаем

$$0 = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta x + f'_y(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta y, \quad \theta \in (0,1).$$

Откуда вытекает равенство

$$\Delta y = -\frac{f'_x}{f'_y}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta x. \tag{4.7.1}$$

Следовательно
$$|\Delta y| \leqslant \frac{M}{m}|\Delta x|.$$
Откуда $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$, что означает непрерывность функции $\varphi(x)$, т.е.
$$y = \varphi(x) \in C[x_0 - \delta^*, x_0 + \delta^*].$$
Остаётся в равенстве (4.7.1) перейти к пределу:
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'_x}{f'_y}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y) = -\frac{f'_x}{f'_y}.$$
□

Теорема 4.7.2. *Пусть $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. И выполнены следующие условия:*

1. $f(\vec{x}_0, y_0) = 0$.

2. $f, f'_{x_k}, f'_y \in C(\mathcal{U}_\delta(\vec{x}_0, y_0))$, $k = 1, \ldots d$.

3. $f'_y(\vec{x}_0, y_0) \neq 0$.

Тогда существует окрестность $I_\delta = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^d : |x_k - x_k^0| \leqslant \delta,\ k = 1, \ldots d\}$. такая, что

- *Существует функция $y = \varphi(\vec{x})$ на I_δ, такая, что $y_0 = \varphi(\vec{x}_0)$ и $f(\vec{x}, \varphi(\vec{x})) = 0$, $\forall x \in I_\delta$. Т.е. функция $y = \varphi(\vec{x})$ является явным заданием исходной функции, заданной неявно.*
- *$y = \varphi(\vec{x}) \in C^1(I_\delta)$ (т.е. все частные производные непрерывны), причём $y'_{x_k} = -\frac{f'_{x_k}}{f'_y}$, $k = 1, \ldots, d$.*

Доказательство. Доказательство существования функции $y = \varphi(\vec{x})$ повторят дословно рассуждения в предыдущей теореме. Докажем непрерывность функции $y = \varphi(\vec{x})$ в некоторой окрестности
$$0 = f(\vec{x}_0 + \Delta\vec{x}, y_0 + \Delta y) - f(\vec{x}_0, y_0) =$$
$$= \sum_{k=1}^{d} f'_{x_k}(\vec{x}_0 + \Theta\Delta\vec{x}, y_0 + \Theta\Delta y)\Delta x^k + f'_y(\vec{x}_0 + \Theta\Delta\vec{x}, y_0 + \Theta\Delta y)\Delta y.$$
Аналогично доказывается, что $\Delta y \to 0$ откуда вытекает $y = \varphi(\vec{x}) \in C(I_\delta)$. Для нахождения частных производных рассмотрим
$$\Delta x = (0, \ldots, 0, \Delta x^k, 0, \ldots, 0) \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x_k} = -\frac{f'_{x_k}}{f'_y}(\vec{x}_0 + \Theta\Delta\vec{x}, y + \Theta\Delta y).$$
□

Теорема 4.7.3. *Пусть $d, m \in \mathbb{N}$, $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_d)$, $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_m)$ и выполнены условия*

1. $\vec{f}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = \vec{0}$.

2. $\vec{f} : \mathbb{R}^{d+m} \to \mathbb{R}^m \quad \vec{f} = (f^1, \ldots, f^m)$, $\vec{f}(\vec{x}, \vec{y}), \vec{f}'_{x_k}, \vec{f}'_{y_l} \in C(O(\vec{x}_0, \vec{y}_0))$, *где* $k = 1, \ldots, d$, $l = 1, \ldots, m$.

3. $\frac{D(f_1, \ldots, f_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)}$ *— обратимая матрица в точке* $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$.

Тогда существует окрестность $I_{\vec{\delta}} = \{\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^d : |x_k - x_k^0| \leqslant \delta_k, k = 1, \ldots, d\}$ такая, что

- $y_l(\vec{x}) = \varphi_l(\vec{x})$, $l = 1, \ldots, m$ *— явные решения исходного уравнения, т.е.* $\vec{f}(\vec{x}, \vec{\varphi}(\vec{x})) = \vec{0}$ *и* $\vec{y}_0 = \vec{\varphi}(\vec{x}_0)$.

- $(y_l)'_{x_k} \in C(I_\delta)$, *где* $k = 1, \dots, d$, $l = 1, \dots, m$ *и* $y' = -(f'_y)^{-1} \cdot f'_x$.

Здесь $y' = \begin{pmatrix} y^1_{x_1} & y^1_{x_2} & \dots & y^1_{x_d} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y^m_{x_1} & y^m_{x_2} & \dots & y^m_{x_d} \end{pmatrix}$, $f'_x = \begin{pmatrix} f^1_{x_1} & f^1_{x_2} & \dots & f^1_{x_d} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^m_{x_1} & f^m_{x_2} & \dots & f^m_{x_d} \end{pmatrix}$, $f'_y = \begin{pmatrix} f^1_{y_1} & f^1_{y_2} & \dots & f^1_{y_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^m_{y_1} & f^m_{y_2} & \dots & f^m_{y_m} \end{pmatrix}$.

А $(f'_y)^{-1}$ — обратная матрица к f'_y.

П р и м е р 4.7.1. Пусть заданна функция $f:\ \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$.

$$(x, y, z) \mapsto (x^2 - 2yz + 1, 3x^3 - y - 2z).$$

Рассмотрим неявно заданную функцию $f = 0$. Проверить, что существует неявно заданная функция $(y(x), z(x))$ в окрестности точки $(1; 1; 1)$ и найти её частные производные.

Доказательство. Введём более удобные обозначения (используемые в теореме): $f:\ (x, y_1, y_2) \mapsto (f^1, f^2) = (x^2 - 2y_1y_2 + 1, 3x^3 - y_1 - 2y_2)$. Легко проверить, что $f(1; 1; 1) = 0$. Найдём матрицы из частных производных:

$$f'_y = \begin{pmatrix} f^1_{y_1} & f^1_{y_2} \\ f^2_{y_1} & f^2_{y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y_2 & -2y_1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\det(f'_y)|_{(1;1;1)} = 2$, то существует обратная матрица $(f'_y)^{-1}$, найдём её:

$$(f'_y)^{-1} = \frac{1}{2(2y_2 - y_1)} \begin{pmatrix} -2 & 2y_1 \\ 1 & -2y_2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad f'_x = \begin{pmatrix} f^1_x \\ f^2_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 9x^2 \end{pmatrix}.$$

Откуда

$$y' = -(f'_y)^{-1} \cdot f'_x = -\frac{1}{2(2y_2 - y_1)} \begin{pmatrix} -2 & 2y_1 \\ 1 & -2y_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ 9x^2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2(2y_2 - y_1)} \begin{pmatrix} -4x + 18x^2y_1 \\ 2x - 18x^2y_2 \end{pmatrix}.$$

Возращаясь к старым переменным, получаем:

$$y'_x = \frac{2x - 9x^2y}{2z - y}, \quad z'_x = \frac{-x + 9x^2z}{2z - y}.$$

Заметим, что конечно же, частные производные y'_x и z'_x можно было бы найти использую уравнения в системе

$$\begin{cases} x^2 - 2yz + 1 = 0, \\ 3x^3 - y - 2z = 0. \end{cases}$$

на дифференциалы. Т.е. из системы:

$$\begin{cases} xdx - zdy - ydz = 0, \\ 9x^2dx - dy - 2dz = 0. \end{cases}$$

□

П р и м е р 4.7.2. Пусть заданно отображение $f:\ \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^2$.

$$(x, y, z, w) \mapsto (f^1(x, y, z, w), f^2(x, y, z, w)).$$

Рассмотрим неявно заданные функции $z = z(x, y)$, $w = w(x, y)$ в окрестности U точки (x_0, y_0, z_0, w_0), где (x_0, y_0, z_0, w_0) решение системы $(f^1(x, y, z, w), f^2(x, y, z, w)) = (0, 0)$. Известно, что функция f имеет все частные непрерывные производные окрестности U и

$$\begin{vmatrix} f^1_z & f^1_w \\ f^2_z & f^2_w \end{vmatrix} \neq 0, \quad \text{в} \quad (x_0, y_0, z_0, w_0).$$

Проверить, что существуют явно заданные функции $(z(x, y), w(x, y))$ в окрестности точки (x_0, y_0, z_0, w_0) и найти их частные производные.

Доказательство. Введём более удобные обозначения (используемые в теореме):

$$f:\ (x_1,x_2,y_1,y_2)\mapsto (f^1(x_1,x_2,y_1,y_2), f^2(x_1,x_2,y_1,y_2)),$$

$\vec{x}^0=(x_0,y_0)$, $\vec{y}^0=(z_0,w_0)$. Проверим, что выполнены условия теоремы о неявной функции. Действительно,

1. $\vec{f}:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2$, $\quad \vec{f}=(f_1,f_2)$, $\vec{f}(\vec{x},\vec{y}), \vec{f}'_{x_1}, \vec{f}'_{x_2}, \vec{f}'_{y_1}, \vec{f}'_{y_2}\in C(U(\vec{x}^0,\vec{y}^0))$.

2. $\vec{f}(\vec{x}^0,\vec{y}^0)=(0,0)$.

3. $\frac{D(f_1,f_2)}{D(y_1,y_2)}$ — обратимая матрица в точке $(\vec{x}^0,\vec{y}^0)$, поскольку отличен от нуля соответствующий определитель.

Тогда существет окрестность

$$I_\delta=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2:\ \sqrt{(x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2}\leqslant\delta\}$$

такая, что в этой окрестности существуют функции $(y_1(x_1,x_2),y_2(x_1,x_2))$, которые являются явными решениями системы

$$\left\{\begin{array}{l} f^1(x_1,x_2,y_1(x_1,x_2),y_2(x_1,x_2))=0,\\ f^2(x_1,x_2,y_1(x_1,x_2),y_2(x_1,x_2)))=0,\end{array}\right. \tag{4.7.2}$$

причём $y_1,y_2\in C^1(I_\delta)$. Найдём явный вид этих частных производных:

I. Способ. Воспользуемся теоремой о неявной функции.

$$\begin{pmatrix} y^1_{x_1} & y^1_{x_2}\\ y^2_{x_1} & y^2_{x_2}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} f^1_{y_1} & f^1_{y_2}\\ f^2_{y_1} & f^2_{y_2}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} f^1_{x_1} & f^1_{x_2}\\ f^2_{x_1} & f^2_{x_2}\end{pmatrix}=-\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} f^2_{y_2} & -f^1_{y_2}\\ -f^2_{y_1} & f^1_{y_1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f^1_{x_1} & f^1_{x_2}\\ f^2_{x_1} & f^2_{x_2}\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} f^2_{y_2}f^1_{x_1}-f^1_{y_2}f^2_{x_1} & f^2_{y_2}f^1_{x_2}-f^1_{y_2}f^2_{x_2}\\ f^1_{y_1}f^2_{x_1}-f^1_{x_1}f^2_{y_1} & f^1_{y_1}f^2_{x_2}-f^1_{x_2}f^2_{y_1}\end{pmatrix}=-\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x_1,y_2)} & \frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x_2,y_2)}\\ \frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(y_1,x_1)} & \frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(y_1,x_2)}\end{pmatrix}.$$

Итого мы нашли:

$$y^1_{x_1}=-\frac{\left|\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x_1,y_2)}\right|}{\left|\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(y_1,y_2)}\right|},\quad y^1_{x_2}=-\frac{\left|\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x_2,y_2)}\right|}{\left|\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(y_1,y_2)}\right|},\quad y^2_{x_1}=-\frac{\left|\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(y_1,x_1)}\right|}{\left|\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(y_1,y_2)}\right|},\quad y^2_{x_2}=-\frac{\left|\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(y_1,x_2)}\right|}{\left|\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(y_1,y_2)}\right|}.$$

II. Способ. Найдём $y^1_{x_1}$ прямым вычислением, использую систему (4.7.2). Для этого вычислим производную по преименной x_1

$$\left\{\begin{array}{l} f^1_{x_1}+f^1_{y_1}y^1_{x_1}+f^1_{y_2}y^2_{x_1}=0,\\ f^2_{x_1}+f^2_{y_1}y^1_{x_1}+f^2_{y_2}y^2_{x_1}=0.\end{array}\right.\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{l} f^1_{y_1}y^1_{x_1}+f^1_{y_2}y^2_{x_1}=-f^1_{x_1},\\ f^2_{y_1}y^1_{x_1}+f^2_{y_2}y^2_{x_1}=-f^2_{x_1}.\end{array}\right.$$

Согласно правилам Крамера, получаем

$$y^1_{x_1}=-\frac{\left|\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x_1,y_2)}\right|}{\left|\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(y_1,y_2)}\right|},\quad y^2_{x_1}=-\frac{\left|\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(y_1,x_1)}\right|}{\left|\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(y_1,y_2)}\right|}.$$

Аналогично можно получить формулы для нахождения $y^1_{x_2}$, $y^2_{x_2}$. $\square$

П р и м е р 4.7.3. Рассмотрим систему уравнений:

$$\left\{\begin{array}{l} 3xyzw+2x^3y^3z^3+4w^3=9,\\ 5x+y+z^3+w^3+w^2z^2=9.\end{array}\right.$$

(а) Существуют ли явные решения системы, в виде функций $z(x,y)$ и $w(x,y)$ в точке $x=1$, $y=1$, $z=1$, $w=1$? Будут ли они дифференцируемы в этой точке?

(б) Если, да, то найдите z'_x, w'_x в этой точке.

Доказательство. Проверим, что выполнены условия теоремы о неявном отображении. Положим $f^1(x,y,z,w) = 3xyzw + 2x^3y^3z^3 + 4w^3 - 9$, $f^2(x,y,z,w) = 5x + y + z^3 + w^3 + w^2z^2 - 9$. Тогда

1. $f^1(1,1,1,1) = 0$, $f^2(1,1,1,1) = 0$.

2. f^1, f^2, $f^1_{x_1}$, $f^1_{x_2}$, $f^2_{x_1}$, $f^2_{x_2} \in C(U(1,1,1,1))$.

3. $\frac{D(f^1,f^2)}{D(z,w)}$ — обратимая матрица в точке $(1,1,1,1)$, поскольку определитель

$$\left|\frac{D(f^1,f^2)}{D(z,w)}\right| = \begin{vmatrix} f^1_z & f^1_w \\ f^2_z & f^2_w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4xyw + 6x^3y^3z^2 & 12w^2 + 4xyz \\ 2w^2z + 3z^2 & 3w^2 + 2wz^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 16 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = -30$$

отличен от нуля.

Тогда существет окрестность

$$I_\delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} \leqslant \delta\}$$

такая, что в этой окрестности существуют функции $(z(x,y), w(x,y))$, которые являются явными решениями системы. Причём $z(x,y), w(x,y) \in C^1(I_\delta)$. Найдём явный вид этих частных производных:

Согласно, разобранному выше примеру, имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\left|\frac{\partial(f^1,f^2)}{\partial(x,w)}\right|}{\left|\frac{\partial(f^1,f^2)}{\partial(z,w)}\right|} = -\frac{\begin{vmatrix} 4yzw + 6x^2y^3z^3 & 12w^2 + 4xyz \\ 5 & 3w^2 + 2wz^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4xyw + 6x^3y^3z^2 & 12w^2 + 4xyz \\ 2w^2z + 3z^2 & 3w^2 + 2wz^2 \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 10 & 16 \\ 5 & 5 \end{vmatrix}}{-30} = -1,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\left|\frac{\partial(f^1,f^2)}{\partial(z,y)}\right|}{\left|\frac{\partial(f^1,f^2)}{\partial(z,w)}\right|} = -\frac{\begin{vmatrix} 4xyw + 6x^3y^3z^2 & 4xzw + 6x^3y^2z^3 \\ 3z^2 + 2wz^2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4xyw + 6x^3y^3z^2 & 12w^2 + 4xyz \\ 2w^2z + 3z^2 & 3w^2 + 2wz^2 \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 10 & 10 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{-30} = -\frac{4}{3}.$$

□

Контрольные вопросы.

1. Сформулируете теорему о неявной функции в предположении, что функция зависит от трёх независимых переменных.
2. Сформулируете теорему о неявном отображении для случая (а) двух функций и двух независимых переменных, (б) двух функций и трёх независимых переменных.
3. Докажите, что в теореме о неявном отображении в случае $d = m$ частные производные из системы

$$\begin{cases} f^1(x_1,\dots,x_d,y_1,\dots,y_d) = 0, \\ f^2(x_1,\dots,x_d,y_1,\dots,y_d) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f^d(x_1,\dots,x_d,y_1,\dots,y_d) = 0. \end{cases}$$

можно искать по формуле

$$(y_l)'_{x_k} = -\frac{\left|\frac{\partial(f^1,\dots,f^{l-1},f^l,f^{l+1},\dots,f^d)}{\partial(y_1,\dots,y_{l-1},x_k,y_{l+1},\dots,y_d)}\right|}{\left|\frac{\partial(f_1,\dots,f_d)}{\partial(y_1,\dots,y_d)}\right|},$$

где $k, l = 1,\dots d$.

Упражнения к 4.7

Упражнение 4.7.1. *Функция $y(t)$ определяется при помощи уравнения*

$$(a) \int_0^t f(x,y)\,dx = 1 + t + y^3, \qquad (b) \int_0^t f(x,y)\,dx = \int_0^y g(x,y)\,dx.$$

Найдите y'_t.

Упражнение 4.7.2. *Рассмотрим систему уравнений*

$$\begin{cases} xyz^2 + x^3y + 3y^3z^3 - 2x = 3, \\ 2x^2yz + z^2 + 3xy + 5yx^3 = -5. \end{cases}$$

(а) Определены ли функции $x(z)$ и $y(z)$ в некоторой окрестности точки $A = (-1, 1, 1)$? (б) Найдите dg/dz, где $g(z) = x(z)y(z)$.

Упражнение 4.7.3. *Рассмотрим систему уравнений:*

$$\begin{cases} 3xyzw + x^5y^5z^5 + w^3 = 5, \\ x + 3y + 2z^3 + w^3 + w^2z^2 = 8. \end{cases}$$

(а) *Существуют ли явные решения системы, в виде функций $z(x,y)$ и $w(x,y)$ в точке $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$, $w = 1$? Будут ли они дифференцируемы в этой точке?*

(б) *Если да, то найдите z'_x, w'_x в этой точке.*

Упражнение 4.7.4. *Рассмотрим систему уравнений:*

$$\begin{cases} 2xyzuvw + u^5x^7y^7w^5 + v^5 = 4, \\ x - y + 2z + u^3 + v^3w^3 + u - v = 4, \\ xu^5 + (y+z)v^5 + u^3v^3w^3 = 4. \end{cases}$$

(а) *Существуют ли явные решения системы, в виде функций $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$ и $w(x,y,z)$ в точке $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$, $u = 1$, $v = 1$, $w = 1$? Будут ли они дифференцируемы в этой точке?*

(б) *Если да, то найдите w'_x в этой точке.*

Ответы:
4.7.1 (a) $-\frac{f(t,y)-1}{\int_0^t f'_y(x,y)dx - 3y^2}$, (b) $-\frac{f(t,y)}{\int_0^t f'_y(x,y)\,dx - \int_0^y g'_y(x,y)\,dx - g(y,y)}$. *Указание:* По формуле $y'_t = -F'_t/F'_y$. **4.7.2** ???? **4.7.3** $\begin{pmatrix} z'_x & z'_y \\ w'_x & w'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17/4 & 11/4 \\ -7 & w'_y \end{pmatrix}$ **4.7.4** $-\frac{55}{21}$.

4.8 Формула Тейлора для функции многих переменных и геометрические приложения

4.8.1 Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа

Определение 4.8.1. Пусть задана функция $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Будем писать $f \in C^{n+1}(\mathcal{U}(\vec{x}_0))$ если у функции $f(x)$ существуют все непрерывные производные в окрестности $\mathcal{U}(\vec{x}_0)$ до порядка $n+1$ включительно.

Например,

- $f(x_1, x_2) \in C^2(\mathcal{U}(\vec{x}_0))$ означает, что

$$f'_{x_1},\ f'_{x_2},\ f''_{x_1x_1},\ f''_{x_1x_2},\ f''_{x_2x_1},\ f''_{x_2x_2} \in C(\mathcal{U}(\vec{x}_0)).$$

- $f(x_1, x_2, x_3) \in C^3(\mathcal{U}(\vec{x}_0))$ означает, что

$$f'_{x_k},\ f''_{x_kx_l},\ f'''_{x_kx_lx_m} \in C(\mathcal{U}(x_0, y_0)), \quad \text{для любых } k, l, m \in \{1, 2, 3\}.$$

Теорема 4.8.1 (ряд Тейлора с остатком в форме Лагранжа)**.** *Пусть $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ и заданна функция $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ и выполняется*

- *$f \in C^{n+1}(\mathcal{U}(\vec{x}_0))$;*
- *$[\vec{x}_0, \vec{x}_0 + \vec{h}] \in \mathcal{U}(\vec{x}_0)$.*

Тогда

$$f(\vec{x}_0+\vec{h}) = f(\vec{x}_0) + (\sum_{k=1}^{d} h_k \frac{\partial}{\partial x_k}) f|_{\vec{x}=\vec{x}_0} + \frac{(\sum_{k=1}^{d} h_k \frac{\partial}{\partial x_k})^2 f|_{\vec{x}=\vec{x}_0}}{2!} + \dots +$$
$$+ \frac{(\sum_{k=1}^{d} h_k \frac{\partial}{\partial x_k})^n f|_{\vec{x}=\vec{x}_0}}{n!} + \frac{(\sum_{k=1}^{d} h_k \frac{\partial}{\partial x_k})^{n+1} f|_{\vec{x}=\vec{x}_0+\theta\vec{h}}}{(n+1)!}, \quad \theta \in (0,1).$$

Доказательство. Покажем как свести данную теорему к ряду Тейлора для одной переменной. Рассмотрим отрезок в d-мерном пространстве $[\vec{x}_0, \vec{x}_0+\vec{h}] = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^d : \vec{x^0} + t\vec{h}, t \in [0,1]\}$. Поскольку многомерный отрезок параметризуется одномерной переменной $t \in \mathbb{R}^1$, то мы можем рассмотреть одномерную функцию на отрезке $[0,1]$, определённую следующей формулой:

$$F(t) = f(\vec{x}_0 + t\vec{h}), t \in [0,1].$$

Из условий теоремы вытекает, что $F(t)$ имеем непрерывные производные до порядка $(n+1)$ включительно

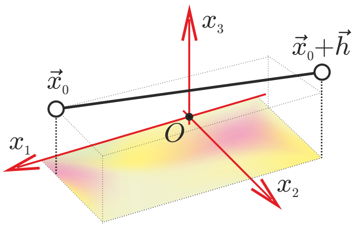


Рис. 4.11:

на отрезке $[0;1]$. Следовательно выполнены все условия для разложения функции $F(t)$ в ряд Тейлора в точке $t_0 = 0$ с остатком в форме Лагранжа для любого $t \in [0;1]$. Запишем ряд Тейлора для $t = 1$:

$$F(1) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!} + \dots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + \frac{F^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}, \quad \theta \in (0,1).$$

Остаётся заметить, что

$$F(1) = f(\vec{x}_0+\vec{h}), \quad F(0) = f(\vec{x}_0),$$
$$F'(0) = \sum_{k=1}^{d} f'_{x_k}(\vec{x}_0) h_k = \left(\sum_{k=1}^{d} h_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right) f|_{\vec{x}=\vec{x}_0},$$
$$F''(0) = \left(\sum_{k=1}^{d} h_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right)^2 f|_{\vec{x}=\vec{x}_0},$$
$$\dots$$
$$F^{(n)}(0) = \left(\sum_{k=1}^{d} h_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right)^n f|_{\vec{x}=\vec{x}_0}.$$

□

Теорема 4.8.2 (ряд Тейлора с остатком в форме Пеано). *Пусть* $\vec{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ *для функции* $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *и выполняется*

- $f \in C^n(\mathcal{U}(\vec{x}_0))$;
- $[\vec{x}_0, \vec{x}_0+\vec{h}] \in \mathcal{U}(\vec{x}_0)$.

Тогда

$$f(\vec{x}_0+\vec{h}) = f(\vec{x}_0) + (\sum_{k=1}^{d} h_k \frac{\partial}{\partial x_k}) f|_{\vec{x}=\vec{x}_0} + \frac{(\sum_{k=1}^{d} h_k \frac{\partial}{\partial x_k})^2 f|_{\vec{x}=\vec{x}_0}}{2!} + \dots + \\ + \frac{(\sum_{k=1}^{d} h_k \frac{\partial}{\partial x_k})^n f|_{\vec{x}=\vec{x}_0}}{n!} + o\left(|\vec{h}|^n\right), \quad \vec{h} \to \vec{0}.$$

Доказательство. Доказательство аналогично предыдущей теореме, только вместо остатка в форме Лагранжа надо записать остаток в форме Пеано. □

П р и м е р 4.8.1. Разложить в ряд Тейлора функцию $F(x_1, x_2) = 7 - 2x_1 + x_2 + 3x_1x_2$ в точке $(1; 3)$.

Доказательство. Справедливо

$$F'_{x_1} = -2 + 3x_2, \quad F'_{x_2} = 1 + 3x_1, \\ F''_{x_1x_1} = 0, \quad F''_{x_1x_2} = F''_{x_2x_1} = 3, \quad F''_{x_2x_2} = 0,$$

Значение исходной функции в точке $(1; 3)$ равно $F(1, 3) = 7-2+3+9 = 17$. Первый дифференциал функции F имеет вид:

$$\left((x_1-1)\frac{\partial}{\partial x_1} + (x_2-3)\frac{\partial}{\partial x_2}\right) F|_{(1;3)} = 7\cdot(x_1-1) + 4\cdot(x_2-3).$$

Вычислим второй дифференциал функции F.

$$\left((x_1-1)\frac{\partial}{\partial x_1} + (x_2-3)\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2 F|_{(1;3)} = \\ = F''_{x_1x_1}(1,3)(x_1-1)^2 + 2F''_{x_1x_2}(1,3)(x_1-1)(x_2-3) + F''_{x_2x_2}(1,3)(x_2-3)^2 = 6(x_1-1)(x_2-3).$$

Поскольку начиная с третьего все дифференциалы равны нулю для функции $F(x_1, x_2)$, то разложение в ряд Тейлора принимает вид:

$$F(x_1, x_2) = 17 + \frac{7\cdot(x_1-1) + 4\cdot(x_2-3)}{1!} + \frac{6(x_1-1)(x_2-3)}{2!}.$$

□

4.8.2 Геометрические приложения.

Рассмотрим просторанство $\mathbb{R}^3$. Пусть функция $z = f(x, y)$, такова, что $f \in D(x_0, y_0)$. Тогда условие дифференцируемости равносильно следующему

$$z = f(x_0, y_0) + f'_x|_{(x_0,y_0)}(x-x_0) + f'_y|_{(x_0,y_0)}(y-y_0) + o(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}), (x, y) \to (x_0, y_0).$$

Определение 4.8.2. Пусть $f \in D(x_0, y_0)$. Тогда $z = z_0 + A(x-x_0) + B(y-y_0)$ — касательная плоскость к поверхности $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) или точке $(x_0, y_0, z_0(x_0, y_0))$, если она доставляет наилучшее линейное приближение в точке (x_0, y_0), т.е.

$$z = z_0 + A(x-x_0) + B(y-y_0) + o(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}), (x, y) \to (x_0, y_0).$$

Итак, уравнение касательной плоскости для случая $z = f(x, y)$, $f \in D(x_0, y_0)$, принимает вид $A(x-x_0) + B(y-y_0) - (z-z_0) = 0$. Вектор нормали к поверхности запишется в виде

$$\vec{n} = (A, B, -1) = (f'_x|_{(x_0,y_0)}, f'_y|_{(x_0,y_0)}, -1).$$

Положим $P = (x_0, y_0)$. Рассмотрим произвольную гладкую кривую на поверхности $\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t))) \in C^1$ по агрументу t. Тогда $\vec{\tau} = (x'_t, y'_t, f'_x x'_t + f'_y y'_t)|_P$ — касательный вектор к кривой. Легко проверить справедливость следующего равенства:

$$\vec{n} \cdot \vec{\tau} = 0.$$

Вывод: плоскость единственна.

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^d$. Пусть $\omega = f(x_1, \ldots, x_d), p = (x_1^0, \ldots, x_d^0), f \in D(p)$. В пространстве $\mathbb{R}^d$ уравнение касательной плоскости принимает вид:

$$\sum_{k=1}^{d} f_{x_k}|_p (x_k - x_k^0) - (\omega - \omega_0) = 0, \quad \omega_0 = f(p).$$

Неявный вид:

$$F(x, y, z) = 0, F \in C^1, P = (x_0, y_0, z_0)$$
$$\vec{n} = (F'_x, F'_y, F'_z)|_P = (A, B, C).$$

Параметрическое задание поверхности: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, $(u, v) \in D$, где D — будем рассматривать как односвязное, простое множество (чтобы не вдаваться в подробности можно заменить простое множество на множество, границу которого можно задать непрерывно дифференцируемыми функциями).

Определение 4.8.3. Поверхность $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, $(u, v) \in D$. называется гладкой, если задаётся функциями класса $x, y, z \in C^1(D)$ и на поверхности нет особых точек, т.е. $\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v \neq \vec{0}, \forall (u, v) \in D$.

Положим $p = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$.

$$\vec{r}'_u = (x'_u, y'_u, z'_u)|_P$$

$$\vec{r}'_v = (x'_v, y'_v, z'_v)|_P$$

$$\vec{n} = \vec{r}'_u \times \vec{r}'_v = \begin{pmatrix} \frac{D(y,z)}{D(u,v)}, & \frac{D(z,x)}{D(u,v)}, & \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \\ \| & \| & \| \\ A & B & C \end{pmatrix}$$

Здесь

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$$

Тогда уравнение плоскости запишется в виде:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Положим $E = (\vec{r}'_u, \vec{r}'_u)$, $F = (\vec{r}'_v, \vec{r}'_v)$, $G = (\vec{r}'_u, \vec{r}'_v)$. Тогда справедливо

$$\begin{aligned} |\vec{n}| &= |\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v| = |\vec{r}'_u| \cdot |\vec{r}'_v| \cdot \sin\alpha = |\vec{r}'_u| \cdot |\vec{r}'_v| \cdot |\sqrt{1 - \cos^2\alpha}| = \\ &= \sqrt{|\vec{r}'_u|^2 |\vec{r}'_v|^2 - |\vec{r}'_u|^2 |\vec{r}'_v|^2 \cos^2\alpha} = \sqrt{(\vec{r}'_u, \vec{r}'_u)(\vec{r}'_v \vec{r}'_v) - (\vec{r}'_u, \vec{r}'_v)^2} = \\ &= \sqrt{EF - G^2} = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}. \end{aligned}$$

Последнее тождество называется тождеством Лагранжа.

Контрольные вопросы.

1. Сформулируете теорему о разложении в ряд Тейлора с остатком в форме Лагранжа.
2. Напишите уравнение касательной плоскости для дифференцируемой функции, заданной (а) в явном виде $z = z(x, y)$; (б) параметрически $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$; (с) в неявном виде $F(x, y, z) = 0$.

Упражнения к 4.8

Упражнение 4.8.1. *Рассмотрим функцию $y(x)$, заданную уравнением*

$$y^3 + 2y + 3x^3 + x^2 = 14.$$

(а) *Определена ли функция $y(x)$ в некоторой окрестности точки $A = (2, 1)$? Существуют ли производные y' и y''в этой точке?*

(б) *Если да, то найдите разложение в ряд Тейлора функции $y(x)$ в этой точке с точностью до $o((x-2)^2)$, $x \to 2$.*

Упражнение 4.8.2. *Рассмотрим систему уравнений*

$$\begin{cases} xyz^2 + x^3y + 3y^3z^3 - 2x = 3, \\ 2x^2yz + z^2 + 3xy + 5yx^3 = -5. \end{cases}$$

(а) *Определены ли функции $x(z)$ и $y(z)$ в некоторой окрестности точки $A = (-1, 1, 1)$? Будут ли они дифференцируемы в этой точке?*

(б) *Если да, то найдите разложение в ряд Тейлора функции $f(z) = x^3(z)y(z)$ в этой точке с точностью до $o((z-1)^2)$, $z \to 1$.*

Упражнение 4.8.3. *Рассмотрим систему уравнений:*

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + uwxy + 3x + 4y = 10, \\ x^2 + y^2 + u^3w^3x^3y + u - w = 3. \end{cases}$$

(а) *Существуют ли явные решения системы, в виде функций $z(x, y)$ и $w(x, y)$ в точке $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$, $w = 1$? Будут ли они дифференцируемы в этой точке?*

(б) *Если да, то найдите разложение в ряд Тейлора функции $z(x, y)w(x, y)$ в этой точке с точностью до $o(\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2})$, $(x, y) \to (1, 1)$.*

Ответы: 4.8.1 4.8.2 Ряд Тейлора $f(z) = -1 + \frac{12}{11}(z-1) + A(z-1)^2 + o(z-1)^2$, $z \to 0$. *Указание:* $x'_z(A) = 7/11$, $y'_z(A) = 9/11$. **4.8.3** $1 + (-23/2)(x-1) + (-38)(y-1) + o(\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2})$, $(x, y) \to (1, 1)$. *Указание:* по теореме о неявной функции найдите, что $\begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ w'_x & w'_y \end{pmatrix}$ в точке $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$, $w = 1$ принимает вид $\begin{pmatrix} -6 & -11/2 \\ -19 & -19 \end{pmatrix}$.

4.9 Экстремумы функций многих переменных. Квадратичные формы.

Пусть функция $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$.

Определение 4.9.1. Точка $\vec{x}^0$ — точка *локального минимума* $\vec{x}^0 \in \mathrm{locmin}$ для функции $f(\vec{x})$, если существует $U_\delta(\vec{x}^0)$ такая, что $\forall \vec{x} \in U_\delta(\vec{x}^0)$ следует, что $f(\vec{x}) \geqslant f(\vec{x}^0)$.

Определение 4.9.2. Точка $\vec{x}^0$ — доставляет *строгий локального минимума* для функции $f(\vec{x})$, если существует $U_\delta(\vec{x}^0)$ такая, что $\forall \vec{x} \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(\vec{x}^0)$ следует, что $f(\vec{x}) > f(\vec{x}^0)$.

Определение 4.9.3. Точка $\vec{x}^0$ — точка *локального максимума* $\vec{x}^0 \in \mathrm{locmax}$ для функции $f(\vec{x})$, если существует $U_\delta(\vec{x}^0)$ такая, что $\forall \vec{x} \in U_\delta(\vec{x}^0)$ следует, что $f(\vec{x}) \leqslant f(\vec{x}^0)$.

Определение 4.9.4. Точка $\vec{x}^0$ — доставляет *строгий локального максимума* для функции $f(\vec{x})$, если существует $U_\delta(\vec{x}^0)$ такая, что $\forall \vec{x} \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(\vec{x}^0)$ следует, что $f(\vec{x}) < f(\vec{x}^0)$.

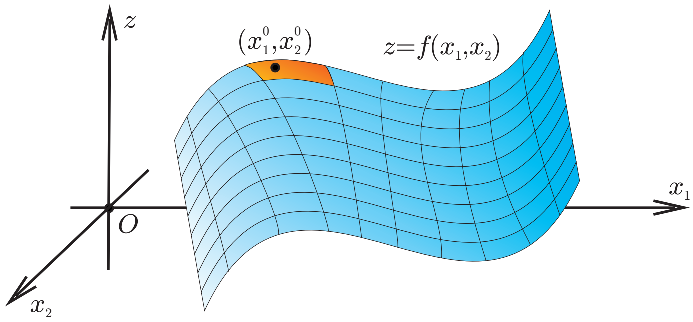


Рис. 4.12: Локальный максимум в точке (x_1^0, x_2^0).

Теорема 4.9.1 (Необходимые условия существования экстремума (в $\mathbb{R}^d$))**.**

$$\left.\begin{array}{l} f \in \mathbb{D}(\vec{x}^0) \\ \vec{x}^0 \ - \ loc\ extr \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f'_{x_1}(\vec{x}^0) = 0 \\ \vdots \\ f'_{x_d}(\vec{x}^0) = 0 \end{array}\right.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\varphi(t) = f(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, t, x_{k+1}^0, \dots, x_d^0).$$

И определения экстремума вытекает, что одномерная функция $\varphi(t)$ имеет локальный экстремум в точке x_k^0, т.е.

$$\varphi'(t)|_{t=x_k^0} = 0.$$

Откуда

$$f'_{x_k}(\vec{x}^0) = 0$$

□

Определение 4.9.5. Квадратичная форма

$$Q(\vec{h}) = \sum_{k,l=1}^{d} a_{kl} h_k h_l, \quad a_{kl} \in \mathbb{R},$$

называется

Положительно определенной, если $\forall \vec{h} \in \mathbb{R}^d \setminus \vec{0}$, $Q(\vec{h}) > 0$.

Неотрицательно определенной, если $\forall \vec{h} \in \mathbb{R}^d$, $Q(\vec{h}) \geqslant 0$.

Отрицательно определенной, если $\forall \vec{h} \in \mathbb{R}^d \setminus \vec{0}$, $Q(\vec{h}) < 0$.

Неположительно определенной, если $\forall \vec{h} \in \mathbb{R}^d$, $Q(\vec{h}) \leqslant 0$.

Лемма 12.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1d} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{d1} & \dots & a_{dd} \end{pmatrix} \quad \Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix}, \ \dots, \ \Delta_d = |A|$$

1. *Квадратичная форма Q — положительно определена, если* $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\dots$, $\Delta_d > 0$.

2. *Квадратичная форма Q — отрицательно определена, если $\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 < 0,\ \ldots,\ (-1)^d\Delta_d > 0$.*

3. *Квадратичная форма Q — неотрицательно определена, если все диагональные миноры $M_s \geqslant 0$, $s = 1, 2, \ldots, N$, где $N = C_d^1 + C_d^2 + \cdots + C_d^d = 2^d - 1$.*

4. *Квадратичная форма Q — неположительно определена, если все диагональные миноры $(-1)^k M_s \geqslant 0$, $s = 1, 2, \ldots, N$, где $N = C_d^1 + C_d^2 + \cdots + C_d^d = 2^d - 1$ и k — размерность соответствующего минора.*

Замечание 34. Первые два утверждения леммы называются *критерием Сильвестра.*

П р и м е р 4.9.1. Для матрицы 3×3 условие того, что квадратичная форма Q — неотрицательно определена означает неотрицательность семи ($7 = C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 2^3 - 1$) диагональных миноров:

$$a_{11} \geqslant 0, a_{22} \geqslant 0, a_{33} \geqslant 0,$$
$$\begin{vmatrix} & & \\ & * & * \\ & * & * \end{vmatrix} \geqslant 0, \begin{vmatrix} * & & * \\ & & \\ * & & * \end{vmatrix} \geqslant 0, \begin{vmatrix} * & * & \\ * & * & \\ & & \end{vmatrix} \geqslant 0, \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix} \geqslant 0.$$

Здесь крестики означают, что берутся именно эти элементы матрицы в соответствующие диагональные миноры.

Теорема 4.9.2 (Достаточные условия существования экстремума). *Пусть $f \in C^2(U(\vec{x}^0))$ и $f'_{x_k}(\vec{x}^0) = 0$, $\forall k = 1, \ldots, d$. Рассмотрим вторую квадратичную форму*

$$Q(\vec{h}) = Q_f(\vec{h}) = \sum_{k,l=1}^{d} a_{kl}h_kh_l, \quad a_{kl} = f''_{x_kx_l}(\vec{x}^0).$$

Если

a) Q — положительно определена, тогда $\vec{x}^0$ — точка $loc\min$;
b) Q — отрицательно определена, тогда $\vec{x}^0$ — точка $loc\max$;
c) Q — знакопеременная квадратичная форма, тогда в точке $\vec{x}^0$ extr нет.

Доказательство. В условия теоремы можно разложить функцию в ряд Тейлора с остатком в форме Пеано

$$f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = \frac{\tilde{d}^2 f(\vec{x}^0)}{2!} + o(|\vec{x} - \vec{x}^0|^2),\ \vec{x} \to \vec{x}^0.$$

Здесь мы использовали тот факт, что $\tilde{d}f|_{x^0} = \Big(\sum (x_k - x_k^0)\frac{\partial}{\partial x_k}\Big) f|_{\vec{x}^0} = 0$, поэтому первый диффреренциал в разложении ряда Тейлора отсутствует. Обозначим $h_k = x_k - x_k^0$, $k = 1, \ldots, d$, $\vec{e} = (e_1, \ldots, e_d) = \frac{\vec{h}}{|\vec{h}|}$. Тогда

$$f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d}\sum_{l=1}^{d} h_kh_l f''_{x_kx_l}(\vec{x}^0) + o(|\vec{h}|^2) =$$
$$= \frac{1}{2}|\vec{h}|^2\Big(\sum_{k,l=1}^{d} \frac{h_k}{|\vec{h}|}\frac{h_l}{|\vec{h}|} f''_{x_kx_l}(\vec{x}^0) + o(1)\Big) =$$
$$= \frac{1}{2}|\vec{x} - \vec{x}^0|^2\Big(\sum_{k,l=1}^{d} e_ke_l f''_{x_kx_l}(\vec{x}^0) + o(1)\Big),\ \vec{h} \to \vec{0}.$$

а) Пусть $Q_f(\vec{h})$ — положительно определена. Рассмотрим $Q_f(\vec{e}) = g(\vec{e})$, где $|\vec{e}| = 1$. Функция $g \in C(S^{d-1})$, $S^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$. Так как сфера S^{d-1} компакт (замкнутое и ограниченной множество в $\mathbb{R}^d$), то $\exists \min \vec{e}^*$: $|\vec{e}^*| = 1$,

$g(\vec{e}) \geqslant g(\vec{e}^*) = m > 0$. Из определения о-малого вытекает существование такой окрестности $U_\delta(\vec{x}^0)$, что $|o(1)| < \frac{m}{2}$. Следовательно

$$f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0) \geqslant \frac{m}{2}|\vec{h}|^2 > 0, \text{ если } \vec{h} \neq \vec{0}.$$

Откуда, окончательно получаем

$$f(\vec{x}) > f(\vec{x}^0), \text{ если } \vec{x} \neq \vec{x}^0, \ \forall x \in U_\delta(\vec{x}^0).$$

b) Аналогично.

c) Рассмотрим последний случай. То, что форма не является знакоопределённой, означает существование таких $\vec{h}_1$, $\vec{h}_2 \in \mathbb{R}^d$, что

$$Q_f(\vec{h}_1) < 0,$$
$$Q_f(\vec{h}_2) > 0.$$

Определим $\vec{e}_{1,2} = \frac{\vec{h}_{1,2}}{|\vec{h}_{1,2}|}$, тогда

$$Q_f(\vec{e}_1) = m_1 < 0,$$
$$Q_f(\vec{e}_2) = m_2 > 0.$$

Из определения о-малого вытекает существование такой окрестности $U_\delta(\vec{x}^0)$, что $|o(1)| < \frac{\min\{|m_1|,|m_2|\}}{2}$. Положим $\vec{x}_1(\rho) = \vec{x}_0 + \rho\vec{e}_1$, $\vec{x}_2(\rho) = \vec{x}_0 + \rho\vec{e}_2$, $0 < \rho < \delta$. Тогда

$$f(\vec{x}_1(\rho)) - f(\vec{x}^0) = \frac{1}{2}\rho^2(m_1 + o(1)) < \rho^2\frac{m_1}{4} < 0,$$
$$f(\vec{x}_2(\rho)) - f(\vec{x}^0) = \frac{1}{2}\rho^2(m_2 + o(1)) > \rho^2\frac{m_2}{4} > 0.$$

Откуда вытекает, что точка $\vec{x}^0$ не является точкой экстремума. □

Пример 4.9.2. Найти экстремумы функции $u(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2 + 5$.

Доказательство. Найдём сначала все критические точки, затем исследуем их на экстремум. Поскольку здесь функция дифференцируема в каждой точки пространства $\mathbb{R}^2$, то здесь будут только стационарные точки.

- (Необходимые условия).

$$\begin{cases} u'_x = 0; \\ u'_y = 0. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 4x + 4y = 0; \\ 4y^3 + 4x - 4y = 0. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^3 - x + y = 0; \\ y^3 + x - y = 0. \end{cases}$$

  Если сложить два уравнения в последней системе, то получим $y^3 + x^3 = 0$ или $x = -y$. Подставив в первое уравнение, получаем

$$x^3 - 2x = 0 \Longleftrightarrow x(x^2 - 2) = 0 \Longleftrightarrow x = 0, \ x = \pm\sqrt{2}.$$

  Следовательно решение системы состоит из трёх точек $M_1(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $M_2(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $M_3(0, 0)$.

- (Достаточные условия). Найдём матрицу Гессе

$$G = \begin{pmatrix} u''_{xx} & u''_{xy} \\ u''_{yx} & u''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}.$$

  – В точке $M_1(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ и $M_2(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ исследование будет одинаковым

$$G|_{M_{1,2}} = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}.$$

  Откуда

$$\triangle_1 = a_{11} = 20 > 0; \quad \triangle_2 = \begin{vmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} = 20^2 - 4^2 > 0.$$

  Мы видим, что по критерию Сильвестра квадратичная форма G в точках $M_{1,2}$ положительно определена и следовательно это точки локального минимума, причём $u_{\min} = -3$.

– Исследуем на экстремум точку $M_3(0,0)$. Поскольку матрица Гессе принимает вид

$$G|_{M_{1,2}} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix},$$

и

$$\triangle_1 = a_{11} = -4 < 0; \quad \triangle_2 = \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 0,$$

то по критерию Сильверста что-либо сказать нельзя. Требуется дополнительное иследование. Рассмотрим разность

$$u(h_x, h_y) - u(0,0) = h_x^4 + h_y^4 - 2h_x^2 + 4h_xh_y - 2h_y^2 = h_x^4 + h_y^4 - 2(h_x - h_y)^2$$

Откуда мы делаем вывод о том, что если $h_x = h_y \neq 0$, то $u(h_x, h_y) - u(0,0) = h_x^4 + h_y^4 > 0$, а если $h_x \neq 0$, $h_y = 0$, то $u(h_x, h_y) - u(0,0) = h_x^4 - 2h_x^2 = h_x^2(h_x^2 - 2) < 0$ при $|h_x| < \sqrt{2}$. Таким образом показано, что в окрестности точки $(0,0)$ справедливо $u(h_x, h_x) - u(0,0) > 0$, $u(h_x, 0) - u(0,0) < 0$ при любых $h_x \neq 0$, $|h_x| < \sqrt{2}$. Следовательно в точке $M_3(0,0)$ экстремума нет.

Вывод: Точки $M_1(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $M_2(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ — точки локального минимума, причём $u_{\min} = -3$. В стационарной точке $M_3(0,0)$ экстремума нет.

□

П р и м е р 4.9.3. Найти экстремумы функции $u(x,y) = \sin x^2 + x^2 + 2xy + 2y^2/3$.

Доказательство. Найдём сначала все критические точки, затем исследуем их на экстремум. Поскольку здесь функция дифференцируема в каждой точки пространства $\mathbb{R}^2$, то здесь будут только стационарные точки.

- (Необходимые условия).

$$\begin{cases} u'_x = 0; \\ u'_y = 0. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x\cos x^2 + 2x + 2y = 0; \\ 2x + 4y/3 = 0. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x\cos x^2 + x + y = 0; \\ x + 2y/3 = 0. \end{cases}$$

Если из второго уравнения в последней системе выразить $y = -3/2x$ и подставить в первое — получим $x(\cos x^2 - \frac{1}{2}) = 0$. Откуда либо $x = 0$, либо $x^2 = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$. Следовательно решение системы состоит из следующих точек точек $M_1(0,0)$, $M_{2,m}(\sqrt{\frac{\pi}{3} + 2\pi m}, -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\pi}{3} + 2\pi m})$, $M_{3,n}(\sqrt{-\frac{\pi}{3} + 2\pi n}, -\frac{3}{2}\sqrt{-\frac{\pi}{3} + 2\pi n})$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{N}$.

- (Достаточные условия). Найдём матрицу Гессе

$$G = \begin{pmatrix} u''_{xx} & u''_{xy} \\ u''_{yx} & u''_{yy} \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} \cos x^2 - 2x^2 \sin x^2 + 1 & 1 \\ 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

– В точке $M_1(0,0)$ имеем

$$G|_{M_1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Откуда

$$\triangle_1 = a_{11} = 2 > 0; \quad \triangle_2 = \frac{4}{3} - 1 > 0.$$

Мы видим, что по критерию Сильвестра квадратичная форма G в точке M_1 положительно определена и следовательно это точка локального минимума, причём $u_{\min} = 0$.

– Исследуем на экстремум точки $M_{2,m}(\sqrt{\frac{\pi}{3} + 2\pi m}, -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\pi}{3} + 2\pi m})$, $m \in \mathbb{Z}_+$. Поскольку матрица Гессе принимает вид

$$G|_{M_{2,m}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \sqrt{3}\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi m\right) & 1 \\ 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

и

$$\triangle_2 = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2} - \sqrt{3}\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi m\right)\right) - 1 = -\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi m\right) < 0.$$

Следовательно все точки вида $M_{2,m}$ не являются точками экстремума.

– Исследуем на экстремум точки $M_{3,n}(\sqrt{-\frac{\pi}{3}+2\pi n}, -\frac{3}{2}\sqrt{-\frac{\pi}{3}+2\pi n})$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{N}$ Поскольку матрица Гессе принимает вид

$$G|_{M_{3,n}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}+\sqrt{3}\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n\right) & 1 \\ 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

и

$$\triangle_1 = a_{11} = \frac{3}{2}+\sqrt{3}\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n\right) > 0; \quad \triangle_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n\right) > 0.$$

Следовательно по критерию Сильверста все точки вида $M_{3,n}$ при любом натуральном n — точки минимума, причём $u_{\min} = u(M_{3,n}) = -\pi n + \frac{\pi}{6} - \frac{3}{2}$.

Вывод: Точки $M_1(0,0)$, $M_{3,n}(\sqrt{-\frac{\pi}{3}+2\pi n}, -\frac{3}{2}\sqrt{-\frac{\pi}{3}+2\pi n})$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{N}$ — точки локального минимума, причём $u_{\min} = u(0,0) = 0$ и $u_{\min} = u(M_{3,n}) = -\pi n + \frac{\pi}{6} - \frac{3}{2}$. Во всех остальных стационарных точках $M_{2,m}(\sqrt{\frac{\pi}{3}+2\pi m}, -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\pi}{3}+2\pi m})$, $m \in \mathbb{Z}_+$ экстремума нет.

□

П р и м е р 4.9.4. Найти экстремумы функции $u(x,y,z) = x^2 - xy + \frac{y^2}{2} - yz + z^2 - 11$.

Доказательство. Найдём сначала все критические точки, затем исследуем их на экстремум.

- (Необходимые условия).

$$\begin{cases} u'_x = 0; \\ u'_y = 0; \\ u'_z = 0. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 0; \\ -x + y - z = 0; \\ -y + 2z = 0. \end{cases}$$

  Решение данной системы является множество $(t, 2t, t)$, где $t \in \mathbb{R}$.

- (Достаточные условия). Найдём матрицу Гессе

$$G = \begin{pmatrix} u''_{xx} & u''_{xy} & u''_{xz} \\ u''_{yx} & u''_{yy} & u''_{yz} \\ u''_{zx} & u''_{zy} & u''_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

  Поскольку

$$\triangle_1 = a_{11} = 2 > 0; \; a_{22} = 1 > 0; \; a_{33} = 2 > 0;$$
$$\triangle_2 = M^{1,2}_{1,2} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0; \; M^{1,3}_{1,3} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0; \; M^{2,3}_{2,3} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0;$$
$$\triangle_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

  то во всех точках вида $(t, 2t, t)$, где $t \in \mathbb{R}$ квадратичная форма, отвечающая за вторые частные производные, будет неотрицательно определённой. Поскольку наша функция является полиномом степени не выше чем 2, то

$$u(x,y,z) - u(t,2t,t) = \frac{1}{2}Q_u(\vec{h}) \geqslant 0.$$

  Т.е. разность приращения функции полностью характеризуется квадратичной формой в точках вида $(t, 2t, t)$, где $t \in \mathbb{R}$. Следовательно все эти точки будут точками минимума, причём $u(t, 2t, t) = -11$ для любого $t \in R$.

□

П р и м е р 4.9.5. Найти экстремумы функции $z(x,y) = (1-x^2)(y^{2/3} - y)$.

Доказательство. Найдём сначала все критические точки, затем исследуем их на экстремум.

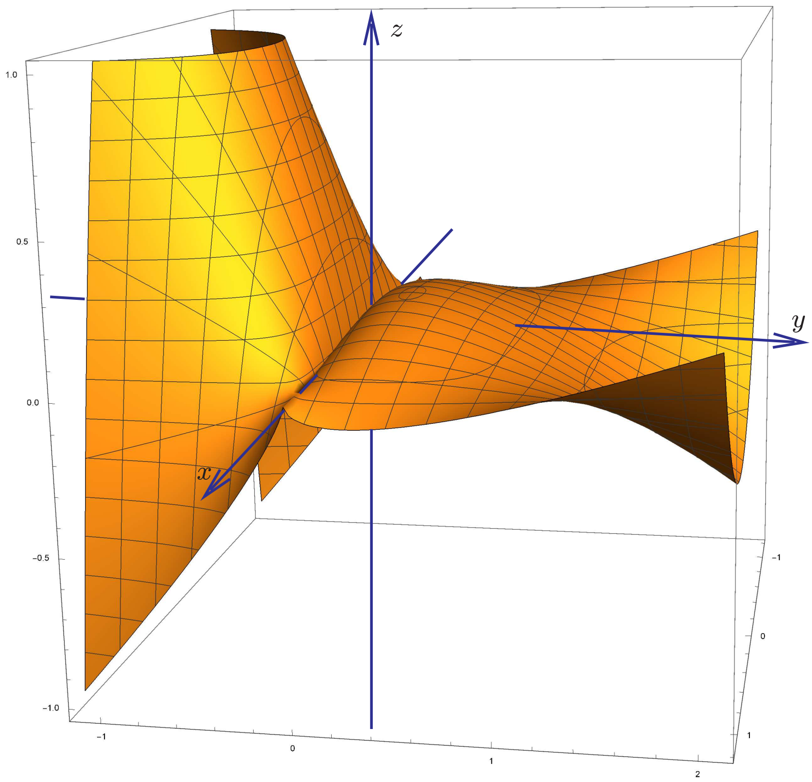


Рис. 4.13:

- Найдём частные производные

$$\begin{cases} z'_x = -2x(y^{2/3} - y); \\ z'_y = (1 - x^2)(\frac{2}{3}y^{-1/3} - 1). \end{cases}$$

Исследуем существование частной производной z'_y на прямой $y = 0$.

$$z'_y(x, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{z(x, h) - z(x, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1 - x^2)(h^{2/3} - h)}{h}.$$

Откуда, следует, что конечная частная производная z'_y из всех точек вида $(x, 0)$ существует только в точках $(\pm 1, 0)$ и равна 0.

Решая систему $z'_x = z'_y = 0$ во всех точках, где $y \neq 0$ находим точки $M_1(0; 8/27)$, $M_2(1; 1)$, $M_3(-1; 1)$.

Вывод: нами найдены стационарные точки $M_1(0; 8/27)$, $M_2(1; 1)$, $M_3(-1; 1)$, $M_4(-1; 0)$, $M_5(1; 0)$ (т.е. точки в которых частные производные существуют и равны нулю), а также точки вида $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R} \backslash \{\pm 1\}$ в которых не существует конечной частной производной z'_y.

Множество всех критических точек изображено на рисунке 4.14 и отмечено красным цветом.

- – Исследуем на экстремум точки вида $(x, 0)$. Справедливо

$$z(x + h_x, h_y) - z(x, 0) = (1 - (x + h_x)^2) h_y^{2/3} (1 - h_y^{1/3}).$$

Откуда мы делаем вывод о том, что в точках вида $(x, 0)$ при $|x| < 1$ существует окрестность точки $(x, 0)$ (например, при $|h_x| < \min\{|x - 1|, |x + 1|\}/2$, $|h_y| < 1$), что разность $z(x + h_x, h_y) - z(x, 0) \geqslant 0$, т.е. все точки вида $(x, 0)$ при $|x| < 1$ точки локального минимума. Аналогично, все точки вида $(x, 0)$ при $|x| > 1$ точки локального максимума, поскольку $z(x + h_x, h_y) - z(x, 0) \leqslant 0$ в некоторой окрестности тоски $(x, 0)$. В точках $M_{4,3}$, т.е. точках вида $(\pm 1, 0)$ экстремума нет, т.к. разность $z(\pm 1 + h_x, h_y) - z(\pm 1, 0)$ меняет знак в зависимости от знака h_x.

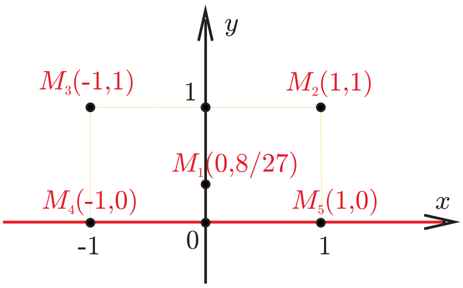


Рис. 4.14:

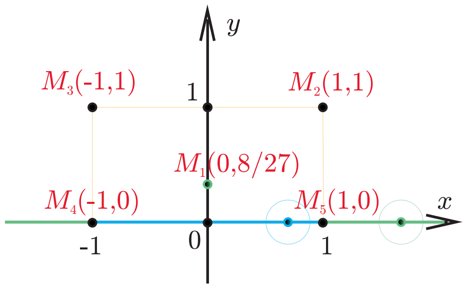


Рис. 4.15:

– Для того, чтобы исследовать остальные точки нам надо найти матрицу Гессе:

$$G = \begin{pmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2(y^{2/3} - y) & -2x(\frac{2}{3}y^{-1/3} - 1) \\ -2x(\frac{2}{3}y^{-1/3} - 1) & (1 - x^2)(-\frac{2}{9})y^{-4/3} \end{pmatrix}.$$

– В точке $M_1(0; 8/27)$ получаем:

$$G|_{M_1} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{9} & 0 \\ 0 & -\frac{9}{8} \end{pmatrix}.$$

Откуда мы видим, что по критерию Сильвестра квадратичная форма G в точке $M_1(0; 8/27)$ отрицательно определена, а следовательно это точка локального максимума.

– В точке $M_2(1; 1)$:

$$G|_{M_2} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку определитель $\Delta_2 = -4/9 < 0$, то в точке $M_2(1; 1)$ нет экстремума. Заметим, второй дифференциал, сосответствующий матрице Гессе в этой точке имеет вид $d^2z = 4/3dxdy$.

– В точке $M_3(-1; 1)$ исследование происходит аналогично как и в точке $M_2(1; 1)$. И следовательно там тоже нет экстремума.

Вывод: точка $M_1(0; 8/27)$ и все точки $(x, 0)$, $x: \ |x| > 1$ — точки локального максимума (они помечены зелёным цветом на рис. 4.15), и все точки $(x, 0)$, $x: \ |x| < 1$ — точки локального минимума (они помечены голубым цветом на рис. 4.15). Все остальные критические точки не являются точками экстремума.

□

В качестве ещё одного примера разберем так называемый *метод наименьших квадратов.*

4.9.1 Метод наименьших квадратов.

Пусть на основании данных эксперемента требуетя найти зависимость между переменными влияниями x и y. Сделаем еще предположение о том, что мы можем считать,что это — линейная зависимость, имеющая вид $y = ax + b$. Коэффициенты a и b — величины, подлежащие определению. Точки (x_i, y_i), $i = 1, .., n$, приблизительно лежат на прямой $y = ax + b$. Назовем величины $y_i - (ax_i + b) = \delta_i$, $i = 1, .., n$ погрешностями. Рассмотрим величину

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2 = S(a, b).$$

При разных (a, b) она характеризует отклонение гипотетической прямой $y = ax+b$ от данных эксперимента. Наша цель — подобрать a и b так, чтобы функция $S(a, b)$ достигла своего минимума. Действием согласно изложенным выше правилам. Найдем сначала $\frac{\partial S}{\partial a}$ и $\frac{\partial S}{\partial b}$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - (ax_i + b))(-x_i) = -2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + 2a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2b\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - (ax_i + b))(-1) = -2\sum_{i=1}^{n} y_i + 2a\sum_{i=1}^{n} x_i + 2bn.$$

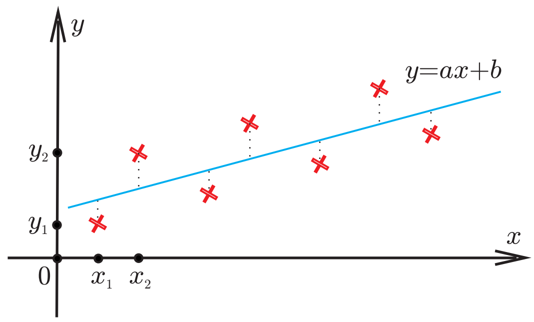


Рис. 4.16:

Приравнивания $\frac{\partial S}{\partial a}=0$, $\frac{\partial S}{\partial b}=0$, получаем систему лнейных уравнений относительно a и b:

$$\begin{cases} a\cdot\sum_{i=1}^n x_i^2+b\cdot\sum_{i=1}^n x_i=\sum_{i=1}^n x_iy_i,\\ a\cdot\sum_{i=1}^n x_i+b\cdot n=\sum_{i=1}^n y_i.\end{cases}$$

Решая систему, получим искомую точку (a,b). Осталось только проверить достаточные условия экстремума. Для этого найдем

$$A=\frac{\partial^2 S}{\partial a^2}=2\sum_{i=1}^n x_i^2,\quad C=\frac{\partial^2 S}{\partial b^2}=2n,\quad B=\frac{\partial^2 S}{\partial a\partial b}=2\sum_{i=1}^n x_i.$$

Разумеется, $\Delta_1=A>0$. Условие $\Delta_2=AC-B^2>0$ равносильно условию $n\cdot\sum_{i=1}^n x_i^2-(\sum_{i=1}^n x_i)^2>0$.

Но

$$n\sum_{i=1}^n x_i^2-\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^n (x_i-x_j)^2.$$

Т.к. $x_i\neq x_j$ (опыты различные), эта величина всегда больше 0.

Например, пусть есть 5 наблюдений, результаты которых записаны в виде

x_k	y_k	x_k^2	$x_k\cdot y_k$
-2	0.5	4	-1
0	1	0	0
1	1.5	1	1.5
2	2	4	4
4	3	16	12
$S_1=2$	$t_0=8$	$S_2=25$	$t_1=16.5$

Поставим задачу нахождения коэффициентов a, b прямой $y=ax+b$ обладающей тем свойством, что $S(a,b)=\sum_{i=1}^n(y_i-(ax_i+b))^2$ имеет наименьшее возможное значение.

Вычислим

$$\frac{\partial S}{\partial a}=-2\sum_{i=1}^5 x_iy_i+2a\sum_{i=1}^5 x_i^2+2b\sum_{i=1}^5 x_i,$$
$$\frac{\partial S}{\partial b}=-2\sum_{i=1}^5 y_i+2a\sum_{i=1}^5 x_i+5b.$$

Из таблицы следует:

$$\sum_{i=1}^5 x_i=-2+0+1+2+4=5,\quad \sum_{i=1}^5 y_i=0,5+1+1,5+2+3=8,$$
$$\sum_{i=1}^5 x_i^2=4+0+1+4+16=25,\quad \sum_{i=1}^5 x_iy_i=-1+0+1,5+4+12=16,5.$$

Поэтому система для нахождения a, b имеет вид
ее решения: $a = 0,425$, $b = 1,175$. Поэтому искомая прямая имеет вид: $y = 0,425x + 1,175$.

4.9.2 Экстремум неявно заданной функции

П р и м е р 4.9.6. Найти экстремумы функции $z = z(x, y)$, заданной неявно:

$$x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0.$$

Доказательство. **I.** Проведём исследование в точках дифференцируемости функции $z = z(x, y)$, т.е. в стационарных точках. Для этого вычислим первый дифференциал:

$$(2x - z + 2)dx + (2y - z + 2)dy + (2z - x - y + 2)dz = 0.$$

Откуда

$$dz = -\frac{2x - z + 2}{2z - x - y + 2}\,dx - \frac{2y - z + 2}{2z - x - y + 2}\,dy.$$

Находим стационарные точки (разбираем случай, когда $2z - x - y + 2 \neq 0$, т.е. случай дифференцируемости)

$$\begin{cases} z'_x &= 0, \\ z'_y &= 0. \end{cases} \iff \begin{cases} z &= 2(x+1), \\ z &= 2(y+1). \end{cases}$$

Теперь, подставив найденные выражение в исходное уравнение, находим, что $z_1 = -2\sqrt{6} - 4$, $z_2 = 2\sqrt{6} - 4$. Следовательно получаем две стационарные точки $A_1(-\sqrt{6} - 3; -\sqrt{6} - 3)$ отвечающая $z_1 = -2\sqrt{6} - 4$ и точка $A_2(\sqrt{6} - 3; \sqrt{6} - 3)$, отвечающая $z_1 = 2\sqrt{6} - 4$.

Найдём второй дифференциал в точках $A_{1,2}$, учитывая, что первый дифференциал (и соответственно, частные производные) в этих точках равен нулю.

$$d^2z\big|_{A_{1,2}} = -d\left((2x - z + 2) \cdot \frac{dx}{2z - x - y + 2} + (2y - z + 2) \cdot \frac{dy}{2z - x - y + 2}\right)\Bigg|_{A_{1,2}} =$$
$$= -d(2x - z + 2)|_{A_{1,2}} \cdot \left(\frac{dx}{2z - x - y + 2}\right)\Bigg|_{A_{1,2}} - d(2y - z + 2)|_{A_{1,2}} \cdot \left(\frac{dx}{2z - x - y + 2}\right)\Bigg|_{A_{1,2}} =$$
$$= -\left(\frac{2dx^2 - dz\,dx + 2dy^2 - dz\,dy}{2z - x - y + 2}\right)\Bigg|_{A_{1,2}} = -\left(\frac{2(dx^2 + dy^2)}{2z - x - y + 2}\right)\Bigg|_{A_{1,2}}.$$

Остаётся заметить, что

$$d^2z\big|_{A_1} > 0, \quad d^2z\big|_{A_2} < 0.$$

На основании чего делаем вывод о том, что точка $A_1(-\sqrt{6} - 3; -\sqrt{6} - 3)$ — точка локального минимума $z_{\min} = -2\sqrt{6} - 4$; точка $A_2(\sqrt{6} - 3; \sqrt{6} - 3)$ — точка локального максимума $z_{\max} = 2\sqrt{6} - 4$;

II. Проведём исследование в точках, где нет дифференцируемости неявной функции $z = z(x, y)$. т.е. в точках вида

$$z = \frac{x + y}{2} - 1.$$

Заметим, что исходную функцию, после выделения полного квадрата можно записать в виде:

$$\left(z - \left(\frac{x + y}{2} - 1\right)\right)^2 + x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 - \left(\frac{x + y}{2} - 1\right)^2 = 0 \iff$$
$$\left(z - \left(\frac{x + y}{2} - 1\right)\right)^2 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}y^2 - \frac{xy}{2} + 3x + 3y - 3 = 0.$$

Делаем ввывод, что в точках недифференцируемости $z = \frac{x+y}{2} - 1$ выполнено

$$\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}y^2 - \frac{xy}{2} + 3x + 3y - 3 = 0.$$

Покажем, что кривая представляет из себя эллипс. Пусть $Q = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & 3/2 \\ -1/4 & 3/4 & 3/2 \\ 3/2 & 3/2 & -3 \end{pmatrix}$.
Тогда $I_1 = \operatorname{tr} Q = 3/2 > 0$, $I_2 = \det Q = 1/2$, $I_3 = \det A = -6$, собственные числа матрицы Q удовлетворяют уравнению $\det(Q - \lambda E) = 0$ или $\lambda^2 - (3/2)\lambda + 1/2 = 0$. Откуда $\lambda_{1,2} = \frac{3\pm 2\sqrt{2}}{4}$. Следовательно канонический вид уравнения эллипса будет

$$\frac{3+2\sqrt{2}}{4}(x')^2 + \frac{3-2\sqrt{2}}{4}(y')^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0 \Longleftrightarrow \frac{3+2\sqrt{2}}{4}(x')^2 + \frac{3-2\sqrt{2}}{4}(y')^2 = 12.$$

Угол поворота осей, для приведения к каноническому виду равен 45°, поскольку $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}} = 0$. Центр эллипса находим из системы:

$$\begin{cases} F'_x = 0, \\ F'_y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow (x_0, y_0) = (-3, -3).$$

График кривой см. на рис. Функция $z(x, y)$ определена только внутри и на границе этого эллипса. Поскольку функция $z = \frac{x+y}{2} - 1$, при условии $\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}y^2 - \frac{xy}{2} + 3x + 3y - 3 = 0$ достигает максимум и минимум в точках где $y = x$, то можно их найти:

$$(x_{\min}, y_{\min}) = A_3 = (2\sqrt{3} - 3; 2\sqrt{3} - 3), \quad (x_{\max}, y_{\max}) = A_4 = (-2\sqrt{3} - 3; -2\sqrt{3} - 3).$$

Покажем, что в точках $A_{3,4}$ тоже нет локальных экстремумов. Для этого рассмотрим нашу функцию

$$z(x, y) = \left(\frac{x+y}{2} - 1\right) \pm \sqrt{-\left(\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}y^2 - \frac{xy}{2} + 3x + 3y - 3\right)}.$$

на множестве $x = y$ и покажем, что в точках $A_{3,4}$ есть значения на этой кривой как большие значения $z(A_{3,4}) = \pm 2\sqrt{3} - 4$ (для точки A_3 берём знак плюс), так и меньшии. Действительно, пусть $x = y = t$. Тогда

$$z(t, t) = t - 1 \pm \sqrt{-t^2 - 6t + 3}.$$

Введя переменную $w = t + 3 - 2\sqrt{3}$, получаем

$$\begin{aligned} z(t,t) &= w - 4 + 2\sqrt{3} \pm \sqrt{-w(w + 4\sqrt{3})} = \\ &= w - 4 + 2\sqrt{3} \pm 2\sqrt[4]{3}\sqrt{-w} + O((-w)^{3/2}) = -4 + 2\sqrt{3} \pm 2\sqrt[4]{3}\sqrt{-w} + O(w) = \\ &= z(A_4) \pm 2\sqrt[4]{3}\sqrt{-w} + O(w), \quad w \to 0- . \end{aligned}$$

Откуда замечаем, что точка A_3 не является точкой экстремума. Аналогично доказывается, что в точке A_4 тоже нет экстремума.

Ответ: точка $A_1(-\sqrt{6}-3; -\sqrt{6}-3)$ — точка локального минимума $z_{\min} = -2\sqrt{6} - 4$; точка $A_2(\sqrt{6}-3; \sqrt{6}-3)$ — точка локального максимума $z_{\max} = 2\sqrt{6} - 4$.

□

4.10 Условный экстремум

П р и м е р 4.10.1. Рассмотрим функцию $f(x, y) = y^2 - x^2$ (см.рис. 4.17). Легко понять, что точек экстремума данной функции не существует. Но если рассмотреть данную функцию не на всём R^2, а на его части, например будем рассматривать $f(x, y) = y^2 - x^2$ при условии, что $x = 0$, то тогда функция при данном условии имеет глобальный минимум равный нулю (см.рис. 4.17).

Определение 4.10.1. Область $G \subset \mathbb{R}^d$, переменные $x_1, x_2, \ldots, x_d$ ($\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$) связаны системой

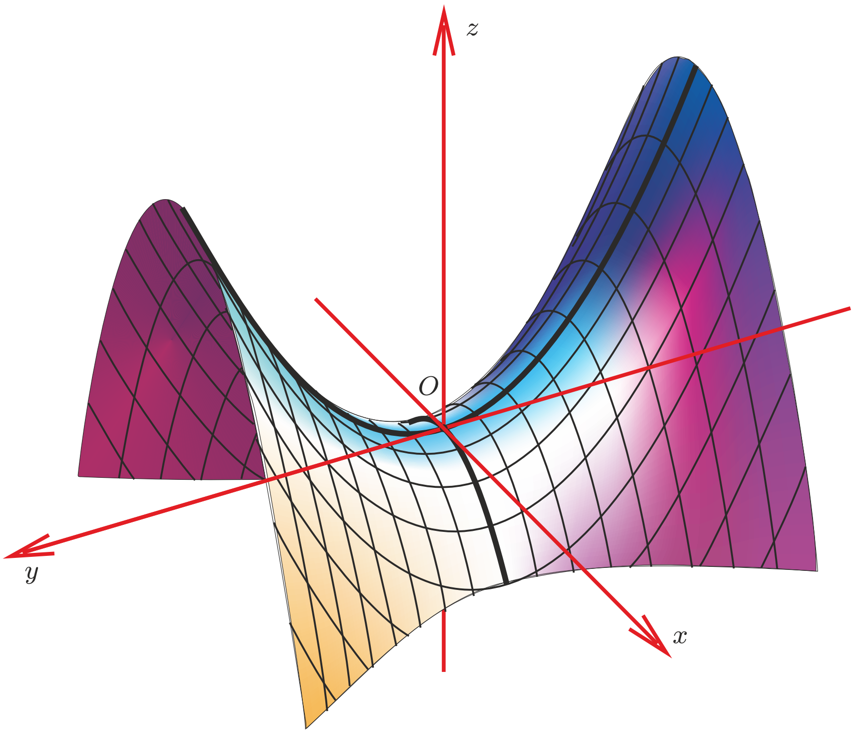


Рис. 4.17:

уравнений

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_d) = 0,\\
&\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_d) = 0,\\
&\ldots,\\
&\varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_d) = 0,
\end{aligned}$$

где $m < d$, $\varphi_k \in C^1(G)$, $1 \leqslant k \leqslant m$. Функция $f : G \to \mathbb{R}$ имеет *условный минимум (максимум)* в точке $\mathbf{x}^0$, если существует окрестность $U(\mathbf{x}^0) \in G$ точки $\mathbf{x}^0$ такая, что $f(\mathbf{x}) \geqslant f(\mathbf{x}^0)$ ($f(\mathbf{x}^0) \geqslant f(\mathbf{x})$) для всех $\mathbf{x} \in U(\mathbf{x}^0)$, для которых $\varphi_k(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, $1 \leqslant k \leqslant m$.

В дальнейшем будем предполагать, что функции f и $\varphi_k(\mathbf{x})$, $1 \leqslant k \leqslant m$, принадлежат классу $C^2(G)$ и ранг матрицы

$$\begin{pmatrix}
\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_d}\\
\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_d}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_d}
\end{pmatrix}$$

в каждой точке равен m. Для определённости будем считать, что

$$\begin{vmatrix}
\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0) & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}^0) & \ldots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_m}(\mathbf{x}^0)\\
\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0) & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}^0) & \ldots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_m}(\mathbf{x}^0)\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0) & \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}^0) & \ldots & \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_m}(\mathbf{x}^0)
\end{vmatrix} \neq 0. \qquad (4.10.3)$$

Метод исключения переменных

В некоторой окрестности $U(M_0)$ точки $M_0 = (x^0_{m+1}, \dots, x^0_d)$ система уравнений $\varphi_k(\mathbf{x}) = 0$, $1 \leqslant k \leqslant m$, по теореме о невной функции определяет m функций класса $C^2(U(M_0))$ от $(d-m)$ переменных:

$$\begin{aligned}
&x_1 = x_1(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_d),\\
&x_2 = x_2(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_d),\\
&\dots,\\
&x_m = x_m(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_d).
\end{aligned}$$

Таким образом

$$\begin{aligned}
f(x_1, \dots, x_d) =& f(x_1(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_d), \dots, x_m(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_d), x_{m+1}, \dots x_d) =\\
=& f^*(x_{m+1}, \dots, x_d).
\end{aligned}$$

Если точка $\mathbf{x}^0 = (x^0_1, x^0_2, \dots, x^0_d)$ — точка условного локального экстремума для f, то $(x^0_{m+1}, x^0_{m+2}, \dots, x^0_d)$ — точка обычного локального экстремума функции f^*.

Итак, исследование условного локального экстремума функции f сводиться к исследованию обычного локального экстремума для функции меньшего числа переменных.

Дифференциал функции f^* имеет вид:

$$df^* = \sum_{s=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_s} dx_s = \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_s} dx_s + \sum_{s=m+1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_s} dx_s,$$

где dx_1, dx_2, $\dots$, dx_m дифференциалы функций x_1, x_2, $\dots$, x_m, находятся в виде линейных комбинаций от дифференциалов независимых переменных $dx_{m+1}, dx_{m+2}, \dots, dx_d$ находятся из системы линейных уравнений

$$\sum_{s=1}^{d} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_s} dx_s = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant m < d,$$

например, по формулам Крамера.

Подставив, найденные выражения

$$\begin{aligned}
&dx_1 = dx_1(dx_{m+1}, dx_{m+2}, \dots, dx_d) = \sum_{k=m+1}^{d} a_{1k}(\mathbf{x}) dx_k,\\
&dx_2 = dx_2(dx_{m+1}, dx_{m+2}, \dots, dx_d) = \sum_{k=m+1}^{d} a_{2k}(\mathbf{x}) dx_k,\\
&\dots,\\
&dx_m = dx_m(dx_{m+1}, dx_{m+2}, \dots, dx_d) = \sum_{k=m+1}^{d} a_{mk}(\mathbf{x}) dx_k.
\end{aligned}$$

Получим

$$df^* = \sum_{k=m+1}^{d} \left(\sum_{s=1}^{m} a_{sk}(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_s} + \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) dx_k,$$

Координатами стационарной точки M_0 функции f^* по определению будут значения x^0_{m+1}, x^0_{m+2}, $\dots$, x^0_d, что в точке $\mathbf{x}^0 = (x_1(x^0_{m+1}, x^0_{m+2}, \dots, x^0_d), \dots, x_m(x^0_{m+1}, x^0_{m+2}, \dots, x^0_d), x^0_{m+1}, x^0_{m+2}, \dots, x^0_d)$ справедливы равенства

$$\sum_{s=1}^{m} a_{sk}(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_s} + \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0, \qquad k = m+1, \dots, d.$$

Таким образом в стационарных точках $df^*|_{(x^0_{m+1}, x^0_{m+2}, \dots, x^0_d)} = 0$.

Определение 4.10.2. Стационарными точками для функции $f(x)$, при наличии связей, называются точки $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^d$, удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{cases} df = \sum_{s=1}^d \dfrac{\partial f}{\partial x_s} dx_s = 0, \\ \sum_{s=1}^d \dfrac{\partial \varphi_j}{\partial x_s} dx_s = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant m < d, \end{cases} \tag{4.10.4}$$

Теорема 4.10.1 (Необходимое условие)**.** *Функции f и $\varphi_k(\mathbf{x})$, $1 \leqslant k \leqslant m$, принадлежат классу $C^1(\mathbb{R}^d)$ выполнено условие* (4.10.3) *и точка $\vec{x}^0$ — точка условного экстремума. Тогда выполнены условия* (4.10.4).

Замечание 35. Иначе говоря решения (4.10.4) являются стационарными точками функции f^*.

Доказательство. В силу инвариантности свойства первого дифференциала $df = df^*$. Таким образом выполнено первое свойство (4.10.4). Входящие в df (зависимые) дифференциалы dx_1, dx_2, …, dx_m соответственно равны

$$dx_k = \sum_{s=m+1}^{d} a_{ks}(\mathbf{x}) dx_s, \quad k = 1, \ldots, m,$$

поэтому вместе с независимыми дифференциалами dx_{m+1}, …, dx_d эти уравнения равносильны второму уравнению в системе (4.10.4). □

Исследуем достаточные условия экстремума в точке M_0 функции f^*. Для этого исследуем второй дифференциал $d^2 f^*$

$$d^2 f^* = \sum_{s,p=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_s \partial x_p} dx_s dx_p + \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_s} d^2 x_s.$$

Здесь $dx_{m+1}^2 = \ldots dx_d^2 = 0$, так как x_{m+1}, …, x_d независимые переменные. как квадратичную форму от $dx_{m+1}, dx_{m+2}, \ldots, dx_d$ на положительную или отрицательную определённость.

П р и м е р 4.10.2. Найти точки условного экстремума функции $f(x, y) = 4x - y$ при условии $x^2 - y^2 = 15$.

Доказательство. Рассмотрим условие как функцию $x = x(y)$. Тогда

$$f^*(y) = f(x(y), y) = 4x(y) - y.$$

Из условия $x^2 - y^2 = 15$ по теореме о неявной функции получаем $dx = (y/x)dy$. Следовательно

$$df^* = 4dx - dy = (4y/x - 1)dy.$$

Стационарные точки находим из условий

$$\begin{cases} \frac{4y}{x} - 1 = 0, \\ x^2 - y^2 = 15. \end{cases}$$

Откуда находим две стационарные точки $M_1(4, 1)$ и $M_2(-4, -1)$. При помощи достаточных условий исследуем эти точки на обычный экстремум для функции f^*. Найдём второй диференциал от f^*

$$d^2 f^* = d\left(\left(\frac{4y}{x} - 1\right) dy\right) = d\left(\frac{4y}{x} - 1\right) \cdot dy + \left(\frac{4y}{x} - 1\right) d^2 y =$$
$$= \left(4\frac{xdy - ydx}{x^2}\right) \cdot dy.$$

Здесь мы использовали то, что y независимая переменная, и следовательно $d^2y = 0$. Подставив $dx = (y/x)dy$ получаем

$$d^2 f^* = 4\left(\frac{x^2 - y^2}{x^3}\right) dy^2.$$

Но, в точках M_1 и M_2 справедливо

$$d^2 f^*\big|_{M_{1,2}} = 4\left(\frac{x^2 - y^2}{x^3}\right)\Big|_{M_{1,2}} dy^2.$$

Теперь окончательно

$$d^2 f^*\big|_{M_1} = 4\left(\frac{4^2 - 1^2}{4^3}\right) dy^2 = \frac{15}{16}\, dy^2,$$
$$d^2 f^*\big|_{M_2} = 4\left(\frac{4^2 - 1^2}{-4^3}\right) dy^2 = -\frac{15}{16}\, dy^2.$$

Таким образом в точке $M_1(4,1)$ условный локальный минимум, а в точке $M_2(-4,-1)$ условный локальный максимум. □

Метод множителей Лагранжа

Но на практике исследовать условный локальный экстремум удобнее использовать так называемые множители Лагранжа. Прежде чем сформулировать основные теоремы докажем следующую лемму.

Докажем следующую лемму:

Лемма 13. *Пусть* $\mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \dots \mathbf{b}_m \in \mathbb{R}^d$, *причём* $m < d$. *Тогда два условия равносильны:*

1. *Существуют константы* $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_m \in \mathbb{C}$ *такие, что* $\mathbf{a} = \sum_{j=1}^m \lambda_j \mathbf{b}_j$.
2. *Для любого вектора* $\mathbf{c} \in R^d$ *такого, что* $(\mathbf{c}, \mathbf{b}_j) = 0$, *для любого* $j = 1, \dots, m$ *вытекает* $(\mathbf{c}, \mathbf{a}) = 0$.

Замечание 36. Если вектора $\mathbf{b}_1, \dots \mathbf{b}_m$ линейно независимы, то представление $\mathbf{a} = \sum_{j=1}^m \lambda_j \mathbf{b}_j$ единственно.

Доказательство. Из первого условия очевидным образом вытекает второе.

Докажем, что из второго условия следует первое: Спроецируем вектор $\mathbf{a}$ на линейную оболочку векторов

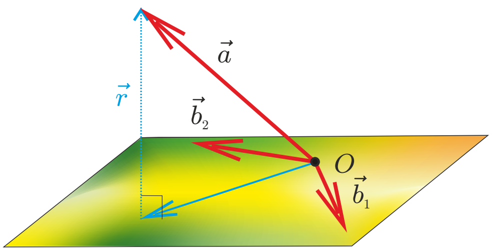


Рис. 4.18:

$\mathbf{b}_1, \dots \mathbf{b}_m$:

$$\mathbf{a} = \sum_{j=1}^m \lambda_j \mathbf{b}_j + \mathbf{r}, \quad \mathbf{r} \perp \mathbf{b}_j, \quad j = 1, \dots, m.$$

Заметим, что если вектора $\mathbf{b}_1, \dots \mathbf{b}_m$ линейно зависимы, то данное представление не единственно. Положим во втором условии леммы $\mathbf{c} = \mathbf{r}$. Тогда

$$0 = (\mathbf{c}, \mathbf{a}) = (\mathbf{r}, \sum_{j=1}^m \lambda_j \mathbf{b}_j + \mathbf{r}) = (\mathbf{r}, \mathbf{r}),$$

откуда $\mathbf{r} = 0$ или $\mathbf{a} = \sum_{j=1}^m \lambda_j \mathbf{b}_j$. □

Идея метода Лагранжа состоит в том, что вводиться вспомогательная функция

$$L(x_1,\dots,x_d,\lambda_1,\dots,\lambda_m)=f(x_1,\dots,x_d)+\sum_{j=1}^m\lambda_j\varphi_j(x_1,\dots,x_d),$$

где λ_j — постоянные числа, так называемые, множители Лагранжа. Затем ищем точки $N_0=(\mathbf{x}^0,\lambda_1^0,\dots,\lambda_m^0)\in\mathbb{R}^{d+m}$ такие, что выполнены соотношения:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_s}=\dfrac{\partial f}{\partial x_s}+\sum_{j=1}^m\lambda_j\dfrac{\partial\varphi_j}{\partial x_s}=0, \quad 1\leqslant s\leqslant d,\\ \varphi_j=0, \quad 1\leqslant j\leqslant m, \end{cases} \tag{4.10.5}$$

Потом исследуем второй диффернциал $d^2L(\mathbf{x})$ как квадратичную функцию от переменных dx_1, dx_2, …, dx_d (точнее от переменных dx_{m+1}, dx_{m+2}, …, dx_d, поскольку у нас есть уравнения связи) в точках $N_0=(\mathbf{x}^0,\lambda^0)$ и если $d^2L(\mathbf{x})\big|_{(\mathbf{x}^0,\lambda^0)}>0$ (<0), то точка N_0 условного локального минимума (максимума).

Теорема 4.10.2. *Функции f и $\varphi_k(\mathbf{x})$, $1\leqslant k\leqslant m$, принадлежат классу $C^1(\mathbb{R}^d)$ и выполнено условие* (4.10.3). *Тогда:*

- *Каждому решению $(\mathbf{x}^0,\lambda^0)$ системы уравнений* (4.10.5) *соответсвует стационарная точка $\mathbf{x}^0$ задачи* (4.10.4).
- *И наоборот: если $\mathbf{x}^0$ стационарная точка, то ей соответствует единственная система множителей $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ такая, что составленные для них уравнения* (4.10.5) *удовлетворяются при $\mathbf{x}=\mathbf{x}^0$.*

Доказательство. Введём вектора

$$(\operatorname{grad}f)|_{\mathbf{x}^0}=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\bigg|_{\mathbf{x}^0},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_d}\bigg|_{\mathbf{x}^0}\right),$$
$$(\operatorname{grad}\varphi_j)|_{\mathbf{x}^0}=\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1}\bigg|_{\mathbf{x}^0},\dots,\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_d}\bigg|_{\mathbf{x}^0}\right),\quad 1\leqslant j\leqslant m.$$

Пусть $(\mathbf{x}^0,\lambda^0)$ решение системы уравнений (4.10.5), т.е.

$$(\operatorname{grad}f)|_{\mathbf{x}^0}=-\sum_{j=1}^m\lambda_j^0(\operatorname{grad}\varphi_j)|_{\mathbf{x}^0}. \tag{4.10.6}$$

Следовательно, из ортогональности векторов $(\operatorname{grad}\varphi_j)|_{\mathbf{x}^0}$ всем векторам $(dx_1,\dots,dx_d)$ вытекает ортогональность вектора $(\operatorname{grad}f)|_{\mathbf{x}^0}$ всем векторам $(dx_1,\dots,dx_d)$, т.е. выполнены условия (4.10.4).

В обратную сторону: пусть $\mathbf{x}^0$ — стационарная точка, т.е. удовлетворяет условиям (4.10.4), докажем, что существуют множители Лагранжа $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ такие, что составленные для них уравнения (4.10.5) удовлетворяются при $\mathbf{x}=\mathbf{x}^0$.

Для любого вектора $(dx_1,\dots,dx_d)$ вытекает его ортогональность как всем векторам $(\operatorname{grad}\varphi_j)|_{\mathbf{x}^0}$ так и вектору $(\operatorname{grad}f)|_{\mathbf{x}^0}$. Следовательно по лемме 13 существуют константы λ_1^0, λ_2^0, …, $\lambda_m^0\in\mathbb{C}$ такие, что то выполняется равенство (4.10.6), а следовательно и условия (4.10.5) с данными λ_1^0, …, λ_m^0. □

Поскольку для всех $\mathbf{x}\in\mathbb{R}$ удовлятворяющих уравнениям связи справедливо

$$L(\mathbf{x})=f(\mathbf{x})-\sum_{j=1}^m\lambda_j\varphi_j(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}),$$

то для данных $\mathbf{x}$ справедливо

$$df(\mathbf{x})=dL(\mathbf{x})=\sum_{s=1}^d\frac{\partial L}{\partial x_s}\,dx_s=0,$$

для всех dx_s удовлетворяющих связям (второму уравнению в системе (4.10.4)) и связям вытекающим из этих уравнений

$$\sum_{s,p=1}^{d} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_s \partial x_p} dx_s\, dx_p + \sum_{s=1}^{d} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_s} d^2 x_s = 0, \quad k = 1, \ldots, d$$

будет справедливо:

$$d^2 f = d^2 L = \sum_{s,p=1}^{d} \frac{\partial^2 L}{\partial x_s \partial x_p} dx_s\, dx_p + \sum_{s=1}^{d} \frac{\partial L}{\partial x_s} d^2 x_s.$$

Но поскольку для $(\mathbf{x}^0, \lambda^0)$, где λ^0 — множители Лагранжа, то $\left.\frac{\partial L}{\partial x_s}\right|_{(\mathbf{x}^0, \lambda^0)} = 0$ и

$$d^2 f\big|_{\mathbf{x}^0} = d^2 L\big|_{(\mathbf{x}^0, \lambda^0)} = \sum_{s,p=1}^{d} \left.\frac{\partial^2 L}{\partial x_s \partial x_p}\right|_{(\mathbf{x}^0, \lambda^0)} dx_s\, dx_p.$$

Последнее равенство верно для любых dx_s удовлетворяющих второму условию в системе (4.10.4). Следовательно, остаётся исследовать второй дифференциал функции Лагранжа на положительную либо отрицательную определённость, как квадратичной формы от dx_s, при условии связи дифференциалов (вторым уравнения в (4.10.4)). Т.е. нужно рассматривать $d^2 L$ как квадратичную форму от независимых дифференциалов dx_s, $s = m+1, \ldots, d$.

П р и м е р 4.10.3. Найти точки условного экстремума функции $f(x, y) = 4x - y$ при условии $x^2 - y^2 = 15$.

Доказательство. Рассмотрим функция Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) = 4x - y + \lambda(x^2 - y^2 - 15).$$

1. Необходимое условие. Стационарные точки находим из условий

$$\left\{ \begin{array}{l} L_x(x, y, \lambda) = 0, \\ L_y(x, y, \lambda) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4 + 2x\lambda = 0, \\ -1 - 2y\lambda = 0, \\ x^2 - y^2 = 15. \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -2/\lambda, \\ y = -1/(2\lambda), \\ x^2 - y^2 = 15. \end{array} \right.$$

Подставив найденные значения переменных x и y из первых двух уравнений, в третье уравнение находим $\lambda = \pm 1/2$. Откуда находим две стационарные точки $M_1(4, 1, -1/2)$ и $M_2(-4, -1, 1/2)$.

2. Достаточное условие. При помощи достаточных условий исследуем эти точки на условный экстремум. Найдём второй диференциал от функции Лагранжа $L(x, y, \lambda)$.

$$d^2 L = L''_{xx} dx^2 + 2L''_{xy} dx\, dy + L''_{yy} dy^2 = 2\lambda \left(dx^2 - dy^2\right).$$

Использую уравнение связи $x^2 - y^2 = 15$, находим зависимость дифференцалов $dx = (y/x)dy$. Откуда

$$d^2 L = 2\lambda \left(\frac{y^2}{x^2} - 1\right) dy^2.$$

Теперь окончательно

$$d^2 L\big|_{M_1} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{16} - 1\right) d^2 y = \frac{15}{16} d^2 y,$$

$$d^2 L\big|_{M_2} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{16} - 1\right) d^2 y = -\frac{15}{16} d^2 y.$$

Таким образом в точке $M_1(4, 1)$ условный локальный минимум, а в точке $M_2(-4, -1)$ условный локальный максимум. □

Контрольные вопросы.

1. Сформулируете достаточные условия минимума в терминах функции Лагранжа в задаче с одним уравнением связи и четырьмя независимыми переменными.

Упражнения к 4.10

Упражнение 4.10.1. *Найдите макимальное значение функции* $f(x_1, x_2) = \min\{2x_1, x_2^3\}$, *при условии* $x_1 + x_2 = 6$. *В какой точке плокости достигается максимум?*

Упражнение 4.10.2. *Рассмотрим два вектора* $\vec{x} = (1, 0, -1)$ *и* $\vec{y} = (1, 1, -2)$. *Найдите вектор* $\vec{z}$ *у которого будет максимальна длина, если* $\vec{z} = a\vec{x} + b\vec{y}$, *где* a *и* b *веса, удовлетворяющие условию* $a^2 + b^2 = 1$.

Упражнение 4.10.3. *Нйдите минимальное и максимальное значение функции* $z(x, y) = y - \frac{1}{x}$ *при условии связи* $x^2 + y^2 = 2$.

Упражнение 4.10.4. *Найдите размеры прямоугольного параллелепипеда максимального объёма, вписанного в полушар радиуса* R.

Упражнение 4.10.5. *При помощи функции Лагранжа найдите точку на эллипсе* $2x^2 + y^2 + 3z^2 = 16$ *ближайшую к плоскости* $x + y + z = 34$ *и точку, которая имеет самое большое расстояние от той же плоскости. Чему равны эти расстояния?*

Ответы: **4.10.1** $f_{\max} = 8$, $(x_1^0, x_2^0) = (4, 2)$. **4.10.2** ???? **4.10.3** $z_{\min}(1; -1) = -2$, $z_{\max}(-1; 1) = 2$. **4.10.4** $\frac{2R}{\sqrt{3}}$, $\frac{2R}{\sqrt{3}}$, $\frac{R}{\sqrt{3}}$. **4.10.5** точка $A_1\left(2\sqrt{\frac{6}{11}}, 4\sqrt{\frac{6}{11}}, 4\sqrt{\frac{2}{33}}\right)$ — ближайшая $\varrho = (34 - (2\sqrt{\frac{22}{3}}))/\sqrt{3}$; самое большое расстояние от эллипса до плоскости имеет точка $A_2\left(-2\sqrt{\frac{6}{11}}, -4\sqrt{\frac{6}{11}}, -4\sqrt{\frac{2}{33}}\right)$, равное $\varrho = (34 + (2\sqrt{\frac{22}{3}}))/\sqrt{3}$. *Замечание:* данную задачу можно решить и без функции Лагранжа (используя соображение с касательной плоскостью).

4.11 Окаймлённый гессиан

4.11.1 Случай двух переменных одно уравнение связи

Будем искать экстремум функции $f(x, y)$ при условии $\varphi(x, y) = 0$. Функция Лагранжа принимает вид:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y).$$

Тогда

$$d^2L(x, y, \lambda) = L''_{xx}dx^2 + 2L''_{xy}dx\,dy + L''_{yy}dy^2.$$

Здесь мы использовали то, что $L''_{xy} = L''_{yx}$ в виду гладкости исходных функций. Используя уравнение связи имеем:

$$\begin{aligned} &\varphi'_x(x, y)\,dx + \varphi'_y(x, y)\,dy = 0 \iff \\ \iff\quad &dy = -\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}\,dx. \end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned} d^2L(x, y, \lambda) &= L''_{xx}dx^2 + 2L''_{xy}dx\left(-\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}\,dx\right) + L''_{yy}\left(-\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}\,dx\right)^2 = \\ &= -\frac{1}{(\varphi'_y)^2}\,(dx)^2 \cdot \left(-(\varphi'_y)^2L''_{xx} + 2\varphi'_x\varphi'_yL''_{xy} - (\varphi'_x)^2L''_{yy}\right) = \\ &= -\frac{1}{(\varphi'_y)^2}\,(dx)^2 \cdot \det H_3, \end{aligned}$$

где

$$H_3 = \begin{pmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ \varphi'_y & L''_{xy} & L''_{yy} \end{pmatrix}.$$

Матрица называется *окаймлённой матрицей Гессе*, а определитель $\det H_3$ — *окаймлённым гессианом.* Для стационарной точки $A_0 = (x_0, y_0, \lambda^0)$ возможны следующии случаи:

- если $(-1)\det H_3 > 0$ в стационарной точке A_0, то у исходной функции условный минимум в точке A_0,
- если $(-1)\det H_3 < 0$ в стационарной точке A_0, то у исходной функции условный максимум в точке A_0,
- если $\det H_3 = 0$ в стационарной точке A_0, то вопрос об исследовании на экстремум остаётся не решенным, требуется дополнительная информация.

4.11.2 Случай трёх переменных одно уравнение связи

Будем искать экстремум функции $f(x,y,z)$ при условии $\varphi(x,y,z)=0$. Функция Лагранжа принимает вид:

$$L(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda\cdot\varphi(x,y,z).$$

По аналогии с предыдущим случаем метод Лагранжа приводит к матрице Гесса

$$H_4=\begin{pmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y & \varphi'_z \\ \varphi'_x & L''_{xx} & L''_{xy} & L''_{xz} \\ \varphi'_y & L''_{yx} & L''_{yy} & L''_{yz} \\ \varphi'_z & L''_{zx} & L''_{zy} & L''_{zz} \end{pmatrix}.$$

Для стационарной точки $A_0=(x_0,y_0,z_0,\lambda^0)$ возможны следующии случаи:

- если $(-1)\det H_3>0$, $(-1)\det H_4>0$ в стационарной точке A_0, то у исходной функции условный минимум в точке A_0,
- если $(-1)\det H_3<0$, $(-1)\det H_4>0$ в стационарной точке A_0, то у исходной функции условный максимум в точке A_0,
- если $(-1)\det H_4<0$ в стационарной точке A_0, то условного экстремума нет в точке A_0,
- если $\det H_3=0$ либо $\det H_4=0$ в стационарной точке A_0, то вопрос об исследовании на экстремум остаётся не решенным, требуется дополнительная информация.

4.11.3 Случай трёх переменных два уравнение связи

Будем искать экстремум функции $f(x,y,z)$ при наличии двух уравнений связи $\varphi(x,y,z)=0$, $\psi(x,y,z)=0$. Функция Лагранжа принимает вид:

$$L(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda_1\cdot\varphi(x,y,z)+\lambda_2\cdot\psi(x,y,z).$$

По аналогии с предыдущим случаем метод Лагранжа приводит к матрице Гесса

$$H_5=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \varphi'_x & \varphi'_y & \varphi'_z \\ 0 & 0 & \psi'_x & \psi'_y & \psi'_z \\ \varphi'_x & \psi'_x & L''_{xx} & L''_{xy} & L''_{xz} \\ \varphi'_y & \psi'_y & L''_{yx} & L''_{yy} & L''_{yz} \\ \varphi'_z & \psi'_z & L''_{zx} & L''_{zy} & L''_{zz} \end{pmatrix}.$$

Для стационарной точки $A_0=(x_0,y_0,z_0,\lambda_1^0,\lambda_2^0)$ возможны следующии случаи:

- если $\det H_5>0$ в стационарной точке A_0, то у исходной функции условный минимум в точке A_0,
- если $\det H_5<0$ в стационарной точке A_0, то у исходной функции условный максимум в точке A_0,
- если $\det H_5=0$ в стационарной точке A_0, то вопрос об исследовании на экстремум остаётся не решенным, требуется дополнительная информация.

4.11.4 Общий случай

Будем искать экстремум функции $f(x_1,\dots x_d)$ при наличии уравнений связи

$$\begin{aligned} &\varphi_1(x_1,x_2,\dots,x_d)=0,\\ &\varphi_2(x_1,x_2,\dots,x_d)=0,\\ &\dots,\\ &\varphi_m(x_1,x_2,\dots,x_d)=0, \end{aligned}$$

Функция Лагранжа принимает вид:

$$L(x_1,\dots x_d,\lambda)=f(x_1,\dots,x_d)+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\cdot\varphi_k(x_1,\dots x_d).$$

По аналогии с предыдущим случаем исследование на достаточные условия приводят к изучению второго дифференциала функции Лагранжа d^2L, так называемой окаймлённой матрицей Гессе,

$$d^2L=\begin{pmatrix}L''_{\lambda,\lambda} & L''_{\lambda,x}\\ L''_{x,\lambda} & L''_{x,x}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}L''_{\lambda_1,\lambda_1} & L''_{\lambda_1,\lambda_2} & \dots & L''_{\lambda_1,\lambda_m} & L''_{\lambda_1,x_1} & L''_{\lambda_1,x_2} & \dots & L''_{\lambda_1,x_d}\\ L''_{\lambda_2,\lambda_1} & L''_{\lambda_2,\lambda_2} & \dots & L''_{\lambda_2,\lambda_m} & L''_{\lambda_2,x_1} & L''_{\lambda_2,x_2} & \dots & L''_{\lambda_2,x_d}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ L''_{\lambda_m,\lambda_1} & L''_{\lambda_m,\lambda_2} & \dots & L''_{\lambda_m,\lambda_m} & L''_{\lambda_m,x_1} & L''_{\lambda_m,x_2} & \dots & L''_{\lambda_m,x_d}\\ L''_{x_1,\lambda_1} & L''_{x_1,\lambda_2} & \dots & L''_{x_1,\lambda_m} & L''_{x_1,x_1} & L''_{x_1,x_2} & \dots & L''_{x_1,x_d}\\ L''_{x_2,\lambda_1} & L''_{x_2,\lambda_2} & \dots & L''_{x_2,\lambda_m} & L''_{x_2,x_1} & L''_{x_2,x_2} & \dots & L''_{x_2,x_d}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ L''_{x_d,\lambda_1} & L''_{x_d,\lambda_2} & \dots & L''_{x_d,\lambda_m} & L''_{x_d,x_1} & L''_{x_d,x_2} & \dots & L''_{x_d,x_d}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 0 & \dots & 0 & (\varphi_1)'_{x_1} & (\varphi_1)'_{x_2} & \dots & (\varphi_1)'_{x_d}\\ 0 & 0 & \dots & 0 & (\varphi_2)'_{x_1} & (\varphi_2)'_{x_2} & \dots & (\varphi_2)'_{x_d}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 0 & (\varphi_m)'_{x_1} & (\varphi_m)'_{x_2} & \dots & (\varphi_m)'_{x_d}\\ (\varphi_1)'_{x_1} & (\varphi_2)'_{x_1} & \dots & (\varphi_m)'_{x_1} & L''_{x_1x_1} & L''_{x_1x_2} & \dots & L''_{x_1x_d}\\ (\varphi_1)'_{x_2} & (\varphi_2)'_{x_2} & \dots & (\varphi_m)'_{x_2} & L''_{x_2x_1} & L''_{x_2x_2} & \dots & L''_{x_2x_d}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ (\varphi_1)'_{x_d} & (\varphi_2)'_{x_d} & \dots & (\varphi_m)'_{x_d} & L''_{x_dx_1} & L''_{x_dx_2} & \dots & L''_{x_dx_d}\end{pmatrix}.$$

Приведём без доказательства достаточные условия условного экстремума

Теорема 4.11.1 (Достаточные условия существования условного экстремума). *Исследуем на экстремум функцию $f:\mathbb{R}^d\mapsto\mathbb{R}^1$, на множестве $G\subset\mathbb{R}^d$ точек, удовлетворящих уравнениям связи. Пусть f и $\varphi_k(\mathbf{x})$, $1\leqslant k\leqslant m$, принадлежат классу $C^2(G)$ и выполнено условие* (4.10.3). *Тогда для стационарной точки $A_0=(x_1^0,x_2^0,\dots,x_d^0,\lambda_1^0,\lambda_2^0,\dots,\lambda_m^0)$ возможны следующии случаи:*

- *если угловые миноров $(-1)^m\det H_{2m+1}>0$, $(-1)^m\det H_{2m+2}>0$, $(-1)^m\det H_{m+d}>0$, в стационарной точке A_0, то у исходной функции условный минимум в точке A_0,*
- *если знаки угловых миноров чередуются начиная со знака $(-1)^{m+1}$, т.е. $(-1)^{m+1}\det H_{2m+1}>0$, $(-1)^{m+2}\det H_{2m+2}>0$, $(-1)^d\det H_{m+d}>0$, в стационарной точке A_0, то у исходной функции условный максимум в точке A_0.*

П р и м е р 4.11.1. Найти точки условного экстремума функции $f(x,y)=4x-y$ при условии $x^2-y^2=15$.

Доказательство. Рассмотрим функция Лагранжа

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)=4x-y+\lambda(x^2-y^2-15).$$

1. Необходимое условие. Критические точки находим из условий

$$\begin{cases}L_x(x,y,\lambda)=0,\\ L_y(x,y,\lambda)=0,\\ \varphi(x,y)=0.\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}4+2x\lambda=0,\\ -1-2y\lambda=0,\\ x^2-y^2=15.\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x=-2/\lambda,\\ y=-1/(2\lambda),\\ x^2-y^2=15.\end{cases}$$

Подставив найденные значения переменных x и y из первых двух уравнений, в третье уравнение находим $\lambda=\pm 1/2$. Откуда находим две критические точки $M_1(4,1,-1/2)$ и $M_2(-4,-1,1/2)$.

2. Достаточное условие. При помощи достаточных условий исследуем эти точки на условный экстремум. Окаймленный Гессиан принимает вид:

$$\det H_3=\begin{vmatrix}0 & \varphi'_x & \varphi'_y\\ \varphi'_x & L''_{xx} & L''_{xy}\\ \varphi'_y & L''_{xy} & L''_{yy}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 2x & -2y\\ 2x & 2\lambda & 0\\ -2y & 0 & -2\lambda\end{vmatrix}=-8\lambda y^2+8\lambda x^2=8\lambda(x^2-y^2).$$

В нашем случае уравнение связи одно, поэтому $m = 1$. Откуда

$$(-1)^1 \det H_3\big|_{M_1} = 4 \cdot 15 > 0,$$
$$(-1)^1 \det H_3\big|_{M_2} = -4 \cdot 15 < 0.$$

Таким образом в точке $M_1(4, 1)$ условный локальный минимум, а в точке $M_2(-4, -1)$ условный локальный максимум. □

Контрольные вопросы.

1. Сформулируете достаточные условия минимума в терминах окаймлённого Гессиана в задаче с одним уравнением связи и четырьмя независимыми переменными.
2. Сформулируете достаточные условия максимума в терминах окаймлённого Гессиана в задаче с двумя уравнением связи и четырьмя независимыми переменными.

Упражнения к 4.11

Упражнение 4.11.1. *Пусть $f(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция на $\mathbb{R}$ такая, что $f''(x) > 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Рассмотрим следующую задачу*

$$F(x_1, x_2, \dots, x_d) = \sum_{k=1}^{d} f(x_k) \to \min,$$
$$\sum_{k=1}^{d} x_k = 1,$$

где $(x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. Найдите стационарные точки данной задачи (убедитесь, что точка будет одна). При помощи окаймлённого Гессиана докажите, что найденная стационарная точка доставляет минимум в задаче.

Ответы: 4.11.1 критическая точка $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$ доставляет минимум в данной задаче.

4.12 Наибольшее (наименьшее) значение в области

Определение 4.12.1. Пусть $G \subset \mathbb{R}^d$ — некоторое множество. Функция $f : G \to \mathbb{R}$ имеет в точке $\mathbf{x}^0$ *глобальный или абсолютный минимум (максимум)*, если для любого $\mathbf{x} \in G$ выполнено $f(\mathbf{x}) \geqslant f(\mathbf{x}^0)$ $(f(\mathbf{x}) \leqslant f(\mathbf{x}^0))$.

Такие точки называются точками *глобального или абсолютного экстремума*, а значение функции в данных точках — *глобальным или абсолютным экстремумом*. Значение функции в точке глобального максимума (минимума) называют также *наибольшим (наименьшим) значением* функции на множестве D.

Если функция непрерывна на ограниченном замкнутом множестве, то на этом множестве найдётся точка, в которой функция принимает наибольшее значение, а также точка в которой функция принимает наименьшее значение. Следовательно, непрерывная на ограниченном замкнутом множестве функция имеет на этом множестве по крайней мере одну точку глобального максимума и одну точку глобального минимума.

Предположим, что множество $G \subset \mathbb{R}^d$, можно задать системой неравенств

$$\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_d) \leqslant 0,$$
$$\varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_d) \leqslant 0,$$
$$\dots,$$
$$\varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_d) \leqslant 0,$$

где $\varphi_k \in C(G)$, $1 \leqslant k \leqslant m$.

Для того, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции в рассматриваемой области, следует вычислить значения локальных экстремумов внутри области, затем найти все условные экстремумы на каждом из ограничений на множество G (ограничения на множество G заданны условиями $\varphi_s(x_1, x_2, \ldots, x_d) = 0$), и выбрать из этих значений наибольшее и наименьшее.

В случае $G \subset \mathbb{R}^2$, следует вычислить значения локальных экстремумов внутри области, затем найти все условные экстремумы на каждом из ограничений $\varphi_s(x_1, x_2, \ldots, x_d) = 0$, $s = 1, \ldots, m$, найти значения функции в вершинах "многоугольника"и выбрать из этих значений наибольшее и наименьшее.

Заметим, что, если функция дифференцируема в рассматриваемой области, то можно найти значения функции в стационарных точках внутри области и на ее границах, не проверяя достаточных условий существования экстремума.

Действительно, если стационарная точка не является точкой локального или условного экстремума, то она не может быть и точкой глобального экстремума.

П р и м е р 4.12.1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2y - 5$ в области $y - x \leqslant 2$, $x + y \leqslant 2$, $y \geqslant 0$. Данная область является треугольником с вершинами $A(-2, 0)$, $B(0, 2)$ и $C(2, 0)$, стороны которого расположены на прямых $y - x = 2$, $y + x = 2$, $y = 0$ (см. рис. 4.19).

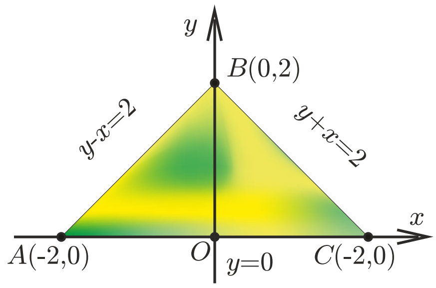


Рис. 4.19: Наибольшее и наименьшее значения функции.

1. Найдем стационарные точки внутри области. Вычислим частные производные функции $f(x, y)$ и приравняем их нулю

$$\begin{cases} f'_x = 2x = 0, \\ f'_y = 2y - 2 = 0. \end{cases}$$

Полученная система имеет решение $(0, 1)$, которое принадлежит исходной области. Следовательно, точка $(0, 1)$ — единственная стационарная внутри области. Найдём значение в этой точке $f(0, 1) = -6$.

2. Найдем стационарные точки на стороне AC. Координаты точек, лежащих на AC удовлетворяют условиям $y = 0$, $x \in [-2, 2]$. Тогда рассматриваемая функция принимает вид $f(x, y) = x^2 - 5$. Стационарная точка определяется из условия $f'_x = 0$. Отсюда $x = 0$. Вычислим значение функции в найденной точке $f(0, 0) = -5$.

3. Рассмотрим точки, лежащие на стороне AB. Их координаты удовлетворяют условиям $x = y - 2$, $y \in [0, 2]$. При этом имеем $f(x, y) = 2y^2 - 6y - 1$. Стационарная точка определяется из условия $f'_y = 0$. Отсюда $y = 3/2$. Вычислим значение функции в найденной точке $f(-1/2, 3/2) = -5.5$.

4. Найдем стационарные точки на стороне BC. Здесь $x = 2 - y$, $y \in [0, 2]$. При этом имеем $f(x, y) = 2y^2 - 6y - 1$. Из условия $f'_y = 0$. Отсюда $y = 3/2$. Вычислим значение функции в найденной стационарной точке $f(1/2, 3/2) = -5.5$.

5. Найдем значения функции в вершинах треугольника (вершины мы расссматриваем как пересечение граничных условий) $f(-2, 0) = f(2, 0) = -1$, $f(0, 2) = -5$. Выберем наибольшее и наименьшее из этих значений.

Итак, функция принимает наибольшее значение $f_{\max} = -1$ в точках $(\pm 2, 0)$, наименьшее значение $f_{\min} = -6$ в точке $(0, 1)$.

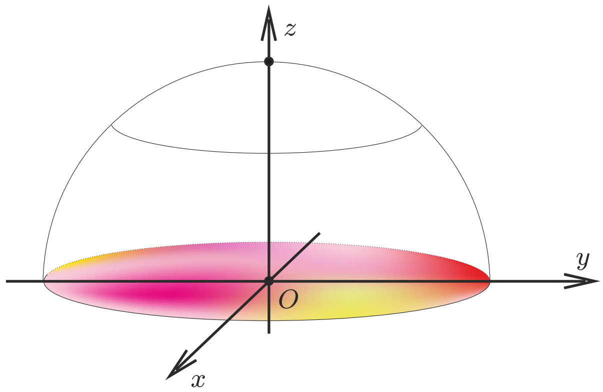


Рис. 4.20: Наибольшее и наименьшее значения функции.

Пример 4.12.2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y,z) = z^2+x^2+y^2-\frac{y^3}{3}-(x+z)+1$ в области $z \geqslant 0$, $x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$. Данная область изображена на рис. 4.20.

1. Найдем стационарные точки внутри области. Вычислим частные производные функции $f(x,y)$ и приравняем их нулю

$$\begin{cases} f'_x = 2x - 1 = 0, \\ f'_y = y(2-y) = 0, \\ f'_z = 2z - 1 = 0. \end{cases}$$

Полученная система имеет единственное решение $(1/2, 0, 1/2)$, которое принадлежит исходной области. Следовательно, точка $(1/2, 0, 1/2)$ — единственная стационарная внутри области. Найдём значение в этой точке $f(1/2, 0, 1/2) = 1/2$.

2. Найдем стационарные точки на поверхности $z = 0$ в области $x^2+y^2 \leqslant 1$. Тогда рассматриваемая функция принимает вид $f(x,y,z) = x^2+y^2-\frac{y^3}{3}-x+1$. Стационарная точка определяется из условий

$$\begin{cases} f'_x = 2x - 1 = 0, \\ f'_y = y(2-y) = 0. \end{cases}$$

Система имеет единственное решение $(1/2, 0, 0)$, которое принадлежит области $x^2+y^2 \leqslant 1$. Вычислим значение функции в найденной точке $f(1/2, 0, 0) = 3/4$.

3. Рассмотрим точки, лежащие на поверхности $x^2+y^2+z^2 = 1$, $z \geqslant 0$. Будем искать экстремум функции $f(x,y,z)$ при условии $x^2+y^2+z^2 = 1$, $z \geqslant 0$. Составим функцию Лагранжа

$$L(x,y,z,\lambda) = z^2+x^2+y^2-\frac{y^3}{3}-(x+z)+1+\lambda\cdot(x^2+y^2+z^2-1)$$

Стационарная точка определяется из условий

$$\begin{cases} L'_x = 2x - 1 + 2\lambda x = 0, \\ L'_y = y(2-y+2\lambda) = 0, \\ L'_z = 2z - 1 + 2\lambda z = 0, \\ x^2+y^2+z^2 = 1. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2(1+\lambda)}, \\ z = \frac{1}{2(1+\lambda)}, \\ y = 0 \quad \text{либо} \quad y = 2(1+\lambda), \\ x^2+y^2+z^2 = 1. \end{cases}$$

Рассмотрим два случая:

I. Пусть $y = 2(1+\lambda)$. Тогда $x = z = \frac{1}{2(1+\lambda)}$ и подставляя в уравнение связи $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ получаем биквадратное уравнение относительно переменной $(1+\lambda)$

$$4(1+\lambda)^2 + \frac{1}{2(1+\lambda)^2} = 1 \Longleftrightarrow 4(1+\lambda)^4 - (1+\lambda)^2 + \frac{1}{2} = 0 \Longleftrightarrow$$
$$\left(2(1+\lambda)^2 - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16} = 0,$$

которое не имеет решений.

II. Пусть $y = 0$. Тогда $x = z = \frac{1}{2(1+\lambda)}$ и подставляя в уравнение связи $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ получаем

$$x = z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$\lambda = -1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом точки $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ — стационарные. Значение в этих точках $f(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}) = 2 - \sqrt{2}$, $f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = 2 + \sqrt{2}$.

4. Найдем стационарные точки на пересечении поверхностей $z = 0$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Ищем стационарные точки функции $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - \frac{y^3}{3} - x + 1$, при условии $x^2 + y^2 = 1$. Составим функцию Лагранжа

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - \frac{y^3}{3} - x + 1 + \lambda \cdot (x^2 + y^2 - 1)$$

Стационарная точка определяется из условий

$$\begin{cases} 2x(1+\lambda) = 0, \\ y(2(1+\lambda) - y) = 0, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Рассмотрим два случая:

I. Пусть $x = 0$. Тогда из второго уравнения либо $y = 2(1+\lambda)$, либо $y = 0$, но случай $y = 0$ невозможен, т.к. тогда уравнение связи $x^2 + y^2 = 1$ не выполняется. Подставив в уравнение связи, находим $y = \pm 1$, $\lambda = \pm 1/2 - 1$. Находим значение в этих стационарных точках $f(0, 1, 0) = 5/3$, $f(0, -1, 0) = 7/3$.

II. Пусть $\lambda = -1$. Тогда из второго уравнения получаем $y = 0$. Подставив в уравнение связи, находим $x = \pm 1$. Находим значение в этих стационарных точках $f(1, 0, 0) = 1$, $f(-1, 0, 0) = 3$. Выберем наибольшее и наименьшее из этих значений.

Итак, функция принимает наибольшее значение $f_{\max} = 2 + \sqrt{2}$ в точке $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, наименьшее значение $f_{\min} = 1/2$ в точке $(1/2, 0, 1/2)$.

4.13 Приложение теории условного экстремума к экономической теории

Ниже мы рассмотрим две модели. Даны два товара, один — стоимостью p_1 за единицу, другой — стоимостью p_2 за единицу измерения (предполагается, что можно купить любые количества x_1, x_2 этих товаров). Наличные средства — M. Товары в количестве x_1, x_2 обладают совокупной полезностью $U(x_1, x_2)$.

	количество товара	цена за единицу
	x_1	p_1
	x_2	p_2

- **(Первая модель)** Требуется добиться наибольшего значения функции полезности $U(x_1, x_2)$ при условии, что расходы не превосходят M, т.е.

$$\begin{aligned} &U(x_1, x_2) \to \max \\ &p_1x_1 + p_2x_2 \leqslant M. \end{aligned}$$

- **(Вторая модель)** Требуется добиться фиксированного значения $\tilde{u}$ функции полезности $u(x_1, x_2)$ при минимальных затратах $p_1x_1 + p_2x_2$ на покупку двух товаров.

$$\begin{aligned} &p_1x_1 + p_2x_2 \to \min \\ &U(x_1, x_2) = \tilde{u}. \end{aligned}$$

Разберём обе эти модели подробнее.

4.13.1 Задача рационального поведения потребителя на рынке. Функции спроса по Маршаллу. Функция косвенной полезности, её свойства.

Постановка задачи

Требуется купить два товара, один — стоимостью p_1 за единицу, другой — стоимостью p_2 за единицу измерения (предполагается, что можно купить любые количества x_1, x_2 этих товаров). Наличные средства — M. Товары в количестве x_1, x_2 обладают совокупной полезностью $U(x_1, x_2)$. Требуется добиться наибольшего значения функции полезности $U(x_1, x_2)$ при условии, что расходы не превосходят M.

Предварительные замечания.

Задача сводится к нахождению функции $U(x_1, x_2)$ на области $G \subset \mathbb{R}^2$, ограниченной прямыми $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ и $p_1x_1 + p_2x_2 = M$. Сначала ищем экстремум во внутренних точках области, решая систему

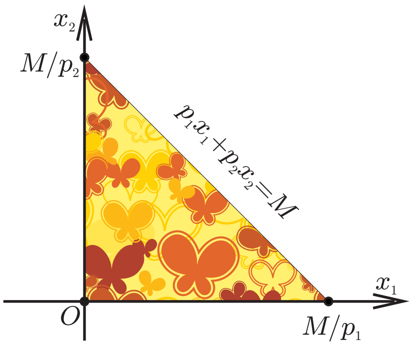


Рис. 4.21: Область G в переменных x_1, x_2.

$$\begin{cases} U'_{x_1} = 0, \\ U'_{x_2} = 0. \end{cases}$$

И исследуя найденные точки, используя достаточный признак экстремума. Затем рассмотрим функцию $U(x_1, 0)$ на отрезке $0 \leqslant x_1 \leqslant M/p_1$ и посчитаем её наибольшее значение; то же для функции $U(0; x_2)$ на отрезке $0 \leqslant x_2 \leqslant M/p_2$. Осталось найти наибольшее значение функции $U(x_1, x_2)$ при условии $p_1x_1 + p_2x_2 = M$, после чего, сравнивая вышеупомянутые наибольшие значения внутри области G и на её границах, получим решение задачи. Отметим, что эта процедура пригодна для произвольной дифференцируемой функции полезности $U(x_1, x_2)$. Поскольку мы можем не проверять достаточные условия в случаи дифференцируемости функций. В большинстве случаев рассматриваемая функция полезности такова, что наибольшее значение функция полезности принимает на границе $U(x_1, x_2)$.

Задача о нахождении условного экстремума функции

Найдём условный экстремум функции $U(x_1, x_2)$ при $p_1x_1+p_2x_2 = M$. Для этого построим функцию Лагранжа

$$L(x_1, x_2, \lambda) = U(x_1, x_2) + \lambda \cdot (M - p_1x_1 - p_2x_2).$$

Приравняем к нулю её частные производные

$$\begin{cases} L'_{x_1} = U'_{x_1} - \lambda p_1 = 0, \\ L'_{x_2} = U'_{x_2} - \lambda p_2 = 0, \\ L'_{\lambda} = M - p_1x_1 - p_2x_2 = 0. \end{cases}$$

Предположим, что система имеет единственное решение $\tilde{x}_1(p_1, p_2, M)$, $\tilde{x}_2(p_1, p_2, M)$, $\tilde{\lambda}(p_1, p_2, M)$.

Определение 4.13.1. Функции $\tilde{x}_1(p_1, p_2, M)$, $\tilde{x}_2(p_1, p_2, M)$ называются *функциями спроса по Маршаллу.* Функция

$$U(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = U(\tilde{x}_1(p_1, p_2, M), \tilde{x}_2(p_1, p_2, M)) = V(p_1, p_2, M)$$

называется *функцией косвенной полезности.*

Справедливы равенства

$$\begin{cases} U'_{x_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \tilde{\lambda} p_1, \\ U'_{x_2}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \tilde{\lambda} p_2. \end{cases}$$

Уравнение связи принимает вид $p_1\tilde{x}_1 + p_2\tilde{x}_2 = M$. Предположим, что $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$ — дифференцируемые функции и, дифференцируя это равенство по М, находим:

$$p_1\frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial M} + p_2\frac{\partial \tilde{x}_2}{\partial M} = 1.$$

Предположим, что p_1 — переменная величина, M и p_2 не зависят от p_1. Тогда, дифференцируя уравнение связи по p_1, находим

$$\tilde{x}_1 + p_1\frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial p_1} + p_2\frac{\partial \tilde{x}_2}{\partial p_1} = 0,$$

оттуда $p_1\frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial p_1} + p_2\frac{\partial \tilde{x}_2}{\partial p_1} = -\tilde{x}_1$. Аналогично,

$$p_1\frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial p_2} + p_2\frac{\partial \tilde{x}_2}{\partial p_2} = -\tilde{x}_2.$$

Лемма 14. *Справедливы равенства*

$$V'_M = \tilde{\lambda},$$
$$V'_{p_k} = -\tilde{\lambda}\tilde{x}_k, \ k = 1, 2.$$

Последнее равенство называется тождество Роя.

Доказательство. Справедливо

$$V'_M = \frac{\partial}{\partial M}\left(U(\tilde{x}_1(p_1, p_2, M), \tilde{x}_2(p_1, p_2, M))\right) = U'_{x_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \cdot \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial M} + U'_{x_2}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \cdot \frac{\partial \tilde{x}_2}{\partial M} = \\ = \tilde{\lambda}\left(p_1 \cdot \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial M} + p_2 \cdot \frac{\partial \tilde{x}_2}{\partial M}\right) = \tilde{\lambda}.$$

Докажем второе равенство леммы:

$$V'_{p_k} = \frac{\partial}{\partial p_k}\left(U(\tilde{x}_1(p_1, p_2, M), \tilde{x}_2(p_1, p_2, M))\right) = U'_{x_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \cdot \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial p_k} + U'_{x_2}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \cdot \frac{\partial \tilde{x}_2}{\partial p_k} = \\ = \tilde{\lambda}\left(p_1 \cdot \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial p_k} + p_2 \cdot \frac{\partial \tilde{x}_2}{\partial p_k}\right) = -\tilde{\lambda}\tilde{x}_k.$$

□

П р и м е р 4.13.1. Рассмотрим в качестве иллюстрации предыдущего пример, в котором

$$U(x_1, x_2) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}, \quad 0 < \alpha_k < 1,\ k = 1, 2.$$

Доказательство. Функция Лагранжа принимает вид

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} + \lambda \cdot (M - p_1 x_1 - p_2 x_2).$$

1. Необходимое условие. Найдём стационарные точки

$$\begin{cases} L'_{x_1} = \alpha_1 x_1^{\alpha_1 - 1} x_2^{\alpha_2} - \lambda p_1 = 0, \\ L'_{x_2} = \alpha_2 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2 - 1} - \lambda p_2 = 0, \\ L'_{\lambda} = M - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0. \end{cases}$$

найдём решение данной системы. Для этого домножим первое уравнение на $\alpha_2 x_1$, а второе на $\alpha_1 x_2$ и вычтем одно из другого. Тогда получим $\alpha_2 p_1 x_1 = \alpha_1 p_2 x_2$. Подставив, найденное соотношение $p_2 x_2 = (\alpha_2/\alpha_1) p_1 x_1$ в последнее уравнении системы находим:

$$p_1 x_1 \left(1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) = M \Longrightarrow \tilde{x}_1 = \frac{\alpha_1 M}{(\alpha_1 + \alpha_2) p_1}.$$

Аналогично

$$\tilde{x}_2 = \frac{\alpha_2 M}{(\alpha_1 + \alpha_2) p_2}.$$

Нами найдены функции Маршалла $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$. Значение $\tilde{\lambda}$, мы найдём из первого уравнения системы

$$\alpha_1 \left(\frac{\alpha_1 M}{(\alpha_1 + \alpha_2) p_1}\right)^{\alpha_1 - 1} \left(\frac{\alpha_2 M}{(\alpha_1 + \alpha_2) p_2}\right)^{\alpha_2} = \lambda p_1.$$

Откуда

$$\tilde{\lambda} = \left(\frac{\alpha_1}{p_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\alpha_2}{p_2}\right)^{\alpha_2} \left(\frac{M}{\alpha_1 + \alpha_2}\right)^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1}.$$

2. Достаточные условия.

Разумеется, в этой задаче ещё следует доказать, что в полученной точке есть экстремум. Дадим два доказательства наличия условного экстремума, используя второй дифференциал и окаймлённый гессиан.

I способ. В рассмотренном примере найдём вторые частные производные

$$\begin{aligned} L''_{x_1 x_1} &= \alpha_1(\alpha_1 - 1) \tilde{x}_1^{\alpha_1 - 2} \tilde{x}_2^{\alpha_2}, \\ L''_{x_1 x_2} &= \alpha_1 \alpha_2 \tilde{x}_1^{\alpha_1 - 1} \tilde{x}_2^{\alpha_2 - 1}, \\ L''_{x_2 x_2} &= \alpha_2(\alpha_2 - 1) \tilde{x}_1^{\alpha_1} \tilde{x}_2^{\alpha_2 - 2}. \end{aligned}$$

Второй дифференциал функции L равен

Из уравнения связи следует $p_1 d\,x_1 + p_2 d\,x_2 = 0$. Откуда

$$d\,x_2 = -(p_1/p_2) d\,x_1.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} d^2\,L &= L''_{x_1 x_1}(d\,x_1)^2 + 2L''_{x_1 x_2} d\,x_1 d\,x_2 + L''_{x_2 x_2}(d\,x_2)^2 = \\ &= \left(\alpha_1(\alpha_1 - 1)\tilde{x}_1^{\alpha_1 - 2}\tilde{x}_2^{\alpha_2} - 2\alpha_1\alpha_2 \left(\frac{p_1}{p_2}\right) \tilde{x}_1^{\alpha_1 - 1}\tilde{x}_2^{\alpha_2 - 1} + \alpha_2(\alpha_2 - 1)\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 \tilde{x}_1^{\alpha_1}\tilde{x}_2^{\alpha_2 - 2}\right)(d\,x_1)^2. \end{aligned}$$

Все три слагаемых в скобках — отрицательные числа, так как $0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1$, $\tilde{x}_1 > 0$, $\tilde{x}_2 > 0$, $p_1, p_2 > 0$. Поэтому рассматриваемая точка даёт условный локальный максимум, т.е. решение задачи.

II способ. Дадим ещё одно доказательство наличия условного экстремума, используя окаймлённый гессиан. Окаймленный Гессиан принимает вид:

$$\det H_3 = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_{x_1} & \varphi'_{x_2} \\ \varphi'_{x_1} & L''_{x_1x_1} & L''_{x_1x_2} \\ \varphi'_{x_2} & L''_{x_2x_1} & L''_{x_2x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -p_1 & -p_2 \\ -p_1 & \alpha_1(\alpha_1-1)\tilde{x}_1^{\alpha_1-2}\tilde{x}_2^{\alpha_2} & \alpha_1\alpha_2\tilde{x}_1^{\alpha_1-1}\tilde{x}_2^{\alpha_2-1} \\ -p_2 & \alpha_1\alpha_2\tilde{x}_1^{\alpha_1-1}\tilde{x}_2^{\alpha_2-1} & \alpha_2(\alpha_2-1)\tilde{x}_1^{\alpha_1}\tilde{x}_2^{\alpha_2-2} \end{vmatrix} =$$

$$= p_1 \begin{vmatrix} -p_1 & \alpha_1\alpha_2\tilde{x}_1^{\alpha_1-1}\tilde{x}_2^{\alpha_2-1} \\ -p_2 & \alpha_2(\alpha_2-1)\tilde{x}_1^{\alpha_1}\tilde{x}_2^{\alpha_2-2} \end{vmatrix} - p_2 \begin{vmatrix} -p_1 & \alpha_1(\alpha_1-1)\tilde{x}_1^{\alpha_1-2}\tilde{x}_2^{\alpha_2} \\ -p_2 & \alpha_1\alpha_2\tilde{x}_1^{\alpha_1-1}\tilde{x}_2^{\alpha_2-1} \end{vmatrix} =$$

$$= p_1 \begin{vmatrix} -p_1 & \alpha_1\alpha_2\tilde{x}_1^{\alpha_1-1}\tilde{x}_2^{\alpha_2-1} \\ -p_2 & \alpha_2(\alpha_2-1)\tilde{x}_1^{\alpha_1}\tilde{x}_2^{\alpha_2-2} \end{vmatrix} + p_2 \begin{vmatrix} p_1 & \alpha_1(\alpha_1-1)\tilde{x}_1^{\alpha_1-2}\tilde{x}_2^{\alpha_2} \\ p_2 & \alpha_1\alpha_2\tilde{x}_1^{\alpha_1-1}\tilde{x}_2^{\alpha_2-1} \end{vmatrix}.$$

Последняя величина положительна, так как из неравенств $0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1$, $\tilde{x}_1 > 0$, $\tilde{x}_2 > 0$, $p_1, p_2 > 0$ вытекает, что каждый из полученных определителей положителен. Поэтому в рассматриваемой точке имеется условный локальный максимум. □

Замечание 37. В этой задаче уравнение связи $p_1x_1 + p_2x_2 = M$ легко решается. Например, $x_2 = (M - p_1x_1)/p_2$. И задача отыскания условного экстремума сводится к задаче поиска наибольшего значения функции $f(x_1) = U(x_1, (M - p_1x_1)/p_2)$ на отрезке $x_1 \in [0; M/p_1]$. Рекомендуем читателю применить это соображение к рассмотренному примеру с функцией $U(x_1, x_2) = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}$ самостоятельно.

4.13.2 Задача минимизации расхода потребителя при фиксированном уровне полезности. Функции спроса по Хиксу. Функция расходов, её свойства

Постановка задачи

Требуется добиться фиксированного значения $\tilde{u}$ функции полезности $u(x_1, x_2)$ при минимальных затратах $p_1x_1 + p_2x_2$ на покупку двух товаров. Задача сводится к поиску минимума функции $p_1x_1 + p_2x_2$ при условии $u(x_1, x_2) = \tilde{u}$. Функция Лагранжа имеет вид

$$L(x_1, x_2, \lambda) = p_1x_1 + p_2x_2 + \lambda(\tilde{u} - u(x_1, x_2)).$$

Приравняем к нулю её частные производные

$$\begin{cases} L'_{x_1} = p_1 - \lambda u'_{x_1} = 0, \\ L'_{x_2} = p_2 - \lambda u'_{x_2} = 0, \\ L'_{\lambda} = \tilde{u} - u(x_1, x_2) = 0. \end{cases}$$

Определение 4.13.2. Предполагаем, что система имеет единственное решение $\tilde{x}_1(p_1, p_2, \tilde{u})$, $\tilde{x}_2(p_1, p_2, \tilde{u})$, $\lambda(p_1, p_2, \tilde{u})$. Функции $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$ называются ***функциями спроса по Хиксу***, а функция

$$m(p_1, p_2, \tilde{u}) = p_1\tilde{x}_1(p_1, p_2, \tilde{u}) + p_2\tilde{x}_2(p_1, p_2, \tilde{u})$$

называется ***функцией расходов***.

Из первых двух равенств для единственного решения $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$, $\tilde{\lambda}$ получаем

$$p_k = \tilde{\lambda}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_k}, \quad k = 1, 2.$$

Лемма 15. *Справедливы равенства*

$$m'_{\tilde{u}} = \tilde{\lambda},$$
$$m'_{p_k} = \tilde{x}_k, \ k = 1, 2.$$

Последнее равенство называется тождество Шепарда.

Доказательство. Справедливо

$$
\begin{aligned}
m'_{\tilde u} &= p_1\frac{\partial \tilde x_1}{\partial \tilde u} + p_2\frac{\partial \tilde x_2}{\partial \tilde u} = \\
&= \tilde\lambda\left(\frac{\partial \tilde u}{\partial \tilde x_1}(\tilde x_1(p_1,p_2,\tilde u),\, \tilde x_2(p_1,p_2,\tilde u))\cdot\frac{\partial \tilde x_1}{\partial \tilde u} + \frac{\partial \tilde u}{\partial \tilde x_2}(\tilde x_1(p_1,p_2,\tilde u),\, \tilde x_2(p_1,p_2,\tilde u))\cdot\frac{\partial \tilde x_2}{\partial \tilde u}\right) = \\
&= \tilde\lambda\left(\frac{\partial \tilde u}{\partial \tilde x_1}\cdot\frac{\partial \tilde x_1}{\partial \tilde u} + \frac{\partial \tilde u}{\partial \tilde x_2}\cdot\frac{\partial \tilde x_2}{\partial \tilde u}\right) = \tilde\lambda\frac{\partial \tilde u}{\partial \tilde u} = \tilde\lambda.
\end{aligned}
$$

Докажем второе равенство леммы:

$$
\begin{aligned}
m'_{p_1} &= \frac{\partial}{\partial p_1}\left(p_1\tilde x_1 + p_2\tilde x_2\right) = \tilde x_1 + p_1\frac{\partial \tilde x_1}{\partial p_1} + p_2\frac{\partial \tilde x_2}{\partial p_1} = \\
&= \tilde x_1 + \tilde\lambda\left(\frac{\partial \tilde u}{\partial \tilde x_1}(\tilde x_1(p_1,p_2,\tilde u),\, \tilde x_2(p_1,p_2,\tilde u))\cdot\frac{\partial \tilde x_1}{\partial p_1} + \frac{\partial \tilde u}{\partial \tilde x_2}(\tilde x_1(p_1,p_2,\tilde u),\, \tilde x_2(p_1,p_2,\tilde u))\cdot\frac{\partial \tilde x_2}{\partial p_1}\right) = \\
&= \tilde x_1 + \tilde\lambda\left(\frac{\partial \tilde u}{\partial \tilde x_1}\cdot\frac{\partial \tilde x_1}{\partial p_1} + \frac{\partial \tilde u}{\partial \tilde x_2}\cdot\frac{\partial \tilde x_2}{\partial p_1}\right) = \tilde x_1 + \tilde\lambda\frac{\partial \tilde u}{\partial p_1} = \tilde x_1.
\end{aligned}
$$

Поскольку $\tilde u'_{p_1} = 0$. Равенство $m'_{p_2} = \tilde x_2$ устанавливается аналогично. □

П р и м е р 4.13.2. Рассмотрим в качестве иллюстрации предыдущего пример, в котором

$$u(x_1,x_2) = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}, \quad 0<\alpha_k<1,\ k=1,2.$$

Доказательство. Функция Лагранжа принимает вид

$$L(x_1,x_2,\lambda) = p_1x_1 + p_2x_2 + \lambda\cdot\left(\tilde u - x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\right).$$

1. Необходимое условие. Найдём стационарные точки

$$
\begin{cases}
L'_{x_1} = p_1 - \lambda\alpha_1x_1^{\alpha_1-1}x_2^{\alpha_2} = 0,\\
L'_{x_2} = p_2 - \lambda\alpha_2x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2-1} = 0,\\
L'_{\lambda} = \tilde u - x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2} = 0.
\end{cases}
$$

найдём решение данной системы. Для этого домножим первое уравнение на α_2x_1, а второе на α_1x_2 и вычтем одно из другого. Тогда получим $\alpha_2p_1x_1 = \alpha_1p_2x_2$. Подставив, найденное соотношение $x_2 = (\alpha_2/\alpha_1)(p_1/p_2)x_1$ в последнее уравнении системы находим:

$$\tilde u = x_1^{\alpha_1+\alpha_2}\left(\frac{\alpha_2p_1}{\alpha_1p_2}\right)^{\alpha_2} \Longrightarrow \tilde x_1 = \tilde u^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}}\left(\frac{\alpha_1p_2}{\alpha_2p_1}\right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}.$$

Аналогично

$$\tilde x_2 = \tilde u^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}}\left(\frac{\alpha_2p_1}{\alpha_1p_2}\right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}}.$$

Нами найдены функции спроса по Хиксу $\tilde x_1$, $\tilde x_2$. Значение $\tilde\lambda$, мы найдём из первого уравнения системы

$$p_1 = \lambda\alpha_1\tilde u^{1-\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}}\left(\frac{\alpha_1p_2}{\alpha_2p_1}\right)^{-\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}.$$

Откуда

$$\tilde\lambda = \tilde u^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}-1}\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right)\left(\frac{\alpha_1p_2}{\alpha_2p_1}\right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}.$$

Функция расхода имеет вид

$$\tilde m(p_1,p_2,\tilde u) = p_1\tilde u^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}}\left(\frac{\alpha_1p_2}{\alpha_2p_1}\right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}} + p_2\tilde u^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}}\left(\frac{\alpha_2p_1}{\alpha_1p_2}\right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}.$$

2. Достаточные условия.

Разумеется, в этой задаче ещё следует доказать, что в полученной точке есть экстремум. Дадим два доказательства наличия условного экстремума, используя второй дифференциал и окаймлённый гессиан.

I способ. В рассмотренном примере найдём вторые частные производные

$$L''_{x_1x_1} = -\tilde\lambda\alpha_1(\alpha_1-1)\tilde x_1^{\alpha_1-2}\tilde x_2^{\alpha_2},$$
$$L''_{x_1x_2} = -\tilde\lambda\alpha_1\alpha_2\tilde x_1^{\alpha_1-1}\tilde x_2^{\alpha_2-1},$$
$$L''_{x_2x_2} = -\tilde\lambda\alpha_2(\alpha_2-1)\tilde x_1^{\alpha_1}\tilde x_2^{\alpha_2-2}.$$

Из уравнения связи $\tilde x_1^{\alpha_1}\tilde x_2^{\alpha_2}=\tilde u$ следует $\alpha_1\tilde x_1^{\alpha_1-1}\tilde x_2^{\alpha_2}d\,x_1+\alpha_2\tilde x_1^{\alpha_1}\tilde x_2^{\alpha_2-1}d\,x_2=0$. Откуда

$$d\,x_2=-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\frac{\tilde x_2}{\tilde x_1}d\,x_1.$$

Поэтому

$$d^2\,L=L''_{x_1x_1}(d\,x_1)^2+2L''_{x_1x_2}d\,x_1d\,x_2+L''_{x_2x_2}(d\,x_2)^2=$$
$$=-\tilde\lambda\left(\alpha_1(\alpha_1-1)\tilde x_1^{\alpha_1-2}\tilde x_2^{\alpha_2}-2\alpha_1\alpha_2\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\tilde x_1^{\alpha_1-2}\tilde x_2^{\alpha_2}+\alpha_2(\alpha_2-1)\tilde x_1^{\alpha_1}\tilde x_2^{\alpha_2-2}\left(-\frac{\alpha_1\tilde x_2}{\alpha_2\tilde x_1}\right)^2\right)(d\,x_1)^2.$$

Все три слагаемых в скобках — отрицательные числа, так как $0<\alpha_1,\alpha_2<1$, $\tilde x_1>0$, $\tilde x_2>0$, $p_1,p_2>0$. Поэтому рассматриваемая точка даёт условный локальный минимум, т.е. решение задачи.

II способ. Дадим ещё одно доказательство наличия условного экстремума, используя окаймлённый гессиан. Окаймленный Гессиан принимает вид:

$$\det H_3=\begin{vmatrix}0 & \varphi'_{x_1} & \varphi'_{x_2}\\ \varphi'_{x_1} & L''_{x_1x_1} & L''_{x_1x_2}\\ \varphi'_{x_2} & L''_{x_2x_1} & L''_{x_2x_2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -\tilde\lambda\alpha_1x_1^{\alpha_1-1}x_2^{\alpha_2} & -\tilde\lambda\alpha_2x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2-1}\\ -\tilde\lambda\alpha_1x_1^{\alpha_1-1}x_2^{\alpha_2} & -\tilde\lambda\alpha_1(\alpha_1-1)\tilde x_1^{\alpha_1-2}\tilde x_2^{\alpha_2} & -\tilde\lambda\alpha_1\alpha_2\tilde x_1^{\alpha_1-1}\tilde x_2^{\alpha_2-1}\\ -\tilde\lambda\alpha_2x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2-1} & -\tilde\lambda\alpha_1\alpha_2\tilde x_1^{\alpha_1-1}\tilde x_2^{\alpha_2-1} & -\tilde\lambda\alpha_2(\alpha_2-1)\tilde x_1^{\alpha_1}\tilde x_2^{\alpha_2-2}\end{vmatrix}=$$
$$=-\tilde\lambda^3\cdot\begin{vmatrix}0 & \alpha_1x_1^{\alpha_1-1}x_2^{\alpha_2} & \alpha_2x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2-1}\\ \alpha_1x_1^{\alpha_1-1}x_2^{\alpha_2} & \alpha_1(\alpha_1-1)\tilde x_1^{\alpha_1-2}\tilde x_2^{\alpha_2} & \alpha_1\alpha_2\tilde x_1^{\alpha_1-1}\tilde x_2^{\alpha_2-1}\\ \alpha_2x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2-1} & \alpha_1\alpha_2\tilde x_1^{\alpha_1-1}\tilde x_2^{\alpha_2-1} & \alpha_2(\alpha_2-1)\tilde x_1^{\alpha_1}\tilde x_2^{\alpha_2-2}\end{vmatrix}=-\tilde\lambda^3\cdot$$
$$\cdot\left(-\alpha_1x_1^{\alpha_1-1}x_2^{\alpha_2}\begin{vmatrix}\alpha_1x_1^{\alpha_1-1}x_2^{\alpha_2} & \alpha_1\alpha_2\tilde x_1^{\alpha_1-1}\tilde x_2^{\alpha_2-1}\\ \alpha_2x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2-1} & \alpha_2(\alpha_2-1)\tilde x_1^{\alpha_1}\tilde x_2^{\alpha_2-2}\end{vmatrix}+\alpha_2x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2-1}\begin{vmatrix}\alpha_1x_1^{\alpha_1-1}x_2^{\alpha_2} & \alpha_1(\alpha_1-1)\tilde x_1^{\alpha_1-2}\tilde x_2^{\alpha_2}\\ \alpha_2x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2-1} & \alpha_1\alpha_2\tilde x_1^{\alpha_1-1}\tilde x_2^{\alpha_2-1}\end{vmatrix}\right).$$

Последняя величина отрицательна, так как из неравенств $0<\alpha_1,\alpha_2<1$, $\tilde x_1>0$, $\tilde x_2>0$, $p_1,p_2>0$ вытекает, что каждое из полученных слагаемых в скобке положительно. Поэтому в рассматриваемой точке имеется условный локальный минимум. □

Глава 5

Интегральное исчисление функций одного переменного

5.1 Неопределенный интеграл

Определение 5.1.1. Дифференциируемая функция F, называется *первообразной*, если $F'(x) = f(x)$ для $f(x)$ на $[a, b]$.

Утверждение 5.1.1. *Пусть F_1, F_2 - первообразные для $f(x)$, тогда $\exists C \in \mathbb{R} : F_1 - F_2 = C$ на $[a, b]$*

Доказательство.

$$g(x) = F_1(x) - F_2(x)$$

Применяем теорему Лагранжа

$$g(\beta) - g(\alpha) = g'(c)(\beta - \alpha) \qquad [\alpha, \beta] \subseteq [a, b], c \in (\alpha, \beta)$$

$$g'(c) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$g(x) = C \quad \forall [a, b]$$

□

Определение 5.1.2. *Неопределенный интеграл* для функции $f(x)$ — совокупность всех первообразных для этой функции

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \text{ где } F \text{ - любая}$$

Свойства неопределенного интеграла:

1. Пусть $f, g \in C[a; b]$, тогда на отрезке $[a; b]$ выполнено

$$\int (\alpha f + \beta g)\, dx = \alpha \int f\, dx + \beta \int g\, dx.$$

2. Пусть $f, g \in C^1(\mathbb{R})$, тогда

$$\int f\, dg = fg - \int g\, df.$$

3. Пусть $f \in C(\mathbb{R})$, $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, $x = \varphi(t)$. Тогда

$$\int f(x)\, dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt.$$

Доказательство. Все эти свойства легко вытекают из определения неопределенного интеграла. Достаточно всего лишь продифференцировать эти уравнения. Например, второе свойство следует из равенства $fg' = (fg)' - gf'$. □

П р и м е р ы 5.1.1.

$$\int \sin 3x \, dx = -\frac{\cos 3x}{3} + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

Интегрирование хоть и является операцией обратной к дифференцированию, является более сложным действием, поскольку в отличии от дифференцирования класс элементарных функций операция интегрирования не сохраняет. Например интегралы $\int \frac{\sin x}{x}\, dx$, $\int e^{-x^2}\, dx$, $\int \cos(-x^2)\, dx$ не вычисляются в элементарных функциях.

Таблица неопределенных интегралов (предполагаем, что везде $a \neq 0$, а в 4 пункте $a > 0$, $a \neq 1$)

1) $\int x^\alpha \, dx = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, & \alpha \neq -1 \\ \ln|x| + C, & \alpha = -1 \end{cases}$

2) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

3) $\int \cos x dx = \sin x + C$

4) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

5) $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C$

6) $\int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C$

7) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$

8) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C$

9) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

10) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

11) $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$

12) $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$

13) $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$

14) $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$

15) $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg} \dfrac{x}{2}\right| + C$

Замечание 38. Равенство $\int x^{-1}\, dx = \ln|x| + C$ требует некоторого пояснения. Функция $\frac{1}{x}$ определена в области $x \neq 0$, состоящей из двух лучей: $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$. На первом из лучей первообразными будут функции $\ln(-x) + C_1$, на втором — функции $\ln x + C_2$. При этом постоянные C_1, C_2 выбираются независимо друг от друга.

Для равенства 9) следует сделать замечание, аналогичное предыдущему. На каждом из интервалов $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$, составляющих область определения функции $\operatorname{tg} x$, независимо выбирается своя произвольная постоянная.

Аналогичное замечание надо делать и в случае 10). Здесь область определения составлена из интервалов $(\pi n, \pi(n+1)), n \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Равенство в табличных интегралах проверяется взятием производной. Например для равенства 8) получаем:

$$\left(\ln(x + \sqrt{x^2+\alpha})\right)' = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+\alpha}}}{x + \sqrt{x^2+\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha}}.$$

□

5.2 Решение задач по теме неопределенный интеграл

В данной параграфе разберём примеры на вычисление простейших интегралов. Использовать будем только метод замены переменного, интегрирование по частям и таблицу интегралов.

П р и м е р 5.2.1. Найти
$$\int \frac{2x\,dx}{1+x^2}.$$

Решение. Так как $2x\,dx = d(x^2) = d(1+x^2)$, то сделав замену переменных $t = 1+x^2$ получаем
$$\int \frac{2x\,dx}{1+x^2} = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln(1+x^2) + C.$$
□

П р и м е р 5.2.2. Найти
$$\int x^2 e^{x^3}\,dx.$$

Решение. Так как $x^2\,dx = (1/3)d(x^3)$, то сделав замену переменных $t = x^3$ получаем
$$\int x^2 e^{x^3}\,dx = (1/3)\int e^t\,dt = (1/3)\cdot e^t + C = (1/3)\cdot e^{x^3} + C.$$
□

П р и м е р 5.2.3. Найти
$$\int \frac{dx}{(\arcsin x)^3\sqrt{1-x^2}}.$$

Решение. Проведём цепочку равенств
$$\int \frac{dx}{(\arcsin x)^3\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{d\arcsin x}{(\arcsin x)^3} = \int \frac{dt}{t^3} = \frac{t^{-2}}{-2} + C = -\frac{\arcsin^{-2} x}{2} + C.$$
□

П р и м е р 5.2.4. Найти
$$\int \frac{(6x-5)\,dx}{2\sqrt{3x^2-5x+6}}.$$

Решение. Проведём цепочку равенств
$$\int \frac{(6x-5)\,dx}{2\sqrt{3x^2-5x+6}} = \int \frac{d(3x^2-5x+6)}{2\sqrt{3x^2-5x+6}} =$$
$$= \int \frac{dt}{2t^{1/2}} = \frac{1}{2}\int t^{-1/2}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{1/2}}{1/2} + C = \sqrt{3x^2-5x+6} + C.$$
□

П р и м е р 5.2.5. Найти
$$\int \cos^3 x \sin 2x\,dx.$$

Решение. Интегрируя тригонометрические выражения важно помнить основные формулы тригонометрии. В данном примере удобно воспользоваться формулой двойного угла для синуса $\sin 2x = 2\sin x\cos x$
$$\int \cos^3 x\sin 2x\,dx = 2\int \cos^4 x\sin x\,dx = -2\int \cos^4 x\,d\cos x = -2\int t^4\,dt = (-2/5)\,t^5 + C = (-2/5)\,\cos^5 x + C.$$
□

П р и м е р 5.2.6. Найти
$$\int \frac{3x-1}{x^2+9}\,dx.$$

Решение. Разобъём исходный интеграл на два

$$\int \frac{3x-1}{x^2+9}\,dx = \int \frac{3x\,dx}{x^2+9} - \int \frac{dx}{x^2+9}.$$

Вычислим каждый интеграл по отдельности

$$\int \frac{3x\,dx}{x^2+9} = \frac{3}{2}\int \frac{d(x^2+9)}{x^2+9} = \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{3}{2}\ln t + C = \frac{3}{2}\ln(x^2+9) + C,$$
$$\int \frac{dx}{x^2+9} = \frac{1}{3}\cdot \operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C.$$

Вычитая из первого равенство второе, приходим к окончательному результату:

$$\int \frac{3x-1}{x^2+9}\,dx = \frac{3}{2}\ln(x^2+9) - \frac{1}{3}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C.$$

□

П р и м е р 5.2.7. Найти

$$\int xe^x\,dx.$$

Решение. Воспользуемся формулой интегрирования по частям

$$\int xe^x\,dx = \int x\,de^x = xe^x - \int e^x\,dx + C = e^x(x-1) + C.$$

□

П р и м е р 5.2.8. Найти

$$\int \arcsin x\,dx.$$

Решение. Воспользуемся формулой интегрирования по частям

$$\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x - \int x\,d\arcsin x + C = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + C =$$
$$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

Последний интеграл легко вычисляется при помощи замены переменной. Действительно, положив $u(x) = 1-x^2$ плучаем

$$\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^{1/2}} + C = x\arcsin x + u^{1/2} + C = x\arcsin x + (1-x^2)^{1/2} + C.$$

□

П р и м е р 5.2.9. Найти

$$\int e^{\sqrt{2x}}\,dx.$$

Решение. Сделаем замену переменных: $t = \sqrt{2x}$, т.е. $t^2 = 2x$, $dx = t\,dt$

$$\int e^{\sqrt{2x}}\,dx = \int te^t\,dt.$$

Далее интегрируя по частям прийдём к ответу, но можно сослаться на уже вычисленный интеграл в примере 5.2.7.

$$\int e^{\sqrt{2x}}\,dx = e^{\sqrt{2x}}(\sqrt{2x}-1) + C.$$

□

П р и м е р 5.2.10. Найти
$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

Решение. Так как
$$\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^2}\,d(1+x^2) = -\frac{1}{2}\cdot x\,d(1+x^2)^{-1}.$$
то имеет смысл проинтегровать по частям.
$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx = -\frac{1}{2}\cdot\int x\,d(1+x^2)^{-1} = -\frac{1}{2}\cdot\left(x(1+x^2)^{-1} + \int\frac{dx}{1+x^2} + C\right) = -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{\operatorname{arctg} x}{2} + C.$$

□

П р и м е р 5.2.11. Вычислить интеграл
$$\int e^{ax}\cos(bx)\,dx.$$

Решение. Обозначим $I = \int e^{ax}\cos(bx)\,dx$, проинтегрируем по частям дважды. Занесем e^{ax} под дифференциал и проинтегрируем по частям первый раз, а затем проделаем эту процедуру с оставшимся интегралом:
$$\begin{aligned}
I &= \int e^{ax}\cos(bx)\,dx = \frac{1}{a}\int\cos(bx)\,de^{ax} = \frac{1}{a}\cdot e^{ax}\cos(bx) - \frac{1}{a}\int e^{ax}\,d\cos(bx) + C = \\
&= \frac{1}{a}\cdot e^{ax}\cos(bx) + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin(bx)\,dx + C = \frac{1}{a}\cdot e^{ax}\cos(bx) + \frac{b}{a^2}\int\sin(bx)\,de^{ax} + C = \\
&= \frac{1}{a}\cdot e^{ax}\cos(bx) + \frac{b}{a^2}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a^2}\int e^{ax}\,d\sin(bx) + C = \\
&= \frac{a\,\cos(bx) + b\,\sin(bx)}{a^2}\,e^{ax} - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\cos(bx)\,dx + C = \frac{a\,\cos(bx) + b\,\sin(bx)}{a^2}\,e^{ax} - \frac{b^2}{a^2}I + C.
\end{aligned}$$

Нами получено равенство
$$I = \frac{a\,\cos(bx) + b\,\sin(bx)}{a^2}\cdot e^{ax} - \frac{b^2}{a^2}\cdot I + C,$$
В данном выражении I находится в обоих частях равенства, перенося I в одну часть уравнения, и выражая его приходим к ответу
$$\int e^{ax}\cos(bx)\,dx = e^{ax}\cdot\frac{a\,\cos(bx) + b\,\sin(bx)}{a^2+b^2} + C.$$

□

Замечание 39. Мы могли бы решить предыдущий пример намного проще, если бы воспользовались формулой Эйлера в комплексной плоскости. Действительно, из равенства $e^{ax}\cos(bx) = \Re e^{(a+ib)x}$ получаем
$$\begin{aligned}
I = \Re\left(\int e^{(a+ib)x}\,dx\right) &= \Re\left(\frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib}\right) + C = e^{ax}\Re\left(\frac{e^{ibx}(a-ib)}{(a+ib)(a-ib)}\right) + C = \\
&= e^{ax}\Re\left(\frac{(\cos(bx) + i\sin(bx))(a-ib)}{a^2+b^2}\right) + C = e^{ax}\cdot\frac{a\cos(bx) + b\sin(bx)}{a^2+b^2} + C.
\end{aligned}$$

5.3 Интегрирование рациональных функций

Определение 5.3.1. Пусть $n \in \mathbb{N}$. *Множество всех алгебраических полиномов*, степени не выше чем n, будем обозначать через $\mathcal{P}_n$.

Определение 5.3.2. Пусть $r, n \in \mathbb{N}$. Функцию вида $R(x) = \frac{P_r(x)}{Q_n(x)}$, где $P_r(x) \in \mathcal{P}_r$, $Q_n(x) \in \mathcal{P}_n$ будем называть *рациональной функцией.*

Рациональная функция называется *правильной дробью*, если степень полинома $P_r(x)$ меньше степени полинома $Q_n(x)$, т.е. $r < n$.

Разберём вычисление интеграла от рациональной функции в несколько шагов.

I. Сведение к правильной дроби. Пусть

$$Q_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0, a_k \in \mathbb{R},\ k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Если рациональная функция $R(x)$ не является правильной дробью (т.е. $r \geqslant n$), то мы можем поделить столбиком многочлен на многочлен и получим

$$R(x) = S_{r-n}(x) + \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}, \quad r \geqslant n, \quad m < n,$$

где

$$S_{r-n}(x) = b_{r-n}x^{r-n} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0.$$

Таким образом вычисление интеграла от произвольной рациональной функции мы сводим к вычислению интеграла от рациональной функции которая является правильной дробью, т.е. степень полинома в числителе строго меньше степени полинома в знаменателе.

II. Разложение на простые дроби. Под *простыми дробями* будем понимать рациональные дроби следующих видов

$$\frac{A}{(x-a)^k}, \quad \frac{Bx + C}{(x^2 + \alpha x + \beta)^k},\ k \in \mathbb{Z}_+,$$

где A, B, C, α, β — действительные числа, причём предполагаем, что уравнение $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ не имеет действительных корней, т.е. выполнено условие $\alpha^2 - 4\beta < 0$.

Докажем, что каждая правильная дробь допускает разложение на простые дроби. По основной теореме алгебры полином $Q_n(x)$ допускает следующее разложение над полем комплексных чисел

$$Q_n(x) = a_n \prod_{s=1}^{q} (x - z_s)^{k_s}, \quad k_1 + k_2 + \dots + k_q = n.$$

Причём каждому комплексному корню $z_l = x_l + iy_l$ (здесь $y_l \neq 0$) кратности k_l, соответствующее комплексно сопряженное число $\bar{z}_l = x_l - iy_l$ также является корнем полинома $Q_n(x)$ той же кратности. Это вытекает из того, что мы рассматриваем коэффициенты полинома $Q_n(x)$ над полем действительных чисел. Справедливо равенство

$$(x - z_l) \cdot (x - \bar{z}_l) = x^2 - 2x_l x + (x_l^2 + y_l^2) = x^2 + \alpha_l x + \beta_l,$$

где $D = \alpha_l^2 - 4\beta_l = -4y_l^2 < 0$. Поэтому над полем действительных чисел данное разложение принимает вид

$$Q_n(x) = a_n (x - x_1)^{k_1} \dots (x - x_s)^{k_s} (x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{l_1} \dots (x^2 + \alpha_p x + \beta_p)^{l_p},$$

где $D_m = \alpha_m^2 - 4\beta_m < 0$, $1 \leqslant m \leqslant p$.

Лемма 16. *Пусть $m, n \in N$, $m < n$, $Q_n(x) = (x - x_1)^{k_1} Q_1(x)$, $Q_1(x_1) \neq 0$. Тогда существует константа A и полином $P_1(x)$, такие что справедливо разложение правильной дроби $P_m(x)/Q_n(x)$ на простую и правильную дробь:*

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A}{(x - x_1)^{k_1}} + \frac{P_1(x)}{(x - x_1)^{k_1 - 1} Q_1(x)}.$$

Доказательство. Равенство в утверждении леммы, после домножения на $Q_n(x)$, равносильно следующему:

$$P_m(x) = AQ_1(x) + P_1(x)(x - x_1).$$

Подставив $x = x_1$ найдём $A = \frac{P_m(x_1)}{Q_1(x_1)}$. Тогда $x = x_1$ будет корнем уравнения $P_m(x) - AQ_1(x) = 0$, а поскольку $P_m(x) - AQ_1(x)$ — полином, то $P_m(x) - AQ_1(x)$ делится без остатка на $x - x_1$. Остаётся определить полином $P_1(x)$ равенством

$$P_1(x) = \frac{P_m(x) - AQ_1(x)}{x - x_1}.$$

$\square$

Из данной леммы вытекает

$$\frac{P_m}{Q_n} = \frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} + \frac{A_{k_1-1}}{(x-x_1)^{k_1-1}} + \dots + \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{P^*(x)}{Q_1(x)},$$

где $P^*(x_1) \neq 0$, а степень полинома $P^*(x_1)$ меньше степени полинома $Q_1(x)$.

Лемма 17. *Пусть $m, n \in N$, $m < n$,*

$$Q_2(x) = \frac{Q_n(x)}{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^l},$$

$D_1 = \alpha_1^2 - 4\beta_1 < 0$, причём $Q_2(x)$ нацело не делится на многочлен $x^2+\alpha_1 x+\beta_1$. Тогда существуют константы M, N и полином $P_2(x)$, такие что справедливо разложение правильной дроби $P_m(x)/Q_n(x)$ на простую и правильную дробь:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^l} + \frac{P_2(x)}{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{l-1}Q_2(x)}$$

Доказательство. Равенство в утверждении леммы, после домножения на $Q_n(x)$, равносильно следующему:

$$P_m(x) = (Mx+N)Q_2(x) + (x^2+\alpha_1 x+\beta_1)P_2(x).$$

Покажем, что существуют такие константы M, N и полином $P_2(x)$, что данное равенство выполняется. В частности данное равенство означало бы, что полином $P_m(x) - (Mx+N)Q_2(x)$ делится без остатка на $x^2+\alpha_1 x+\beta_1$. Покажем, что этого можно достичь при помощи выбора констант M и N.

- Обозначим через $\gamma x+\delta$ — остаток от деления $P_m(x)$ на $x^2+\alpha_1 x+\beta_1$.
- Обозначим через $\upsilon x+\mu$ — остаток от деления $Q_2(x)$ на $x^2+\alpha_1 x+\beta_1$.

Тогда из утверждения леммы вытекало бы утверждение

$$(Mx+N)(\upsilon x+\mu) - (\gamma x+\delta) \ \vdots \ x^2+\alpha_1 x+\beta_1. \tag{5.3.1}$$

Докажем, что можно найти такие константы M, N, чтобы полином в (5.3.1) делился нацело на $x^2+\alpha_1 x+\beta_1$.

Приведём подобные слагаемые

$$M\upsilon x^2 + (N\upsilon + M\mu - \gamma)x + N\mu - \delta.$$

Поскольку выражение $M\upsilon\left(x^2+\alpha_1 x+\beta_1\right)$ делится нацело на $x^2+\alpha_1 x+\beta_1$, то вычтем это выражение из предыдущего выражения. Получаем

$$(N\upsilon + M\mu - \gamma - \alpha_1 M\upsilon)x + (N\mu - \delta - \beta_1 M\upsilon) = 0.$$

Мы записали равенство нулю, т.к. если это не так, то полином первой степени не может делиться нацело на полином второй степени. Приравняем коэффициенты при x^1 и x^0 к нулю

$$\begin{cases} N\upsilon + M(\mu - \alpha_1\upsilon) = \gamma \\ N\mu - M\beta_1\upsilon = \delta \end{cases}$$

Решение данной системы существует, т.е. существуют M и N, если

$$\begin{vmatrix} \upsilon & \mu - \alpha_1\upsilon \\ \mu & -\beta_1\upsilon \end{vmatrix} \neq 0 \Longleftrightarrow \mu^2 - \alpha_1\upsilon\mu + \beta_1\upsilon^2 \neq 0.$$

Если $\upsilon \neq 0$, то $\left(\frac{\mu}{\upsilon}\right)^2 + \alpha_1\left(-\frac{\mu}{\upsilon}\right) + \beta_1 \neq 0$, т.к. полином $x^2+\alpha_1 x+\beta_1$ не имел действительных корней. Если $\upsilon = 0$, то тогда $\mu \neq 0$, т.к. если бы $\mu = 0$, то тогда бы вытекало, что полином $Q_2(x)$ делится без остатка на $x^2+\alpha_1 x+\beta_1$. Но в случае $\upsilon = 0$, $\mu \neq 0$ опять выполнено, что соответствующий определить отличен от нуля. Следовательно существуют константы M и N такие, что справедливо равенство (5.3.1).

Равенство (5.3.1) означает, что полином $P_m(x) - (Mx+N)Q_2(x)$ делится без остатка на $x^2+\alpha_1 x+\beta_1$. Остаётся определить полином $P_2(x)$:

$$P_2(x) = \frac{P_m(x) - (Mx+N)Q_2(x)}{x^2+\alpha_1 x+\beta_1}.$$

□

Из данной леммы вытекает

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{M_{l_1}x + N_{l_1}x}{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{l_1}} + \frac{M_{l_1-1}x + N_{l_1-1}}{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{l_1-1}} + \dots + \frac{M_1 x + N_1}{x^2+\alpha_1 x+\beta_1} + \frac{P_3(x)}{Q_2(x)}.$$

где $P_3(x)$ нацело не делится на многочлен $x^2+\alpha_1 x+\beta_1$, а степень полинома $P_3(x)$ меньше степени полинома $Q_1(x)$.

Из двух лемм мы получаем:

$$R(x) = \frac{P_r(x)}{Q_n(x)} = \sum_{k=0}^{r-n} C_k x^k + \sum_{k=1}^{s}\left(\sum_{v=1}^{n_k}\frac{A_{k,v}}{(x-x_k)^v}\right) + \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{\mu=1}^{l_k}\frac{M_{k,\mu}x + N_{k,\mu}}{(x^2+\alpha_k x+\beta_k)^{\mu}}\right).$$

III. Вычисление интегралов, полученных при разложении на простейшии дроби. Следовательно вычисление интеграла $\int R(x)\,dx$ от рациональной функции $R(x)$ мы свели к вычислению следующих интегралов

- $\int x^k\,dx,\ k\in\mathbb{N}$;
- $\int \dfrac{dx}{(x-x_k)^v},\ v\in\mathbb{N}$;
- $\int \dfrac{(Mx+N)dx}{(x^2+\alpha x+\beta)^l}$, где $D=\alpha^2-4\beta<0,\ l\in\mathbb{N}$.

Интегралы первых двух типов найти труда не представляет. Остановимся на вычислении последнего интеграла. Сделаем замену переменного $t = x+\frac{\alpha}{2}$. Тогда

$$x^2+\alpha x+\beta = t^2 + \left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right) = t^2+\gamma^2, \quad \gamma>0,\ (\beta-\frac{\alpha^2}{4})>0.$$

и $Mx+N = Mt + \left(N - \frac{\alpha}{2}M\right) = Mt + N_1$.

$$\int\frac{(Mx+N)\,dx}{(x^2+\alpha x+\beta)^l} = \int\frac{(Mt+N_1)\,dt}{(t^2+\gamma^2)^l} = M\int\frac{t\,dt}{(t^2+\gamma^2)^l} + N_1\int\frac{dt}{(t^2+\gamma^2)^l}$$

Найдём первый интеграл

$$\int\frac{t\,dt}{(t^2+\gamma^2)^l} = \frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+\gamma^2)}{(t^2+\gamma^2)^l} = \begin{cases} \dfrac{(t^2+\gamma^2)^{1-l}}{2(1-l)} + C, & l\geqslant 2,\\ \ln(t^2+\gamma^2)+C, & l=1.\end{cases}$$

Для того, чтобы вычислить второй интеграл выведем реккурентное ссотношение на

$$I_l = \int\frac{dt}{(t^2+\gamma^2)^l} \quad l\geqslant 1, l\in\mathbb{N}.$$

Заметим, что $I_1 = \frac{1}{\gamma}\operatorname{arctg}\frac{t}{\gamma} + C$. Для нахождения других I_l, $l\geqslant 2$, $l\in\mathbb{N}$ выпишем рекурентную формулу.

$$I_l = \frac{1}{\gamma^2}\cdot\int\frac{(t^2+\gamma^2)-t^2}{(t^2+\gamma^2)^l}dt = \frac{1}{\gamma^2}\cdot I_{l-1} - \frac{1}{2\gamma^2}\int\frac{td(t^2+\gamma^2)}{(t^2+\gamma^2)^l}.$$

Поскольку

$$\frac{d(t^2+\gamma^2)}{(t^2+\gamma^2)^l} = \frac{d((t^2+\gamma^2)^{1-l})}{1-l},$$

то

$$\int\frac{td(t^2+\gamma^2)}{(t^2+\gamma^2)^l} = \frac{1}{1-l}\int td((t^2+\gamma^2)^{1-l}) = \frac{1}{1-l}\left(\frac{t}{(t^2+\gamma^2)^{l-1}} - I_{l-1}\right).$$

Окончательно находим рекурентную формулу:

$$I_l = \frac{1}{\gamma^2}\left(\left(1-\frac{1}{2(l-1)}\right)I_{l-1} + \frac{1}{2(l-1)}\frac{t}{(t^2+\gamma^2)^{l-1}}\right).$$

Замечание 40. На примере рациональных функций видно, что при интегрировании класс рациональных функций не сохраняется, т.к. появляются функции $\ln x$ и $\operatorname{arctg} x$. Тот же эффект происходит и в случае класса всех элементарных функций, который при интегрировании не сохраняется.

П р и м е р 5.3.1. Вычислить $\int \frac{(x^2+3)\,dx}{x^3-2x^2-3x}$.

Решение. Знаменатель разложим на множители: $x^3-2x^2-3x = x(x+1)(x-3)$. Поскольку степень многочлена в числителе строго меньше степени многочлена в знаменателе, то справедливо разложение

$$\frac{x^2+3}{x^3-2x^2-3x} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x}.$$

Данное равенство равносильно уравнению $x^2+3 = Ax(x-3) + Bx(x+1) + C(x+1)(x-3)$. Подставляя по очереди точки $x = 0$, $x = -1$, $x = 3$, находим:

$$\begin{aligned} x = 0 &\implies 3 = -3C \implies C = -1,\\ x = -1 &\implies 4 = 4A \implies A = 1,\\ x = 3 &\implies 12 = 12B \implies B = 1. \end{aligned}$$

Следовательно

$$\int \frac{(x^2+3)\,dx}{x^3-2x^2-3x} = \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{dx}{x-3} - \int \frac{dx}{x} = \ln\left(\frac{(x+1)(x-3)}{x}\right) + C.$$

□

П р и м е р 5.3.2. Вычислить $\int \frac{(x^4+2x^2+x+1)\,dx}{x(x^2+1)^2}$.

Решение. Знаменатель уже разложен на множители. Поскольку степень многочлена в числителе строго меньше степени многочлена в знаменателе, то справедливо разложение

$$\frac{x^4+2x^2+x+1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Константы мы можем найти, приведя к общему знаменателю и приравняв у числителя соответствующие степени. Но данные константы легко найти из следующего соображения:

$$\frac{x^4+2x^2+x+1}{x(x^2+1)^2} = \frac{(x^2+1)^2+x}{x(x^2+1)^2} = \frac{1}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{x}.$$

Следовательно

$$\int \frac{(x^4+2x^2+x+1)\,dx}{x(x^2+1)^2} = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \ln|x| + I_2,$$

где за I_2 обозначен последний интеграл, т.е. $I_n = \int dx/(x^2+1)^n$. Используя реккурентное соотношение, найденное выше, находим:

$$\begin{aligned} I_1 &= \operatorname{arctg} x + C,\\ I_2 &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) I_1 + \frac{1}{2}\frac{x}{(x^2+1^2)^1}. \end{aligned}$$

Откуда

$$\int \frac{(x^4+2x^2+x+1)\,dx}{x(x^2+1)^2} = \ln|x| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(x^2+1)} + C.$$

□

П р и м е р 5.3.3. Вычислить $\int \frac{(3x^2-6x-1)\,dx}{(x+1)^2(x-1)^2}$.

Решение. Поскольку рациональная дробь правильная, то будем искать разложение на простейшие дроби:

$$\frac{3x^2-6x-1}{(x+1)^2(x-1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{(x-1)^2}. \tag{5.3.2}$$

Полученное выражение приведём к общему знаменателю опустив при этом общий знаменатель

$$3x^2-6x-1=A(x+1)(x-1)^2+B(x-1)^2+C(x+1)^2(x-1)+D(x+1)^2. \tag{5.3.3}$$

Откуда получаем:

$$\begin{aligned} x=1 &\Longrightarrow & -4=4D &\Longrightarrow & D=-1;\\ x=-1 &\Longrightarrow & 8=4B &\Longrightarrow & B=2. \end{aligned}$$

Найдём коэффициенты A, C различными способами:

I. Способ Из (5.3.2) получаем

$$\begin{aligned} &\frac{3x^2-6x-1}{(x+1)^2(x-1)^2}-\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{C}{x-1}\Longleftrightarrow\\ &\frac{2}{(x+1)(x-1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{C}{x-1}. \end{aligned}$$

Приводя к общему знаменателю получаем: $2=A(x-1)+C(x+1)$. Откуда,

$$\begin{aligned} x=1 &\Longrightarrow & 2=2C &\Longrightarrow & C=1;\\ x=-1 &\Longrightarrow & 2=-2A &\Longrightarrow & A=-1. \end{aligned}$$

II. Способ Метод неопределённых коэффициентов. Используя разложение (5.3.3), выпишем коэффициенты при степенях x^0 и x^3:

$$\begin{array}{r|l} x^3: & 0=A+C\\ x^0: & -1=A+B-C+D \quad\Longrightarrow\quad A-C=-2 \end{array}$$

Откуда опять находим $C=1$, $A=-1$.

III. Способ Используя дифференцирование. Запишем разложение (5.3.3) в следующем виде:

$$3x^2-6x-1=(x-1)^2\left(A(x+1)+2\right)+C(x+1)^2(x-1)-(x+1)^2.$$

Возьмём производную от обоих частей и подставим $x=1$. Только перед этим заметим, что при дифференцирование выражение $(x-1)^2\left(A(x+1)+2\right)$ перейдёт в выражение вида $(x-1)\cdot\psi(x)$, а потому обратиться в ноль при подстановке значения $x=1$. Следовательно

$$6x-6|_{x=1}=C(x+1)^2\big|_{x=1}-2(x+1)|_{x=1}.$$

Откуда $C=1$. По аналогии из разложения

$$3x^2-6x-1=A(x+1)(x-1)^2+2(x-1)^2+(x+1)^2\left(C(x-1)-1\right)$$

дифференцированием и подстановкой $x=-1$, получаем

$$6x-6|_{x=-1}=A(x-1)^2\big|_{x=-1}+4(x-1)|_{x=-1}.$$

Что опять приводит к результату $A=-1$.

□

Замечание 41. Изложенный выше III способ нахождения коэффициентов, можно применять и в произвольной ситуации для нахождении коэффициентов A_l, $l = 1, \ldots, k_1$ в разложении правильной рациональной дроби

$$\frac{P_m}{Q_n} = \frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} + \frac{A_{k_1-1}}{(x-x_1)^{k_1-1}} + \cdots + \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{P^*(x)}{Q_1(x)}.$$

После умножения равенства $(x-x_1)^{k_1}$ на получаем

$$\frac{P_m}{Q_1} = A_{k_1} + A_{k_1-1}(x-x_1) + \cdots + A_1(x-x_1)^{k_1-1} + (x-x_1)^{k_1} \cdot \frac{P^*(x)}{Q_1(x)}.$$

Возьмём от полученного уравнения l-ую производную ($l = 0, 1, \ldots, k_1 - 1$) и подставим значение x_1. Тогда

$$\left.\left((x-x_1)^{k_1} \cdot \frac{P^*(x)}{Q_1(x)}\right)^{(l)}\right|_{x=x_1} = 0, \quad l = 0, 1, \ldots, k_1 - 1.$$

Следовательно

$$\left.\left(\frac{P_m}{Q_1}\right)^{(l)}\right|_{x=x_1} = A_{k_1-l} \cdot l!$$

Откуда и получаем общую формулу для нахождения коэффициентов A_l

$$A_{k_1-l} = \frac{1}{l!}\left.\left((x-x_1)^{k_1} \cdot \frac{P_m}{Q_n}\right)^{(l)}\right|_{x=x_1}, \quad l = 0, 1, \ldots, k_1 - 1.$$

Контрольные вопросы.

1. Всегда ли интеграл от рациональной функции будет рациональной функцией?
2. Дать определение правильной рациональной функции.

Упражнения к 5.3

Упражнение 5.3.1. *Вычислить интеграл от рациональной функции*

(a) $\displaystyle\int \frac{x^4+2x^3+2x^2+x+1}{x^3+2x^2+x}\,dx$; (b) $\displaystyle\int \frac{-x^4+x^3+x^2-2x+2}{-x^3+x^2+2x}\,dx$; (c) $\displaystyle\int \frac{x^6-x^2-1}{x-1}\,dx$;

(d) $\displaystyle\int \frac{x^4+x^3+3x^2+4x+2}{x^3(x+1)^2}\,dx$; (e) $\displaystyle\int \frac{x^4+x^3+4x^2+x+1}{x(x^2-1)^2}\,dx$; (f) $\displaystyle\int \frac{3x^3-3x^2+3x-1}{x^3(x-1)^3}\,dx$;

(g) $\displaystyle\int \frac{x^4+2x^3+x^2+2x+1}{x^2(x+1)^2}\,dx$; (h) $\displaystyle\int \frac{x^6-16x^2-1}{x+2}\,dx$; (i) $\displaystyle\int \frac{x^2+2x-11}{(x-3)(x-2)(x+1)}\,dx$;

(j) $\displaystyle\int \frac{7x-9}{(x+1)(x-3)^2}\,dx$; (k) $\displaystyle\int \frac{x^4+x^3+x^2+1}{(x-1)(x^2+1)^2}\,dx$; (l) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+6}{(x-3)(x^2+9)}\,dx$;

(m) $\displaystyle\int \frac{x^2+2x+3}{(x^2+1)(x^2+4x+5)}\,dx$; (n) $\displaystyle\int \frac{x+2}{(x^2+9)(x^2-2x+5)}\,dx$; (o) $\displaystyle\int \frac{3x^2-x+1}{(x^2+1)(x^2-2x+2)}\,dx$.

Ответы: 5.3.1 (a) $x^2/2+\ln|x|+1/(x+1)+C$; (b) $x^2/2+\ln|x|-\ln|x+1|+\ln|x-2|+C$; (c) $x^6/6+x^5/5+x^4/4+x^3/3-\ln|x-1|+C$; (d) $-1/x^2+\ln|x|+1/(x+1)$; (e) $-1/(x-1)+\ln|x|+1/2\cdot1/(x+1)$; (f) $-1/(x-1)^2-1/2\cdot1/x^2$; (g) $1-1/x+1/(x+1)$;(d) $-1/x^2+\ln|x|+1/(x+1)$ (h) $x^6/6-2x^5/5+x^3-8x^3/3-\ln|x+2|+C$ (i) $\ln|x-3|+\ln|x-2|-\ln|x+1|+C$; (j) $\ln|x-3|-\ln|x+1|-3/2\cdot(x-1)^{-1}+C$; (k) $\ln|x-1|+1/2\operatorname{arctg}x-\frac{x}{2(x^2+1)}+C$; (l) $\ln|x-3|+1/3\operatorname{arctg}(x/3)+C$; (m) $1/2\operatorname{arctg}x+1/2\operatorname{arctg}(x+2)+C$; (n) $1/2\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}-1/3\operatorname{arctg}(x/3)+C$; (o) $2\operatorname{arctg}(x-1)+1/2\ln(x^2-2x+2)-1/2\ln(1+x^2)+C$.

5.4 Интегрирование иррациональных выражений

5.4.1 Интегрирование некоторых выражений, содержащие радикалы

Определение 5.4.1. Многочленом относительно двух переменных u, v называется функция вида $\sum_{n,k=0}^{N} c_{n,k} u^n v^k$, с некоторыми константами $c_{n,k}$. Функция $R(u,v)$ называется *рациональной функцией от двух переменных*, если она представима в виде отношения двух многочленов от переменных u, v.

Пример 5.4.1.

- Функции вида $u^3v^2-17u^6+v^3u^8+11$, $u+v-uv^{12}+2$ — многочлены относительно переменных u, v.
- Функции вида
$$\frac{u^3v^2-u+v+1}{u^{13}+v^2u^4-12}, \quad \frac{3u^4+v-uv^{12}+2}{uv-11u+3}$$
рациональные относительно переменных u, v.
- Функция вида
$$\frac{x+\sqrt[3]{x^2+2}+x^5-2}{x-x^7\cdot\sqrt[3]{(x^2+2)^5}+(x^2+2)^4},$$
рациональная относительно переменных x, $\sqrt[3]{x^2+2}$.
- Функция вида
$$\frac{\cos x+\sin^3 x-2\cos^5 x}{14\sin^7 x\cdot\cos^2 x-\cos^5 x+12},$$
рациональная относительно переменных $\sin x$, $\cos x$.

Пусть $m\in\mathbb{N}$. Рассмотрим интеграл вида
$$\int R\left(x,\ \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx, \tag{5.4.4}$$
где $R(u,v)$ — рациональная функция от перменных u и v. Тогда замена
$$t=\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$$
приводит данный интеграл к разобранному выше случаю, а именно к интегралу от рациональной функции. Действительно, поскольку в этом случае
$$t^m=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}, \quad x=\frac{\delta t^m-\beta}{\alpha-\gamma t^m}, \quad dx=\frac{m\delta t^{m-1}\cdot(\alpha-\gamma t^m)+m\gamma t^{m-1}\cdot(\delta t^m-\beta)}{(\alpha-\gamma t^m)^2}\,dt.$$
Откуда следуем, что интеграл (5.4.4) преобразуется к рациональной функции от переменной t. К интегралу разобранного вида также сводятся интегралы
$$\int R\left(x,\ \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{s_1},\ \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{s_2},\dots,\ \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{s_m}\right)dx,$$
где $s_k\in\mathbb{Q}$ — рациональные числа, т.е. представимы в виде $s_k=n_k/m_k$, где $n_k\in\mathbb{Z}$, $m_k\in\mathbb{N}$ и s_k мы предполагаем, что несократимые дроби. Заменой
$$t=\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}},$$
где $m=\text{НОК}(m_1,m_2,\dots,m_k)$, интеграл сводится к рациональной функции, как и в случае (5.4.4).

Пример 5.4.2. Вычислить
$$J=\int\frac{\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{1/3}-\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{1/6}+4}{(x+2)^2\left(\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{4/3}+4\left(\frac{x-1}{x+2}\right)\right)}\,dx$$

Решение. В данном примере $s_1=1/3$, $s_2=1/6$, $s_3=4/3$, $s_4=1$. Следовательно $m=\text{НОК}(m_1,m_2,\dots,m_k)=\text{НОК}(3,6,3,1)=6$. Сделаем замену переменного
$$t=\sqrt[6]{\frac{x-1}{x+2}}, \quad dt=\frac{1}{6}\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{-5/6}\cdot\frac{3\,dx}{(x+2)^2}=\frac{dx}{2t^5(x+2)^2}.$$

Откуда $dx = 2t^5(x+2)^2\,dt$. Подставляя данное выражение в интеграл, получаем:

$$J = 2\int \frac{t^2 - t + 4}{t^3 + 4t}\,dt.$$

Знаменатель разложим на множители $t^3 + 4t = t(t^2+4)$. Поскольку степень многочлена в числителе строго меньше степени многочлена в знаменателе, то справедливо разложение

$$\frac{t^2 - t + 4}{t^3 + 4t} = \frac{A}{t} + \frac{Bt + C}{t^2 + 4}.$$

Константы мы можем найти, приведя к общему знаменателю и приравняв у числителя соответствующие степени. Но данные константы легко найти из следующего соображения:

$$\frac{t^2 - t + 4}{t(t^2+4)} = \frac{(t^2+4) - t}{t(t^2+4)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2+4}.$$

Следовательно

$$J = 2\int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2+4}\right)dt = 2\ln|t| - \operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C = 2\ln\sqrt[6]{\frac{x-1}{x+2}} - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt[6]{\frac{x-1}{x+2}}\right) + C.$$

□

5.4.2 Интегрирование биноминальных дифференциалов

Определение 5.4.2. Дифференциал вида

$$x^m(a+bx^n)^p\,dx$$

называются *биноминальными.*

Рассмотрим случай $a,\ b \in \mathbb{R},\ m,\ n,\ p \in \mathbb{Q}$.

Теорема 5.4.1 (Чебышев)**.** *Пусть $a,\ b \in \mathbb{R},\ m,\ n,\ p \in \mathbb{Q}$. Тогда возможны следующие случаи*

1. *Если $p \in \mathbb{Z}$, то рационализация интеграла получается заменой $t = \sqrt[\lambda]{x}$, где λ наименьшее общее кратное знаменателей дробей m и n.*

2. *Если $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, то рационализация интеграла получается заменой $t = \sqrt[\lambda]{a+bx^n}$, где λ знаменатель дроби p.*

3. *Если $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$, то рационализация интеграла получается заменой $t = \sqrt[\lambda]{ax^{-n}+b}$, где λ знаменатель дроби p.*

4. *Во всех остальных случаях $m,\ n,\ p \in \mathbb{Q}$ биноминальный дифференциал не интегрируем в элементарных функциях.*

Доказательство. Случай $p \in \mathbb{Z}$ легко допускает рационализацию при помощи замены $t = \sqrt[\lambda]{x}$, где λ наименьшее общее кратное знаменателей дробей m и n.

Рассмотрим второй случай. Сделаем замену переменного $y = x^n$.

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx = \frac{1}{n}\int y^q(a+by)^p\,dy,$$

где $q = \frac{m+1}{n} - 1$. В нашем случае $q \in \mathbb{Z}$, поэтому рацинализацию происходит при помощи замены $t = \sqrt[\lambda]{a+by}$, где λ знаменатель дроби p.

Рассмотрим третий случай. Справедливо

$$\frac{1}{n}\int y^q(a+by)^p\,dy = \frac{1}{n}\int y^{p+q}(ay^{-1}+b)^p\,dy,$$

где $p+q = p+\frac{m+1}{n}-1$. Откуда для нашего случае $p+q \in \mathbb{Z}$, поэтому рацинализация достигается заменой $t = \sqrt[\lambda]{ay^{-1}+b}$, где λ знаменатель дроби p.

Четвёртый случай оставим без доказательства. □

П р и м е р 5.4.3. Вычислить интеграл $\int x^{-10}(\sqrt{1+x^{18}})^3\,dx$.

Решение. Предствив $x^{-10}(\sqrt{1+x^{18}})^3 = x^{-10}(1+x^{18})^{3/2}$ находим, что $m=-10$, $n=18$, $p=3/2$. Поскольку

$$\frac{m+1}{n}+p = 1 \in \mathbb{Z},$$

то, чтобы рационализировать данный интеграл достаточно ввести замену переменного $t^2 = x^{-18}+1$. Для удобства, данную замену разобъём на две простые замены. Пусть сначало $y = x^{18}$. Тогда

$$\int x^{-10}(\sqrt{1+x^{18}})^3\,dx = \frac{1}{18}\int y^{-3/2}(1+y)^{3/2}\,dy = \frac{1}{18}\int (y^{-1}+1)^{3/2}\,dy.$$

Остаётся рационализовать при помощи замены $t^2 = y^{-1}+1$, что равносильно $y = (t^2-1)^{-1}$.

$$\int (y^{-1}+1)^{3/2}\,dy = \int t^3\,d\left(\frac{1}{t^2-1}\right) = \frac{t^3}{t^2-1} - 3\int \frac{t^2}{t^2-1}\,dt =$$
$$= \frac{t^3}{t^2-1} - 3\int \frac{(t^2-1)+1}{t^2-1}\,dt = \frac{t^3}{t^2-1} - 3t - \frac{3}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C.$$

Откуда получаем ответ:

$$\int x^{-10}(\sqrt{1+x^{18}})^3\,dx = \frac{1}{18}\left(\frac{t^3}{t^2-1} - 3t - \frac{3}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right) + C,$$

где $t = x^{-18}+1$. □

П р и м е р 5.4.4. Выяснить, возможно ли вычислить в элементарных функциях интеграл $\int \sqrt{1+x^3}\,dx$?

Решение. Представив $\sqrt{1+x^3} = x^0(1+x^3)^{1/2}$ находим, что в данном примере $m=0$, $n=3$, $p=1/2$. Поскольку

$$p = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}, \quad \frac{m+1}{n} = \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}, \quad \frac{m+1}{n}+p = \frac{5}{6} \notin \mathbb{Z},$$

то данный интеграл нельзя вычислить в элементарных функциях. □

5.4.3 Подстановки Эйлера

Рассморим интегралы вида

$$\int R(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx,$$

где $R(u,v)$ — рациональная функция от перменных u, v. Предполагаем, что выражение под корнем не является полным квадратом (т.е. дискриминант отличен от нуля), т.к. иначе это сразу рациональная функция от переменной x.

1 подстановка Пусть $a>0$. Положим

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}\,x.$$

Убедимся, что x и $\sqrt{ax^2+bx+c}$ рационально выражаются через t в этом случае (если x рационально выражаются через t, то и dx рационально выражаются через t). Действительно, возведя в квадрат последне равенство получим $bx+c = t^2 - 2\sqrt{a}\,tx$ или

$$x = \frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\,t+b}, \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\,t+b},$$
$$dx = 2\frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}\,t+b)^2}\,dt.$$

В качестве замены можно было было бы взять и такую подстановку $\sqrt{ax^2+bx+c} = t+\sqrt{a}\,x$, которая аналогично привела бы к интегралу от рациональной функции.

2 подстановка Пусть $c>0$. Положим

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}.$$

Убедимся, что x и $\sqrt{ax^2+bx+c}$ рационально выражаются через t в этом случае (если x рационально выражаются через t, то и dx рационально выражаются через t). Действительно, возведя в квадрат последне равенство и сократив на x получим $ax+b = xt^2 + 2\sqrt{c}\,t$ или

$$x = \frac{2\sqrt{c}t-b}{a-t^2}, \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{\sqrt{c}\,t^2-bt+a\sqrt{c}}{a-t^2},$$
$$dx = 2\frac{\sqrt{c}\,t^2-bt+\sqrt{c}\,a}{(a-t^2)^2}\,dt.$$

В качестве замены можно было было бы взять и такую подстановку $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt-\sqrt{c}$, которая аналогично привела бы к интегралу от рациональной функции.

3 подстановка Пусть $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где $x_1 \neq x_2$. Положим

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_1).$$

Убедимся, что x и $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ рационально выражаются через t в этом случае (если x рационально выражаются через t, то и dx рационально выражаются через t). Действительно, возведя в квадрат последне равенство и сократив на $x - x_1$ получим $a(x - x_2) = t^2(x - x_1)$ или

$$x = \frac{x_1 t^2 - a x_2}{t^2 - a}, \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{a(x_1 - x_2)t}{t^2 - a},$$
$$dx = -\frac{2a(x_1 - x_2)t}{(t^2 - a)^2}\,dt.$$

В качестве замены можно было было бы взять и такую подстановку $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_2)$, которая аналогично привела бы к интегралу от рациональной функции.

П р и м е р 5.4.5. Вычислить

$$\int \frac{\sqrt{x^2+9} - 7}{x + \sqrt{x^2+9}}\,dx.$$

Решение. Воспользуемся первой подстановкой Эйлера. Пусть $\sqrt{x^2+9} = t - x$, тогда после возведения в квадрат получаем $9 = t^2 - 2tx$ или

$$x = \frac{t^2 - 9}{2t}, \quad \sqrt{x^2+9} = t - x = \frac{t^2+9}{2t},$$
$$dx = \frac{t^2+9}{2t^2}\,dt.$$

Откуда

$$\int \frac{\sqrt{x^2+9} - 7}{x + \sqrt{x^2+9}}\,dx = \int \frac{\frac{t^2+9}{2t} - 7}{t} \cdot \frac{t^2+9}{2t^2}\,dt = \int \frac{(t^2 - 14t + 9)(t^2+9)}{4t^4}\,dt =$$
$$= \frac{1}{4}\int \left(1 - \frac{14}{t} + \frac{18}{t^2} - \frac{126}{t^3} + \frac{81}{t^4}\right) dt = \frac{1}{4}\left(t - 14\ln|t| - \frac{18}{t} + \frac{63}{t^2} - \frac{27}{t^3}\right) + C.$$

Остаётся сделать обратную замену $t = x + \sqrt{x^2+9}$ и выписать ответ. □

5.4.4 Интегрирование рациональных функций с иррациональностью вида $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ в знаменателе

Речь идёт о вычислении интегралов вида

$$\int \frac{R(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,dx,$$

где $R(x)$ — рациональная функция. Используя разложение на простейшии дроби рациональной функции, сводим вычисление исходного интеграла к следующим трём видам:

- $\int \dfrac{x^k}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,dx$, $k \in \mathbb{N}$;
- $\int \dfrac{dx}{(x-\gamma)^v \sqrt{ax^2 + bx + c}}$, $v \in \mathbb{N}$;
- $\int \dfrac{(Mx+N)dx}{(x^2 + \alpha x + \beta)^l \sqrt{ax^2 + bx + c}}$, где $D = \alpha^2 - 4\beta < 0$, $l \in \mathbb{N}$.

I. Вычисление интегралов первого вида. Получим рекуррентную формулу для интеграла

$$J_k = \int \frac{x^k}{y}\,dx,$$

где $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$. Справедливо равенство

$$(x^{k-1} \cdot y)' = (k-1)x^{k-2}y + \frac{x^{k-1}(2ax+b)}{2y} = \frac{2(k-1)x^{k-2}(ax^2+bx+c) + x^{k-1}(2ax+b)}{2y} =$$
$$= ka\frac{x^k}{y} + \left(k - \frac{1}{2}\right) b \cdot \frac{x^{k-1}}{y} + (k-1)c \cdot \frac{x^{k-2}}{y}.$$

После интегрирования получаем

$$x^{k-1} \cdot y = kaJ_k + \left(k - \frac{1}{2}\right) b \cdot J_{k-1} + (k-1)c \cdot J_{k-2}.$$

или

$$J_k = \frac{x^{k-1} \cdot y}{ka} - \left(\frac{2k-1}{2ka}\right) b \cdot J_{k-1} - \frac{(k-1)c}{ka} \cdot J_{k-2}.$$

$$J_1 = \frac{y}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right) \cdot J_0$$

Откуда приходим к формуле

$$J_k = p_{k-1}(x) \cdot y + \lambda \cdot J_0.$$

При вычислении интеграла удобнее сразу написать разложение предыдущего вида и искать коэффициенты при полиноме $p_{k-1}(x)$ и λ методом неопределенных коэффициентов.

II. Вычисление интегралов второго вида. Данный интегралы при помощи подстановки $t = 1/(x-\gamma)$ сводятся к разобранному первому случаю. Действительно,

$$x - \gamma = \frac{1}{t}, \quad dx = -\frac{dt}{t^2}, \quad ax^2 + bx + c = \frac{(a\gamma^2 + b\gamma + c)t^2 + (2a\gamma + b)t + a}{t^2}.$$

Откуда

$$\int \frac{dx}{(x-\gamma)^v \sqrt{ax^2 + bx + c}} = -\int \frac{t^{v-1}\, dt}{\sqrt{(a\gamma^2 + b\gamma + c)t^2 + (2a\gamma + b)t + a}}$$

Если γ корень квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, То последний интеграл упрощается, поскольку превращается в вид

$$-\int \frac{t^{v-1}\, dt}{\sqrt{(2a\gamma + b)t + a}}.$$

Данный интеграл считаем при помощи замены $z = (2a\gamma + b)t + a$. Если γ не является корнем квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то получен интеграл первого вида, который уже разобран.

III. Вычисление интегралов третьего вида. Рассмотрим два случая: **III-а** Пусть $ax^2+bx+c = a(x^2+\alpha x+\beta)$. Тогда нахождение исходного интеграла равносильно следующему:

$$\int \frac{(Mx+N)dx}{(ax^2+bx+c)^{l+\frac{1}{2}}} = \frac{M}{2a} \int \frac{2ax + b\, dx}{(ax^2+bx+c)^{l+\frac{1}{2}}} + \left(N - \frac{Mb}{2a}\right) \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{l+\frac{1}{2}}}.$$

Начнём с последнего интеграла, который сводится к рациональному выражению, при помощи *подстановки Абеля* $t = \sqrt{y}\,'$:

$$t = \sqrt{y}\,' = \frac{y'}{2\sqrt{y}} = \frac{2ax + b}{2\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

Откуда

$$\begin{aligned} &4t^2 y = (2ax+b)^2 \Longrightarrow \\ &4ay - 4t^2 y = 4ac - b^2 \Longrightarrow 4(a - t^2)y = 4ac - b^2. \end{aligned}$$

Откуда находим представление

$$y^s = \left(\frac{4ac - b^2}{4}\right)^s \frac{1}{(a - t^2)^s}.$$

Если же продифференцировать выражение $t\sqrt{y} = ax + \frac{b}{2}$, то получим $\sqrt{y}\, dt + t^2\, dx = a\, dx$. Откуда

$$\frac{dx}{\sqrt{y}} = \frac{dt}{a - t^2}.$$

Следовательно

$$\int \frac{dx}{y^{l+\frac{1}{2}}} = \left(\frac{4}{4ac - b^2}\right)^l \int (a - t^2)^{l-1}\, dt.$$

Далее остается проинтегрировать алгебраический многочлен.

III-b Рассмотрим второй случай $\frac{ax^2+bx+c}{x^2+\alpha x+\beta} \neq Const$, т.е либо $b/a \neq \alpha$ либо $c/a \neq \beta$. Представим $ax^2 + bx + c = a(x^2+\alpha' x+\beta')$, причём согласно нашему случаю, либо $\alpha' \neq \alpha$ либо $\beta' \neq \beta$. Покажем, что можно при помощи дробно-линейной замены добится того, чтобы в обоих выражениях $x^2+\alpha x+\beta$ и $x^2+\alpha' x+\beta'$ коэффициент при x отсутствовал бы.

Случай $\alpha = \alpha'$ очевиден, поскольку линейная замена $t = x + \alpha/2$ (линейная замена — частный случай дробно-линейной замены) сразу приводит к желаемому результату:

$$x^2 + \alpha x + \beta = t^2 + (\beta - \alpha^2/4), \quad x^2 + \alpha' x + \beta' = t^2 + (\beta' - {\alpha'}^2/4).$$

Рассмотрим случай $\alpha \neq \alpha'$.

Лемма 18. *Пусть $x^2 + \alpha' x + \beta'$ и $x^2 + \alpha x + \beta$ таковы, что $\alpha' \neq \alpha$. Причём справедливо $x^2 + \alpha x + \beta > 0$ для любого x (т.е. дискриминант отрицателен $\alpha^2 - 4\beta < 0$). Тогда существуют такие константы μ и ν и дробно-линейная замена*

$$x = \frac{\mu t + \nu}{t+1},$$

что справедливо

$$x^2 + \alpha x + \beta = \frac{A_1 t^2 + B_1}{(t+1)^2}, \quad x^2 + \alpha' x + \beta' = \frac{A_2 t^2 + B_2}{(t+1)^2},$$

где константы A_1, A_2, B_1, B_2 зависят от μ и ν. Иначе говоря, при данной замене будет отсутствовать коэффициент при t в числителе полученной дроби.

Доказательство. Сделаем замену

$$x = \frac{\mu t + \nu}{t+1}.$$

Получаем

$$x^2 + \alpha x + \beta = \frac{(\mu^2 + \alpha\mu + \beta)t^2 + (2\mu\nu + \alpha(\mu+\nu) + 2\beta)t + (\nu^2 + \alpha\nu + \beta)}{(t+1)^2}.$$

Условие на нахождение коэффициентов μ и ν

$$2\mu\nu + \alpha(\mu+\nu) + 2\beta = 0,$$
$$2\mu\nu + \alpha'(\mu+\nu) + 2\beta' = 0.$$

Откуда

$$\mu + \nu = -2\frac{\beta - \beta'}{\alpha - \alpha'}, \quad \mu\nu = \frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\alpha - \alpha'}.$$

Таким образом μ и ν корни квадратного уравнения

$$(\alpha - \alpha')z^2 + 2(\beta - \beta')z + (\alpha'\beta - \alpha\beta') = 0.$$

Существование различных действительных корней возможно при выполнении следующего условия:

$$(\beta - \beta')^2 - (\alpha - \alpha') \cdot (\alpha'\beta - \alpha\beta') > 0.$$

Проверим, что это неравенство справедливо. Последнее неравенство равносильно

$$\left(\beta + \beta' - \frac{\alpha^2{\alpha'}^2}{2}\right)^2 > 4\left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right)\left(\beta' - \frac{{\alpha'}^2}{4}\right). \tag{5.4.5}$$

Поскольку $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ имеет мнимые корни, то дискриминант отрицателен и $\beta - \frac{\alpha^2}{4} > 0$. Следовательно, если $\beta' - \frac{{\alpha'}^2}{4} < 0$, то неравенство (5.4.5) выполнено. Рассмотрим случай, когда $\beta' - \frac{{\alpha'}^2}{4} \geqslant 0$. Тогда

$$\beta > 0, \quad \beta' \geqslant 0, \quad 4\sqrt{\beta\beta'} \geqslant \alpha\alpha'.$$

Используя неравенство между среднем арифметическим и геометрическим $\beta + \beta' \geqslant 2\sqrt{\beta\beta'}$, получаем:

$$\left(\beta + \beta' - \frac{\alpha\alpha'}{2}\right)^2 \geqslant \left(2\sqrt{\beta\beta'} - \frac{\alpha\alpha'}{2}\right)^2 =$$
$$= \left(2\beta - \frac{\alpha^2}{2}\right)\left(2\beta' - \frac{{\alpha'}^2}{2}\right) + (\alpha'\sqrt{\beta} - \alpha\sqrt{\beta'})^2 \geqslant \left(2\beta - \frac{\alpha^2}{2}\right)\left(2\beta' - \frac{{\alpha'}^2}{2}\right).$$

Неравенство между среднем арифметическим и геометрическим обращается в равенство, если $\beta = \beta'$, а чтобы последнее неравенство обратилось в равенство дополнительно придётся потребовать, чтобы $\alpha = \alpha'$, но такое по предположению не возможно, т.е. в последнем неравенстве знак строгий, и неравенство (5.4.5) выполнено. $\square$

В случае $\alpha' \neq \alpha$, выполнив дробно-линейную подстановку, исходный интеграл примет вид:

$$\int \frac{P(t)\,dt}{(t^2+\gamma)^l\sqrt{\xi t^2+\zeta}},$$

где $P(t)$ полином степени не выше, чем $2l-1$ и $\gamma > 0$. Разложив правильную дробь $P(t)/(t^2+\gamma)^l$ на простые прийдём к сумме интегралов следующего вида:

$$\int \frac{At+B\,dt}{(t^2+\gamma)^k\sqrt{\xi t^2+\zeta}}, \quad k = 1, 2, \ldots, l.$$

В случае $\alpha' = \alpha$ мы приходим к только что выписанному интегралу при помощи замены $t = x + \alpha/2$. Разобъем полученный интеграл на два:

$$\int \frac{At+B\,dt}{(t^2+\gamma)^k\sqrt{\xi t^2+\zeta}} = A\int \frac{t\,dt}{(t^2+\gamma)^k\sqrt{\xi t^2+\zeta}} + B\int \frac{dt}{(t^2+\gamma)^k\sqrt{\xi t^2+\zeta}}.$$

Первый интеграл рационализируется при помощи подстановки $u = \sqrt{\xi t^2+\zeta}$, второй — при помощи *подстановки Абеля*

$$u = \frac{\xi t}{\sqrt{\xi t^2+\zeta}}.$$

Сразу получаем

$$t^2+\gamma = \frac{(\zeta-\xi\gamma)u^2+\xi^2\gamma}{\xi(\xi-u^2)}.$$

Продифференцировав выражение $u\sqrt{\xi t^2+\zeta} = \xi t$, то получим $\sqrt{\xi t^2+\zeta}\,du + u^2\,dt = \xi\,dt$. Откуда

$$\frac{dt}{\sqrt{\xi t^2+\zeta}} = \frac{du}{\xi-u^2}.$$

Следовательно

$$\int \frac{dt}{(t^2+\gamma)^k\sqrt{\xi t^2+\zeta}} = \xi^k\int \frac{(\xi-u^2)^{k-1}\,dt}{((\zeta-\xi\gamma)u^2+\xi^2\gamma)^k}.$$

И опять приходим к интегралу от рациональной функции.

П р и м е р 5.4.6. Вычислить

$$\int \frac{(5x^5+64x^3+3x-1)\,dx}{\sqrt{x^2+16}}.$$

Решение. В силу доказанного, существуют такие константы, что справедливо:

$$\int \frac{(5x^5+64x^3+3x-1)\,dx}{\sqrt{x^2+16}} = (Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E)\sqrt{x^2+16} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+16}}.$$

Положим $y = x^2+16$. Продифференцируем данное уравнение

$$\frac{5x^5+64x^3+3x-1}{\sqrt{y}} = (4Ax^3+3Bx^2+2Cx+D)\sqrt{y} + (Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E)\frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{\lambda}{\sqrt{y}}.$$

Приведём к общему знаменателю:

$$5x^5+64x^3+3x-1 = (4Ax^3+3Bx^2+2Cx+D)(x^2+16) + (Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E)\cdot x + \lambda.$$

Равенство двух многочленов слева и справа уравнения, влечёт равенство при соответствующих степенях по переменной x

$$\begin{array}{r|ll}
x^5: & 5 = 4A + A & A = 1 \\
x^4: & 0 = 3B + B & B = 0 \\
x^3: & 64 = 64A + 2C + C & C = 0 \\
x^2: & 0 = 48B + D + D & D = 0 \\
x^1: & 3 = 32C + E & E = 3 \\
x^0: & -1 = 16D + \lambda & \lambda = -1
\end{array}$$

Итого,

$$\int \frac{(5x^5+64x^3+3x-1)\,dx}{\sqrt{x^2+16}} = (x^4+3)\sqrt{x^2+16} - \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+16}} = (x^4+3)\sqrt{x^2+16} - \ln\left|x+\sqrt{x^2+16}\right| + C.$$

□

П р и м е р 5.4.7. Вычислить

$$\int \frac{dx}{(x^2+8x+21)^{11/2}}.$$

Решение. Сделаем для удобства замену $z = x+4$. Тогда

$$\int \frac{dx}{(x^2+8x+21)^{11/2}} = \int \frac{dz}{(z^2+5)^{11/2}}.$$

Теперь при помощи *подстановки Абеля* $t = \sqrt{y}\,'$ (здесь, как обычно $y = z^2+5$) сведём к интегрированию рациональной функции

$$t = \sqrt{y}\,' = \frac{y'}{2\sqrt{y}} = \frac{z}{\sqrt{y}}.$$

Откуда

$$\begin{aligned}
&t^2y = z^2 \Longrightarrow\\
&t^2y = y-5 \Longrightarrow (1-t^2)y = 5.
\end{aligned}$$

Откуда находим представление

$$y^s = \left(\frac{5}{1-t^2}\right)^s.$$

Если же продифференцировать выражение $t\sqrt{y} = z$, то получим $\sqrt{y}\,dt + t^2\,dz = dz$. Откуда

$$\frac{dz}{\sqrt{y}} = \frac{dt}{1-t^2}.$$

Следовательно

$$\begin{aligned}
\int \frac{dz}{y^{5+\frac{1}{2}}} = \int y^{-5}\cdot\frac{dz}{\sqrt{y}} = \frac{1}{5^5}\int (1-t^2)^4\,dt = \frac{1}{5^5}\int (1-4t^2+6t^4-4t^6+t^8)\,dt =\\
= \frac{1}{5^5}\left(t - \frac{4}{3}\cdot t^3 + \frac{6}{5}\cdot t^5 - \frac{4}{7}\cdot t^7 + \frac{1}{9}\cdot t^9\right) + C.
\end{aligned}$$

Далее остается выписать ответ, заменив $t = z/\sqrt{z^2+5}$, т.е. $t = (x+4)/\sqrt{x^2+8x+21}$. □

Замечание 42. Интеграл $\int (z^2+5)^{-11/2}\,dz$ можно было бы посчитать и при помощи гиперболической замены, т.е. положив $z = \sqrt{5}\,\mathrm{sh}\,u$, пришли бы к интегралу вида

$$\begin{aligned}
\int \frac{dz}{(z^2+5)^{11/2}} = \int \frac{du}{5^5\,\mathrm{ch}^{10}\,u} = \int \left(\frac{1}{\mathrm{ch}^2\,u}\right)^4 \frac{du}{5^5\,\mathrm{ch}^2\,u} = \frac{1}{5^5}\int \left(1-\mathrm{th}^2\,u\right)^4\,d\,\mathrm{th}\,u =\\
= \frac{1}{5^5}\int (1-4w^2+6w^4-4w^6+w^8)\,dw = \frac{1}{5^5}\cdot\left(\mathrm{th}\,u - \frac{4}{3}\cdot\mathrm{th}^3\,u + \frac{6}{5}\cdot\mathrm{th}^5\,u - \frac{4}{7}\cdot\mathrm{th}^7\,u + \frac{1}{9}\cdot\mathrm{th}^9\,u\right) + C,
\end{aligned}$$

где $u = \mathrm{arcsh}\,\left((x+4)/\sqrt{5}\right)$.

П р и м е р 5.4.8. Вычислить

$$\int \frac{(x-2)\,dx}{(x^2-2x+4)\sqrt{x^2+2x+4}}.$$

Решение. Найдём коэффициенты μ, ν в дробно-линейной замене:

$$x = \frac{\mu t+\nu}{t+1}.$$

Поскольку

$$x^2 \pm 2x + 4 = \frac{(\mu^2 \pm 2\mu + 4)t^2 + (2\mu\nu \pm 2(\mu+\nu) + 8)t + (\nu^2 \pm 2\nu + 4)}{(t+1)^2},$$

то условием на коэффициенты μ, ν будет искать из уравнения $2\mu\nu \pm 2(\mu+\nu)+8=0$. Подходят, например, $\mu=2$, $\nu=-2$. Откуда

$$x=\frac{2(t-1)}{t+1},\quad x-2=\frac{-4}{t+1},\quad dx=\frac{4\,dt}{(t+1)^2},$$
$$x^2+2x+4=\frac{12t^2+4}{(t+1)^2},\quad x^2-2x+4=\frac{4t^2+12}{(t+1)^2}.$$

Следовательно

$$\int\frac{(x-2)\,dx}{(x^2-2x+4)\sqrt{x^2+2x+4}}=-2\int\frac{dt}{(t^2+3)\sqrt{3t^2+1}}.$$

Теперь рациональзация достигается при помощи *подстановки Абеля* $u=\sqrt{y}\,'$ здесь, $y=3t^2+1$

$$u=\sqrt{y}\,'=\frac{y'}{2\sqrt{y}}=\frac{3t}{\sqrt{y}}.$$

Откуда

$$u^2y=9t^2\Longrightarrow$$
$$u^2y=3y-3\Longrightarrow(3-u^2)y=3.$$

Откуда находим выражение для функций, стоящих под знаком интеграла:

$$y^{1/2}=\left(\frac{3}{3-u^2}\right)^{1/2},\quad t^2+3=\frac{27-8u^2}{9-3u^2}.$$

Если же продифференцировать выражение $u\sqrt{y}=3t$, то получим $\sqrt{y}\,du+u^2\,dt=3dt$. Откуда

$$\frac{dt}{\sqrt{y}}=\frac{du}{3-u^2}.$$

Интеграл преобразуется к виду

$$-2\int\frac{dx}{(t^2+3)\sqrt{3t^2+1}}=-2\int\frac{9-3u^2}{27-8u^2}\cdot\frac{du}{3-u^2}=-6\int\frac{du}{27-8u^2}.$$

Следовательно

$$-6\int\frac{du}{27-8u^2}=\frac{3}{4}\int\frac{du}{u^2-\frac{27}{8}}=\frac{3}{4\cdot2\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}\ln\left|\frac{u-\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}{u+\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}\right|+C=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{2\sqrt{2}\cdot u-3}{2\sqrt{2}\cdot u+3}\right|+C.$$

где $u=3t/\sqrt{3t^2+1}$, $t=(2+x)/(2-x)$. □

Контрольные вопросы.

1. В каких случаях можно применить подстановку Абеля?
2. Дать определение рациональной функции от двух аргументов.

Упражнения к 5.4

Упражнение 5.4.1. *Вычислить интеграл*

$$(a)\quad\int\frac{x-3\,dx}{\sqrt{x^2+2x+5}};\qquad(b)\quad\int\frac{3x+1\,dx}{\sqrt{x^2-8x+17}};\qquad(c)\quad\int\frac{x+7\,dx}{\sqrt{x^2-2x+10}};$$

Упражнение 5.4.2. *Вычислить интеграл*

$$(a)\quad \int \frac{(\sqrt[3]{x}+4)\,dx}{\sqrt[3]{x^4}+x-2\sqrt[6]{x^7}};\qquad (b)\quad \int \frac{\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-3}}-3\sqrt[6]{\frac{x+1}{x-3}}+1\right)\,dx}{\left(\left(\frac{x+1}{x-3}\right)^{4/3}+\frac{x+1}{x-3}\right)(x-3)^2};\qquad (c)\quad \int \frac{\sqrt{x+5}(\sqrt{x+5}-1)}{1+\sqrt[3]{x+5}}\,dx;$$

$$(d)\quad \int \frac{\sqrt[6]{x^5}+\sqrt{x}+1}{\sqrt[6]{x^5}(1+\sqrt[3]{x})}\,dx.$$

Упражнение 5.4.3. *Вычислить интеграл*

$$(a)\quad \int \frac{\sqrt{1-x+x^2}-1}{x\sqrt{1-x+x^2}}\,dx;\qquad (b)\quad \int \frac{\sqrt{x^2-2x+10}-2}{x+\sqrt{10-2x+x^2}-1}\,dx;$$

Упражнение 5.4.4. *Вычислить интеграл*

$$(a)\quad \int \frac{x^2+3x-2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx;\qquad (b)\quad \int \frac{x-x^2+3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx;\qquad (c)\quad \int \frac{x^3-x^2+2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx;$$

$$(d)\quad \int \frac{x^3+x+2}{\sqrt{4+x^2}}\,dx.$$

Упражнение 5.4.5. *Вычислить интеграл*

$$(a)\quad \int x^{38/7}(4+x^{15/7})^{5/2}\,dx;\qquad (b)\quad \int x^{29/7}(x^{18/7}+2)^{7/2}\,dx;\qquad (c)\quad \int \frac{1}{\sqrt[4]{x^{13}}}\left(1+\frac{4}{\sqrt[4]{x^3}}\right)^{3/2}\,dx;$$

$$(d)\quad \int x^{-7}(1-x^{12})^{3/2}\,dx;\qquad (e)\quad \int x^{-11}(\sqrt{1+x^{20}})^3\,dx;\qquad (f)\quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{5+\sqrt[3]{x^2}}};$$

$$(g)\quad \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^{11}(1+x^4)}};\qquad (h)\quad \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}};\qquad (i)\quad \int \frac{dx}{x^8\cdot\sqrt[4]{1+x^4}};$$

$$(j)\quad \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}};\qquad (k)\quad \int \sqrt[3]{3x-x^3}\,dx.$$

Упражнение 5.4.6. *Вычислить интеграл, используя подстановку Абеля*

$$(a)\quad \int \frac{dx}{(5+2x+x^2)^{5/2}};\qquad (b)\quad \int \frac{dx}{(26+10x+x^2)^{11/2}};\qquad (c)\quad \int \frac{(2x+3)\,dx}{\sqrt{(x^2+4x+5)^{11}}};$$

$$(d)\quad \int \frac{(-9-2x)\,dx}{\sqrt{(x^2+8x+17)^{13}}};\qquad (e)\quad \int \frac{dx}{(7+4x+x^2)^{3/2}};\qquad (f)\quad \int \frac{(x+1)\,dx}{(1+x+x^2)^{3/2}};$$

$$(g)\quad \int \frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{5+2x+2x^2}};\qquad (h)\quad \int \frac{x\,dx}{(x^2+2x+4)\sqrt{x^2+6x+12}};$$

$$(i)\quad \int \frac{dx}{(x^2+3x+3)\sqrt{x^2+5x+7}}.$$

Ответы: 5.4.1 (a) $\sqrt{x^2+2x+5}-4\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}|+C$; (b) $3\sqrt{x^2-8x+17}-4\ln|x-4+\sqrt{x^2-8x+17}|+C$; (c) $\sqrt{x^2-2x+10}+8\ln|x-1+\sqrt{x^2-2x+10}|+C$. **5.4.2** (a) $-\frac{30}{\sqrt[6]{x}-1}+4\ln|x|-18\ln|\sqrt[6]{x}-1|+C$; (b) $-3/2\ln|t|+9/2\operatorname{arctg}t+C$, $t=\sqrt[6]{\frac{x+1}{x-3}}$; (c) $1/6\cdot\psi(t)$, $\psi(t)=\frac{t^{10}}{10}-\frac{t^8}{8}+\frac{t^7}{7}+\frac{t^6}{6}+\frac{t^5}{5}-\frac{t^4}{4}-\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+t-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)-\operatorname{arctg}t+C$, $t=\sqrt[6]{x+5}$; (d) $3/2\sqrt[3]{x^2}+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C$. **5.4.3** (a) $\ln\left|1-\left(\frac{\sqrt{1-x+x^2}-1}{x}\right)^2\right|+C$; (b) $\frac{1}{4}\left(t-\ln|t|-\frac{9}{2t}+\frac{1}{2t^2}-\frac{27}{4t^3}\right)+C$, $t=x-1+\sqrt{x^2-2x+10}$. **5.4.4** (a) $\left(\frac{x}{2}+3\right)\sqrt{x^2+1}-\frac{5}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+1}|+C$; (b) $\left(\frac{x}{2}-1\right)\sqrt{4-x^2}+\arcsin(x/2)+C$; (c) $-\frac{1}{6}(2x^2-3x+4)\sqrt{1-x^2}+\frac{3}{2}\arcsin x+C$; (d) $\frac{1}{3}(x^2-5)\sqrt{4+x^2}+2\ln|x+\sqrt{4+x^2}|+C$. **5.4.5** (a) $\frac{7}{15}\left(\frac{2}{11}t^{11/2}-\frac{16}{9}t^{9/2}+\frac{32}{7}t^{7/2}\right)+C$, $t=x^{15/7}+4$; (b) $\frac{7}{99}t^{11/2}-\frac{14}{81}t^{9/2}+C$, $t=2+x^{18/7}$; (c) $-\frac{1}{216}t^{9/2}+\frac{1}{84}t^{7/2}-\frac{1}{120}t^{5/2}+C$, $t=1+4x^{-3/4}$; (d) $-\frac{t}{12(t^2+1)}-\frac{t}{6}+\frac{1}{4}\operatorname{arctg}t+C$, $t=x^{-12}-1$; (e) $\frac{t}{20(t^2-1)}-\frac{t}{10}-\frac{3}{4}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right|+C$, $t=x^{-20}+1$; (f) $\frac{3}{5}t^5-10\cdot t^3+75t+C$, $t=\sqrt{5+x^{2/3}}$; (g) $-\frac{3(1+x^4)^{2/3}}{8x^{8/3}}+C$; (h) $\frac{1}{6}\ln\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$, $t=\sqrt[3]{1+x^{-3}}$; (i) $-\frac{t^{7/4}}{7}+\frac{t^{3/4}}{3}+C$, $t=1+x^{-4}$; (j) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+C$, $t=\sqrt[3]{1+x^{-4}}$; (k) $\frac{3t}{2(1+t^3)}-\frac{1}{4}\ln\frac{(t+1)^2}{t^2-t+1}-\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}+C$, $t=\sqrt[3]{3x^{-2}-1}$. **5.4.6** (a) $\frac{t}{16}-\frac{t^3}{48}+C$, $t=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}$ или $\frac{(x+1)^3+6(x+1)}{24(x^2+2x+5)^{5/2}}+C$; (b) $t-\frac{4}{3}\cdot t^3+\frac{6}{5}\cdot t^5-\frac{4}{7}\cdot t^7+\frac{1}{9}\cdot t^9+C$, $t=\frac{x+5}{\sqrt{26+10x+x^2}}$; (c) $-\frac{2}{9}(x^2+4x+5)^{-9/2}-t+\frac{4}{3}\cdot t^3-\frac{6}{5}\cdot t^5+\frac{4}{7}\cdot t^7-\frac{1}{9}\cdot t^9+C$, $t=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+5}}$; (d) $\frac{4}{11}(x^2+8x+17)^{-11/2}-t+\frac{5}{3}\cdot t^3-2t^5+\frac{10}{7}\cdot t^7-\frac{5}{9}\cdot t^9+\frac{1}{11}t^{11}+C$, $t=\frac{x+4}{\sqrt{x^2+8x+17}}$; (e) $\ln\frac{x+2}{3\sqrt{x^2+x+1}}+C$; (f) $\frac{2(x-1)}{3\sqrt{x^2+x+1}}+C$;

(g) $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2x^2+2x+5}}{1-x} + \frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2(2x^2+2x+5)}+2+x}{\sqrt{2(2x^2+2x+5)}-2-x} + C$. (h) $2\ln|2-u| - \left(\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)\cdot\ln|\sqrt{3}+u| + \left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)\cdot\ln|\sqrt{3}-u| + C$, $u = 3t/\sqrt{3t^2+1}$, $t = 1+4/x$; (i) $-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+5x+7}}{(x+1)\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{(x+3)\sqrt{2}-\sqrt{3(x^2+5x+7)}}{\sqrt{x^2+3x+3}}\right| + C$.

5.5 Интегрирование тригонометрических функций

5.5.1 Интегрирование функций вида $R(\sin x, \cos x)$

Интегралы такого вида всегда интегрируются в элементарных функциях. Они сводятся, например, к рациональной функции от одного переменного при помощи универсальной замены (см. ниже). Однако надо помнить, что при вычеслении интегралов подобного типа, следует использовать тригонометрические формулы, которые могут существенно облегчить вычесление интеграла. Для простоты обозначений, введём обозначения $u = \sin x$, $v = \cos x$. Справедливы следующие утверждения:

Лемма 19.

- *Пусть рациональная функция обладает свойством $R(-u, v) = R(u, v)$ тогда её можно привести к виду $R(u, v) = R_1(u^2, v)$, т.е. к рациональной функции содержащей только чётные степени переменной u.*
- *Пусть рациональная функция обладает свойством $R(-u, v) = -R(u, v)$ тогда её можно привести к виду $R(u, v) = uR_2(u^2, v)$, где рациональная функция R_2 содержит только чётные степени u.*
- *Пусть рациональная функция обладает свойством $R(-u, -v) = R(u, v)$ тогда её можно привести к виду $R(u, v) = R_*(u/v, v^2)$.*

Доказательство. Первое утверждение, известно из алгебры. Второе свойство вытекает из первого, если его применить к функции $R(u, v)/u$. Поясним третье свойство. Поскольку справедливо

$$R(u, v) = R\left(\frac{u}{v}v, v\right) = R_3\left(\frac{u}{v}, v\right),$$

то тогда будет выполнено $R_3(u/v, -v) = R_3(u/v, v)$, а следовательно $R(u/v, v) = R_*(u/v, v^2)$. □

1 случай Если выполнено $R(-u, v) = -R(u, v)$. Тогда справедливо

$$R(\sin x, \cos x)\,dx = R_3(\sin^2 x, \cos x)\sin x\,dx = -R_3(1-\cos^2 x, \cos x)\,d\cos x.$$

Откуда вытекает, что рационализация достигается подстановкой $t = \cos x$.

2 случай Если выполнено $R(u, -v) = -R(u, v)$. Тогда справедливо

$$R(\sin x, \cos x)\,dx = R_4(\sin x, \cos^2 x)\cos x\,dx = R_4(\sin x, 1-\sin^2 x)\,d\sin x.$$

Откуда вытекает, что рационализация достигается подстановкой $t = \sin x$.

3 случай Если выполнено $R(-u, -v) = R(u, v)$. Тогда справедливо $R(u, v) = R_*(u/v, v^2)$, а поэтому

$$R(u, v) = R_*\left(\operatorname{tg} x, \cos^2 x\right) = R_*\left(\operatorname{tg} x, \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right) = R^*(\operatorname{tg} x).$$

Следовательно рационализация достигается подстановкой $t = \operatorname{tg} x$. Действительно,

$$R(\sin x, \cos x)\,dx = R^*(\operatorname{tg} x)\,dx = R^*(t)\,\frac{dt}{1+t^2}.$$

4 случай (универсальная подстановка) При помощи замены $t = \operatorname{tg}(x/2)$, $x \in (-\pi; \pi)$ можно всегда рационализировать исходный интеграл. Действительно,

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$
$$x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

Откуда

$$R(\sin x, \cos x)\,dx = R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

П р и м е р 5.5.1. Вычислить $\int dx/\sin x$.

Решение. Справедливо

$$\int\frac{dx}{\sin x} = \int\frac{dx}{2\sin(x/2)\cos(x/2)} = \int\frac{dx}{2\operatorname{tg}(x/2)\cos^2(x/2)} = \int\frac{d\operatorname{tg}(x/2)}{\operatorname{tg}(x/2)} = \ln|\operatorname{tg}(x/2)| + C.$$

□

Реккурентные соотношения

Введём обозначение

$$I_{\alpha,\beta} = \int \sin^\alpha x \cos^\beta x\, dx.$$

Теорема 5.5.1. *Справедливы равенства*

$$I_{\alpha,\beta} = -\frac{1}{\alpha+\beta}\sin^{\alpha-1} x \cdot \cos^{\beta+1} x + \frac{\alpha-1}{\alpha+\beta} \cdot I_{\alpha-2,\beta}, \quad (\alpha+\beta \neq 0); \tag{5.5.6}$$

$$I_{\alpha,\beta} = \frac{1}{\alpha+\beta}\sin^{\alpha+1} x \cdot \cos^{\beta-1} x + \frac{\beta-1}{\alpha+\beta} \cdot I_{\alpha,\beta-2}, \quad (\alpha+\beta \neq 0); \tag{5.5.7}$$

$$I_{\alpha,\beta} = \frac{1}{\alpha+1}\sin^{\alpha+1} x \cdot \cos^{\beta+1} x + \frac{\alpha+\beta+2}{\alpha+1} \cdot I_{\alpha+2,\beta}, \quad (\alpha \neq -1); \tag{5.5.8}$$

$$I_{\alpha,\beta} = -\frac{1}{\beta+1}\sin^{\alpha+1} x \cdot \cos^{\beta+1} x + \frac{\alpha+\beta+2}{\beta+1} \cdot I_{\alpha,\beta+2}, \quad (\beta \neq -1). \tag{5.5.9}$$

Доказательство. Докажем первое равенство. Для этого занесем под дифференциал косинус.

$$I_{\alpha,\beta} = -\frac{1}{\beta+1}\int \sin^{\alpha-1} x\, d\cos^{\beta+1} x = -\frac{1}{\beta+1}\sin^{\alpha-1} x \cdot \cos^{\beta+1} x + \frac{\alpha-1}{\beta+1}\int \sin^{\alpha-2} x \cdot \cos^{\beta+2} x\, dx.$$

Использую равенство $\sin^{\alpha-2} x \cdot \cos^{\beta+2} x = \sin^{\alpha-2} x \cdot (1-\sin^2 x) \cdot \cos^\beta x$, продолжим

$$I_{\alpha,\beta} = -\frac{1}{\beta+1}\sin^{\alpha-1} x \cdot \cos^{\beta+1} x + \frac{\alpha-1}{\beta+1} I_{\alpha-2,\beta} - \frac{\alpha-1}{\beta+1} I_{\alpha,\beta}.$$

Собирая выражение $I_{\alpha,\beta}$ в одной стороне, приходим к формуле (5.5.6).

Для доказательства второго равенства достаточно под диффренциал занести синус и проделать аналогичное рассуждение.

Если в уравнение (5.5.6) подставим вместо α везде $\alpha+2$, и выразим $I_{\alpha,\beta}$, то получим (5.5.8).

Если в уравнение (5.5.7) подставим вместо β везде $\beta+2$, и выразим $I_{\alpha,\beta}$, то получим (5.5.9).

□

П р и м е р 5.5.2. Вычислить $\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx$.

Решение. Приведём несколько решений:

1. Пользуюсь нечётностью по аргументу $\cos x$ функции $\sin^2 x \cos^3 x$ сделаем соответствующую замену.

$$\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx = \int \sin^2 x \cos^2 x\, d\sin x = \int \sin^2 x (1-\sin^2 x)\, d\sin x = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

2. Воспользуемся рекуррентным соотношением (5.5.6), а затем (5.5.7)

$$I_{2,3} = \int \sin^2 x \cos^3 x\, dx = -\frac{1}{5}\sin x \cdot \cos^4 x + \frac{1}{5}\int \cos^3 x\, dx = -\frac{1}{5}\sin x \cdot \cos^4 x + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\sin x \cdot \cos^2 x + \frac{2}{3} \cdot I_{0,1}\right) =$$
$$= -\frac{1}{5}\sin x \cdot \cos^4 x + \frac{1}{15}\sin x \cdot \cos^2 x + \frac{2}{15}\sin x + C.$$

3. Воспользуемся тригонометрическими равенствами:

$$\sin^2 x \cos^3 x = \frac{1}{4}\sin^2 2x \cdot \cos x = \frac{1}{8}(1-\cos 4x) \cdot \cos x = \frac{1}{8}\cos x - \frac{1}{16}(\cos 5x + \cos 3x).$$

Далее остается проинтегрировать:

$$\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx = \frac{\sin x}{8} - \frac{\sin 3x}{48} - \frac{\sin 5x}{80} + C.$$

□

П р и м е р 5.5.3. Вычислить $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^2 x}$.

Решение. Приведём несколько решений:

1. Воспользуемся рекуррентным соотношением (5.5.8), а затем (5.5.9)

$$I_{-3,-2}=\int\frac{dx}{\sin^3 x\cos^2 x}=-\frac{\sin^{-2}x\cdot\cos^{-1}x}{-1}+\frac{-3}{-1}\cdot I_{-3,0}=\sin^{-2}x\cdot\cos^{-1}x+3\left(\frac{\cos x}{-2\sin^2 x}+\frac{-1}{-2}\cdot I_{-1,0}\right)=$$
$$=\frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos x}-\frac{3}{2}\cdot\frac{\cos x}{\sin^2 x}+\frac{3}{2}\cdot\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

2. Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством:

$$I_{-3,-2}=\int\frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)\,dx}{\sin^3 x\cos^2 x}=\int\frac{dx}{\sin x\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\sin^3 x}=$$
$$=\int\frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)\,dx}{\sin x\cos^2 x}+\int\frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)\,dx}{\sin^3 x}=\int\frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x}+2\int\frac{dx}{\sin x}+\int\frac{\cos^2 x\,dx}{\sin^3 x}.$$

Обозначим последний интеграл за J и вычислим его, используя интегрирование по частям.

$$J=\int\frac{\cos x\,d\sin x}{\sin^3 x}=\frac{1}{-2}\int\cos x\,d\sin^{-2}x=$$
$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{\cos x}{\sin^2 x}-\int\frac{1}{\sin^2 x}\,d\cos x\right)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos x}{\sin^2 x}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin x}.$$

Теперь возвращаемся к вычислению исходного интеграла

$$I_{-3,-2}=\int\frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x}+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{\sin x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos x}{\sin^2 x}=\frac{1}{\cos x}+\frac{3}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos x}{\sin^2 x}+C.$$

3. Пользуюсь нечётностью по аргументу $\sin x$ функции $\sin^3 x\cos^2 x$ сделаем замену $t=\cos x$.

$$I_{-3,-2}=\int\frac{dx}{\sin^3 x\cos^2 x}=-\int\frac{d\cos x}{\sin^4 x\cos^2 x}=-\int\frac{dt}{(1-t^2)^2t^2}.$$

Далее получим разложение на простые рациональные дроби:

$$\frac{1}{(1-t^2)^2t^2}=\frac{(1-t^2)+t^2}{(1-t^2)^2t^2}=\frac{1}{(1-t^2)t^2}+\frac{1}{(1-t^2)^2}=$$
$$=\frac{(1-t^2)+t^2}{(1-t^2)t^2}+\frac{(1-t^2)+t^2}{(1-t^2)^2}=\frac{1}{t^2}+\frac{2}{1-t^2}+\frac{t^2}{(1-t^2)^2}.$$

Последнее слагаемое все ещё не является простейшей рациональной дробью, но вместо того, чтобы искать это разложение последнее слагаемое мы проинтегрируем использую метод интегрирования по частям.

$$\int\frac{t^2\,dt}{(1-t^2)^2}=-\frac{1}{2}\int\frac{t\,d(1-t^2)}{(1-t^2)^2}=\frac{1}{2}\int t\,d(1-t^2)^{-1}=\frac{t}{2(1-t^2)}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1-t^2}.$$

Выписать окончательный ответ предоставляем читателю.

□

5.5.2 Некоторые тригонометрические интегралы и их упрощения

Теорема 5.5.2. *Пусть $a^2+b^2\neq 0$. Тогда справедливо*

$$\int\frac{a_1\sin^2 x+2b_1\sin x\cos x+c_1\cos^2 x}{a\sin x+b\cos x}\,dx=A\sin x+B\cos x+C\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x},$$

где

$$A=\frac{bc_1-a_1b+2ab_1}{a^2+b^2},$$
$$B=\frac{ac_1-aa_1-2bb_1}{a^2+b^2},$$
$$C=\frac{a_1b^2+a^2c_1-2abb_1}{a^2+b^2}.$$

Доказательство. Докажем, что существуют такие константы A, B, C, что справедливо представление

$$a_1\sin^2 x + 2b_1\sin x\cos x + c_1\cos^2 x = (A\cos x - B\sin x)(a\sin x + b\cos x) + C(\sin^2 x + \cos^2 x).$$

Действительно, расписав коэффициенты получаем

$$\begin{array}{r} \sin^2 x: \\ \sin x\cos x: \\ \cos^2 x: \end{array}\begin{cases} a_1 = -Ba + C, \\ 2b_1 = Aa - Bb, \\ c_1 = Ab + C. \end{cases}$$

Существование неизвестных переменных A, B, C легко вытекает из формул Крамера. Согласно которым:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -a & 1 \\ a & -b & 0 \\ b & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + b^2 \neq 0.$$

Из равенств

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & -a & 1 \\ 2b_1 & -b & 0 \\ c_1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = bc_1 - a_1 b + 2ab_1,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & a_1 & 1 \\ a & 2b_1 & 0 \\ b & c_1 & 1 \end{vmatrix} = ac_1 - aa_1 - 2bb_1,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & -a & a_1 \\ a & -b & 2b_1 \\ b & 0 & c_1 \end{vmatrix} = a_1 b^2 + a^2 c_1 - 2abb_1,$$

находим $A = \Delta_1/\Delta$, $B = \Delta_2/\Delta$, $C = \Delta_3/\Delta$. □

Теорема 5.5.3. *Пусть $b \neq 0$ (данное условие будет означать, что $\lambda_{1,2} \neq a, c$). Тогда справедливо*

$$\int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x}{a\sin^2 x + 2b\sin x\cos x + c\cos^2 x}\,dx = A\int \frac{du_1}{k_1 u_1^2 + \lambda_1} + B\int \frac{du_2}{k_2 u_2^2 + \lambda_2},$$

где λ_1, λ_2 корни уравнения $\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = 0.$

$$u_j = (a-\lambda_j)\sin x + b\cos x, \quad k_j = \frac{1}{a-\lambda_j}, \quad j = 1, 2.$$

$$A = -\frac{a_1(a-\lambda_2) + bb_1}{b(\lambda_1 - \lambda_2)},$$
$$B = \frac{bb_1 + a_1(a-\lambda_1)}{b(\lambda_1 - \lambda_2)}.$$

Доказательство. Докажем, что при $b \neq 0$ всегда существуют различные константы $\lambda_{1,2}$, $\lambda_{1,2} \neq a, c$. Действительно они удовлетворяют квадратному уравнению $\lambda^2 - \lambda(a+c) + (ac - b^2) = 0$, дискриминант которого равен:

$$D = (a+c)^2 - 4(ac - b^2) = (a-c)^2 + 4b^2 > 0.$$

Невозможность равенства $\lambda_{1,2} \neq a, c$ легко проверяется подстановкой вместо λ значений a либо c.

Справедливо:

$$\begin{aligned} &a\sin^2 x + 2b\sin x\cos x + c\cos^2 x = \\ =&(a-\lambda_j)\sin^2 x + 2b\sin x\cos x + (c-\lambda_j)\cos^2 x + \lambda_j = \\ =&k_j\left((a-\lambda_j)^2\sin^2 x + 2(a-\lambda_j)b\sin x\cos x + (a-\lambda_j)(c-\lambda_j)\cos^2 x\right) + \lambda_j. \end{aligned}$$

Преобразуем выражение в скобках

$$\begin{aligned} &(a-\lambda_j)^2\sin^2 x + 2(a-\lambda_j)b\sin x\cos x + (a-\lambda_j)(c-\lambda_j)\cos^2 x = \\ =&(a-\lambda_j)^2\sin^2 x + 2(a-\lambda_j)b\sin x\cos x + b^2\cos^2 x + \left((a-\lambda_j)(c-\lambda_j) - b^2\right)\cos^2 x = \\ =&u_j^2 + 0. \end{aligned}$$

Докажем, что существуют такие константы A, B что справедливо представление

$$a_1 \sin + b_1 \cos x = A((a-\lambda_1)\cos x - b\sin x) + B((a-\lambda_2)\cos x - b\sin x).$$

Действительно, расписав по коэффициентам получаем

$$\begin{matrix} \sin x: \\ \cos x: \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} a_1 = -b(A+B), \\ b_1 = A(a-\lambda_1) + B(a-\lambda_2). \end{array} \right.$$

Из равенств

$$\Delta = \begin{vmatrix} -b & -b \\ a-\lambda_1 & a-\lambda_2 \end{vmatrix} = -b(\lambda_1 - \lambda_2),$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & -b \\ b_1 & a-\lambda_2 \end{vmatrix} = a_1(a-\lambda_2) + bb_1,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -b & a_1 \\ a-\lambda_1 & b_1 \end{vmatrix} = -(bb_1 + a_1(a-\lambda_1)),$$

находим $A = \Delta_1/\Delta$, $B = \Delta_2/\Delta$. □

Контрольные вопросы.

1. Всегда ли можно свести интеграл от тригонометрической функции к рациональной функции?

Упражнения к 5.3

Упражнение 5.5.1. *Вычислить интеграл*

$$(a) \quad \int (\cos^6 x + \sin^6 x)\cos 11x\, dx; \qquad (b) \quad \int \cos^3 x \cdot \sin 13x\, dx;$$

Упражнение 5.5.2. *Вычислить интеграл*

$$(a) \quad \int \frac{\sin 2x\, dx}{\cos^4 x + \sin^4 x}; \qquad (b) \quad \int \frac{dx}{\sqrt[9]{\sin^{15} x \cos^3 x}}; \qquad (c) \quad \int \frac{dx}{\sqrt[11]{\sin^{17} x \cos^5 x}};$$

$$(d) \quad \int \frac{2\sin x + 3\cos x\, dx}{\sin^2 x \cos x + 9\cos^3 x}; \qquad (e) \quad \int \frac{dx}{\sin 2x + 4\cos 2x + 6\sin^2 x};$$

$$(f) \quad \int \frac{dx}{4\cos 2x - 2\sin 2x + 5\sin^2 x}.$$

Упражнение 5.5.3. *Вычислить*

$$(a) \quad \int \frac{\sin x + 3\cos x\, dx}{\sin^2 x + 4\sin x\cos x - 2\cos^2 x}\, dx; \qquad (b) \quad \int \frac{\sin x + 3\cos x\, dx}{2\sin^2 x + 3\sin x\cos x + 6\cos^2 x}\, dx;$$

Ответы: 5.5.1 (a) $\frac{1}{48}\sin^9 x + \frac{5}{88}\sin 11x + \frac{3}{208}\sin 13x + C$; (b) $-\frac{1}{80}\cos 10x - \frac{1}{32}\cos 12x - \frac{3}{112}\cos 14x - \frac{1}{128} + C$;

5.5.2 (a) $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}^2 x) + C$; (b) $-(3/2)\,\mathrm{tg}^{-2/3} x + C$; (c) $-(11/6)\,\mathrm{tg}^{-6/11} x + C$; (d) $\ln(\mathrm{tg}^2 x + 9) + \mathrm{arctg}(\frac{\mathrm{tg}\, x}{3}) + C$; (e) $\frac{2}{\sqrt{7}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\,\mathrm{tg}\, x + 1}{\sqrt{7}} + C$, $|x| < \pi/2$; (f) $1/(2 - \mathrm{tg}\, x) + C$.

5.5.3 (a) $\lambda_{1,2} = -3; 2$, $-\int \frac{du_1}{2-u_1^2} + \frac{1}{2}\int \frac{du_2}{(1/4)u_2^2 - 3} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-u_1}{\sqrt{2}+u_1}\right| + \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{2\sqrt{3}-u_1}{2\sqrt{3}+u_1}\right| + C$, $u_1 = 4\sin x + 2\cos x$, $u_2 = -\sin x + 2\cos x$; (b) $\lambda_{1,2} = 3/2; 13/2$, $-\frac{2}{3}\int \frac{du_2}{13/2 - (9/2)u_2^2} = -\frac{2}{9\sqrt{13}}\ln\left|\frac{\sqrt{13}+3u_2}{\sqrt{13}-3u_2}\right| + C$, $u_2 = -(9/2)\sin x + (3/2)\cos x$.

5.6 Определенный интеграл Римана

5.6.1 Задача о площади плоской фигуры.

Сначала сформулируем проблему, решение которой естественно связано с понятием определённого интеграла. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a, b]$.

Проблема. *Что такое площадь фигуры, ограниченной графиком этой функции, осью абсцисс и вертикальными прямыми* $x = a$, $x = b$ *и как её вычислять?*

Начнём с определения площади. Первичным понятием для нас будет известное из школьного курса понятие площади многоугольника. Мы считаем известным свойство *аддитивности* площади многоугольников: площадь объединения непересекающихся многоугольников равна сумме площадей этих многоугольников. Кроме того, площадь неотрицательна. Для произвольной ограниченной фигуры G на плоскости рассмотрим множества многоугольников $\{p, p \subset G\}$ и $\{P, P \supset G\}$. Множество площадей $\{S(P)\}$ многоугольников из первого множества является ограниченным сверху (например, любой площадью $S(P), P \supset G$. Поэтому существует точная верхняя грань этого множества, называемая *нижней площадью* G и обозначаемая $S_*(G)$. Аналогично, множество площадей $\{S(P)\}$ многоугольников $P \supset G$ ограничено снизу (например, любым числом $S(p), p \subset G$. Поэтому существует точная нижняя грань этого множества, называемая *верхней площадью* G и обозначаемая $S^*(G)$.

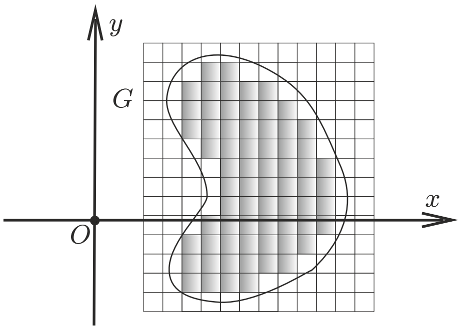


Рис. 5.1: $p \subset G$

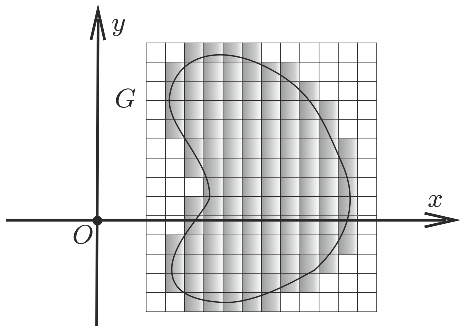


Рис. 5.2: $P \supset G$

Определение 5.6.1. Фигура G называется *квадрируемой* (синонимы: имеющей площадь, имеющей жорданову площадь), если $S^*(G) = S_*(G)$. При этом её *площадь* $S(G)$ равна: $S(G) = S^*(G) = S_*(G)$.

Вернёмся к нашей проблеме. Фигура, рассматриваемая в ней, называется *криволинейной трапецией*. Нам потребуется ряд определений.

Определение 5.6.2. Совокупность точек $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ называется *разбиением* отрезка $[a, b]$.

Разбиение отрезка обозначаем буквой P.

Определение 5.6.3. Обозначим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, k = 1, \dots n$. Наибольшее из этих чисел называем *диаметром разбиения* и обозначаем $\lambda(P)$, т.е. $\lambda(P) = \max_{k=1,\dots,n} |\Delta x_k|$.

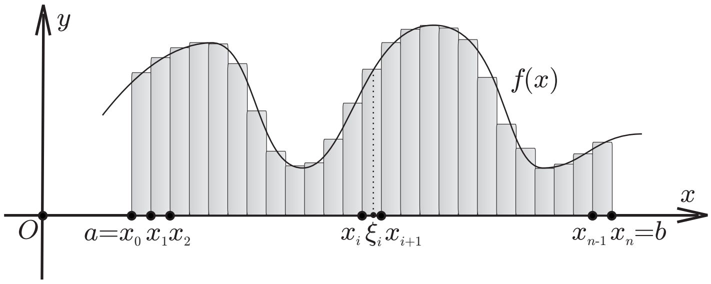


Рис. 5.3: Интегральная сумма

Определение 5.6.4. Выберем на каждом из отрезков разбиения P точку $\xi_{k-1} \in [x_{k-1}, x_k], k = 1, \dots, n$. При этом получим *разбиение отрезка с отмеченными точками.* Будем обозначать (P, ξ), где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$.

Рассмотрим теперь функцию $y = f(x)$, определённую на отрезке $[a, b]$.

Определение 5.6.5. Величина $\sigma = \sigma(f, (P, \xi)) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ называется *интегральной суммой* функции $y = f(x)$, соответствующей разбиению P отрезка $[a, b]$ с выбранными точками ξ_k.

Определение 5.6.6. Введём базу $\mathcal{B}$. Элементом базы $\mathcal{B}_d$, $d > 0$, назовём совокупность всех разбиений $P = (P, \xi)$ с отмеченными точками так, что $\lambda(P) < d$.

Определение 5.6.7. Число $I \in \mathbb{R}$ обладающее тем свойством, что $I = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f, (P, \xi))$ называется *интегралом функции* $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$, и обозначается

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Предел $\lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f, (P, \xi))$ мы понимает в том смысле, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta_\epsilon > 0$, что для любого разбиения P отрезка $[a, b]$ с выбранными точками ξ, удовлетворяющего условию $\lambda(P) < \delta$, выполняется неравенство $|\sigma(f, (P, \xi)) - I| < \epsilon$, независимо от выбора отмеченных точек ξ.

Если для функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ существует интеграл, то функция называется *интегрируемой* на этом отрезке (по Риману). Замечание в скобках означает, что бывают различные определения интеграла. С ними можно познакомиться, например, в книге [?]. Класс интегрируемых по Риману функций на отрезке $[a, b]$ будем обозначать $\mathbb{R}[a, b]$.

Замечание 43. В обозначении интеграла использована буква x, называемая переменной интегрирования. Вместо этой буквы можно использовать любой другой символ, например, написать $\int_a^b f(®)\,d®$ или $\int_a^b f(*)\,d*$. От этого интеграл не изменится.

П р и м е р 5.6.1. Рассмотрим функцию $f(x) \equiv C \equiv Const$. Тогда для любого значения ξ_k выполнено $f(\xi_k) = C$, следовательно

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} C \cdot \Delta x_k = C \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_k = C \cdot (b - a).$$

Откуда $\int_a^b C\,dx = C \cdot (b - a)$.

Определение 5.6.8. Определим $\int_a^b f(x)\,dx$ в случае $b < a$ равенством

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Отметим, что это вполне естественное определение. В интегральной сумме, в случае $b < a$, все $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, k = 1, \dots n$ просто сменят знак на противоположный. Кроме того, естественно считать, что $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

Теорема 5.6.1 (Критерий Коши). *Функция $f \in \mathcal{R}[a, b]$ тогда и только тогда, когда*
$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta_\epsilon > 0 \quad \forall (P', \xi'),\ (P'', \xi'') : \quad \lambda(P') < \delta,\ \lambda(P'') < \delta\ |\sigma(f, (P', \xi')) - \sigma(f, (P'', \xi''))| < \epsilon.$

Доказательство. Достаточно просто переписать критерий Коши существования предела функции $\sigma(f, (P, \xi))$ по базе $\mathcal{B}$. □

Теорема 5.6.2 (Необходимое условие интегрируемости).

$$f \in \mathcal{R}[a, b] \Rightarrow f \text{ - ограничена на } [a, b]$$

Доказательство. Предположим, что $f \in \mathcal{R}[a, b]$, но f не ограничена на $[a, b]$. Запишем отрицание условия того, что функция не интегрируема, используя критерий Коши

$$\exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 : \exists (P', \xi'),\ (P'', \xi'') :\ \lambda(P') < \delta,\ \lambda(P'') < \delta \Longrightarrow |\sigma(f, (P', \xi')) - \sigma(f, (P'', \xi''))| > \epsilon.$$

Пусть $\epsilon = 1$, зафиксируем произвольное $\delta > 0$, выберем разбиение (P', ξ') так, что $\lambda(P') < \delta$, а разбиение ξ' — произвольное. В силу неограниченности функции f на отрезке $[a, b]$ найдётся отрезок разбиения $[x_{k-1}, x_k]$ на котором функция $f(x)$ неограничена. Следовательно найдётся ξ_k^* такая, что $|f(\xi_k^*)|$ - сколь угодно большое значение. Например, справедливо

$$|f(\xi_k^*)| \geqslant \frac{10}{x_k - x_{k-1}} + |f(\xi_k')|.$$

Определим (P'', ξ''). Разбиение оставим то же самое, отмеченные точки ξ'' выберем так же, как и ранее, кроме k-ой: $\xi'' = (\xi_1', \dots, \xi_{k-1}', \xi_k^*, \xi_{k+1}', \dots, \xi_n')$.

$$|\sigma(f, (P', \xi')) - \sigma(f, (P'', \xi''))| = |(f(\xi_k') - f(\xi_k^*))(x_k - x_{k-1})| \geqslant (|f(\xi_k^*)| - |f(\xi_k')|)|\Delta x_k| \geqslant 10 \geqslant 1.$$

Таким образом мы доказали, что функция $f \notin \mathcal{R}[a, b]$. □

П р и м е р 5.6.2. Рассмотрим функцию Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ - рациональное,} \\ 0, & x \text{ - иррациональное.} \end{cases}$$

Покажем, что данная функция является ограниченной, но не интегрируемой по Риману на любом отрезке $[a, b]$ действительной прямой. Т.е. $D(x) \notin \mathcal{R}[a, b]$.

Действительно, выберем отмеченные точки разбиения ξ' рациональными, а затем ξ'' иррациональными. Тогда получим

$$|\sigma(f, (P, \xi')) - \sigma(f, (P, \xi''))| = b - a > 0$$

Таким образом, ограниченность не является достаточным условием.

Теорема 5.6.3 (Достаточное условие интегрируемости)**.**

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{k=1}^{n} \omega(f, \Delta x_k)|\Delta x_k| = 0 \Rightarrow f \in \mathcal{R}[a, b]$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Поскольку $\lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{k=1}^{n} \omega(f, \Delta x_k)|\Delta x_k| = 0$, то существует такое $\delta = \delta_\varepsilon > 0$, что для любого разбиения P отрезка $[a; b]$: $\lambda(P) < \delta$ выполнено

$$\sum_{k=1}^{n} \omega(f, \Delta x_k)|\Delta x_k| < \epsilon/2.$$

Рассмотрим произвольное разбиение (P, ξ) с отмеченными точками, $(\tilde{P}, \tilde{\xi})$ — продолжение данного разбиения.

$$|\sigma(f, (P, \xi)) - \sigma(f, (\tilde{P}, \tilde{\xi}))| = |\sum_{l=1}^{n} f(\xi_l)|\Delta x_l| - \sum_{l=1}^{n}(\sum_{j=1}^{k_l} f(\tilde{\xi}_{l_j})|\Delta x_{l_j}|)| =$$

$$= |\sum_{l=1}^{n}(\sum_{j=1}^{k_l}(f(\xi_l) - f(\tilde{\xi}_{l_j})))|\Delta x_{l_j}|| \leqslant \sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_l} |f(\xi_l) - f(\tilde{\xi}_{l_j})||\Delta x_{l_j}| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l=1}^{n} \omega(f, \Delta x_l) \sum_{j=1}^{k_l} |\Delta x_{l_j}| = \sum_{l=1}^{n} \omega(f, \Delta x_l)|\Delta x_l| < \frac{\epsilon}{2}$$

Рассмотрим произвольное разбиение (P', ξ') и (P'', ξ'') такие, что $\lambda(P') < \delta_\epsilon$, $\lambda(P'') < \delta_\epsilon$. Построим продолжение обоих разбиений $\tilde{P} = P' \cup P''$ (включением всех точек разбиений P', P'' в разбиение $\tilde{P}$). Тогда $\lambda(\tilde{P}) < \delta_\epsilon$, $\tilde{\xi}$ — любые отмеченные точки из $\tilde{P}$. Тогда справедливо

$$|\sigma(f, (P', \xi')) - \sigma(f, (\tilde{P}, \tilde{\xi}))| < \frac{\epsilon}{2},$$

$$|\sigma(f, (P'', \xi'')) - \sigma(f, (\tilde{P}, \tilde{\xi}))| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Откуда

$$|\sigma(f, (P', \xi')) - \sigma(f, (P'', \xi''))| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

□

Следствие 5.6.1. Пусть $f \in C[a, b]$. Тогда $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

Доказательство. Из теоремы 5.6.3 вытекает, что из условия

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta_\epsilon > 0 : \forall (P, \xi) : \lambda(P) < \delta \quad \sum_{k=1}^{n} \omega(f, \Delta x_k)|\Delta x_k| < \epsilon$$

вытекает интегрируемость. Проверим справедливость данного условия. Если $f \in C[a, b]$, то по теореме Кантора функция $f(x)$ равномерно непрерывна на $[a, b]$. Следовательно, для произвольного положительного $\epsilon > 0$, $\exists \delta_\epsilon > 0$ такое, что $\omega(f, \Delta x_k) < \frac{\epsilon}{b-a}$ для любого $|\Delta x_k| < \delta_\epsilon$, где $\Delta x_k \subseteq [a; b]$. Откуда

$$\sum_{k=1}^{n} \omega(f, \Delta x_k)|\Delta x_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{\epsilon}{b-a}|\Delta x_k| = \epsilon$$

□

Следствие 5.6.2. Пусть $f(x)$ — монотонная на $[a,b]$. Тогда $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

Доказательство. Если функция $f(x)$ — монотонная на $[a,b]$, то она ограничена $|f(x)| \leqslant \max\{|f(a)|, 1, |f(b)|\} = C$. Положим $\delta_\epsilon = \frac{\epsilon}{2C}$. Тогда для любого разбиения с отмеченными точками (P,ξ) такого, что $\lambda(P) < \delta$ справедливо

$$\sum_{k=1}^{n} \omega(f, \Delta x_k)|\Delta x_k| = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})||\Delta x_k| \leqslant$$
$$\leqslant \delta |\sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1}))| = \delta |f(b) - f(a)| \leqslant 2C\delta \leqslant \epsilon.$$

□

П р и м е р 5.6.3. Выясните, будет ли функции, определённые на всей числовой прямой, интегрируемы на соответствующем отрезке

$f(x) = [x]$, где $[x]$ — целая часть числа интегрируема на отрезке $[-2;4]$?

$$g(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$ интегрируема на отрезке $[0;1]$?

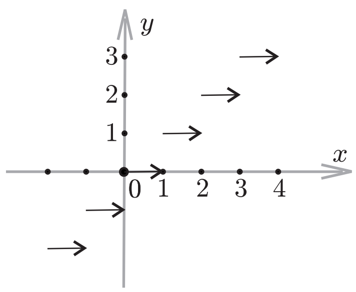


Рис. 5.4: График функции $[x]$

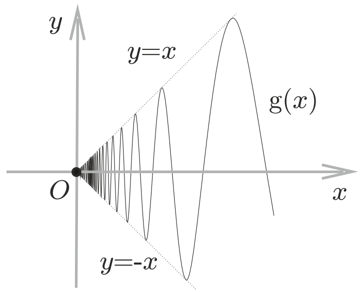


Рис. 5.5: График функции $x \sin(1/x)$

- Из следствия 5.6.2 вытекает, что любая монотонная функция на отрезке $[a,b]$ является на нём интегрируемой. Поскольку функция $f(x) = [x]$ — монотонна (функция является монотонно не убывающей и при этом имеет точки разрыва первого рода в точках -1, 0, 1, 2, 3, 4), то она интегрируема на $[-2;4]$. Заметим, что при этом функция $f(x)$ не является непрерывной на $[-2;4]$.
- Функция $g(x)$ является непрерывной на отрезке $[0;1]$ (докажите это!), а следовательно интегрируемой на нём, но при этом данная функция не является монотонной ни в одной окрестности вида $[0,\delta]$.

Этот пример показывает, что два следствия 5.6.1 и 5.6.2 формально между собой не связаны.

Лемма 20. *Пусть K — компакт (например, $K = [a,b]$).*

$$\forall x \in K : \omega(f,x) \leqslant \omega_0 \Rightarrow \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta_\epsilon > 0 \quad \forall x \in K : \omega(f, \mathbb{U}_\delta(x)) \leqslant \omega_0 + \epsilon$$

Доказательство. Если $\omega_0 = 0$ - теорема Кантора. Если $\omega_0 > 0$, то доказательство повторяет доказательство теоремы Кантора. □

Определение 5.6.9 (Множество Лебеговой меры „0"). Множество $A \subset R^1$, назовём множеством Лебеговой меры нуль и будем писать $\mu(A) = 0$, если для любого $\epsilon > 0$ существует не более чем счётный набор $\{I_k\}_{k=1}^{+\infty}$ (набор может быть и конечным), где I_k — открытые интервалы, такой ,что

$$a) A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} I_k \qquad b) \sum_{k=1}^{+\infty} |I_k| \leqslant \epsilon.$$

П р и м е р 5.6.4. Рассмотрим множество состоящее из конечного набора точек, т.е. положим $A = \{x_k\}_{k=1}^{n}$. Тогда если взять интервалы I_k такие, что $x_k \in I_k$ и при этом длина каждого интервала была бы равна $\frac{\epsilon}{2n}$, т.е. $\mu(I_k) = \frac{\epsilon}{n}$. Тогда сумма длин всех интервалов I_k для $k = 1, \ldots, n$ будет равна $\varepsilon/2$ (см. рис. 5.6). Нами доказано, что A — множество меры нуль и $\mu(A) = 0$.

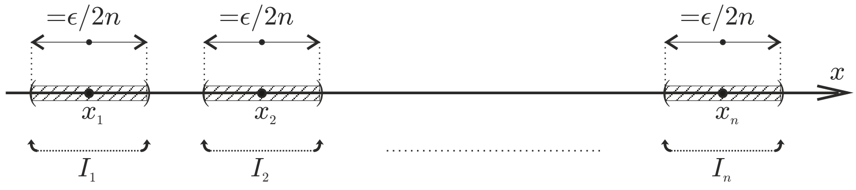


Рис. 5.6:

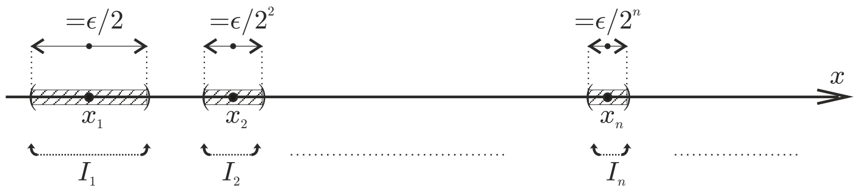


Рис. 5.7:

П р и м е р 5.6.5. Рассмотрим множество состоящее из счётного набора точек, т.е. положим $B = \{x_k\}_{k=1}^{+\infty} \subseteq \mathbb{R}$. Тогда если взять интервалы I_k такие, что $x_k \in I_k$ и при этом длина каждого интервала была бы равна $\frac{\epsilon}{2^k}$, т.е. $\mu(I_k) = \frac{\epsilon}{2^k}$, $k = 1, 2, \ldots$ (см. рис. 5.7). Тогда

- По построению интервалов I_k будет выполнено, что $B \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} I_k$.
- Сумма длин всех интервалов I_k для $k = 1, 2, \ldots$ будет равна

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |I_k| = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\epsilon}{2^k} = \epsilon.$$

Нами доказано, что B — множество меры нуль и $\mu(B) = 0$.

П р и м е р 5.6.6. Рассмотрим множество $C \subset [0, 1]$ в разложении которого в троичной записи не содержится цифр 1. Как нам известно, множество C — не является счетным. Покажем, что тем не менее, данное множество имеет нулевую меру Лебега.

$$\mu(C) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{9} - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \cdots = 1 - \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \ldots\right) = 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1 - \frac{2}{3}}\right) = 0.$$

Определение 5.6.10. f - непрерывна почти всюду на A, если $f \in C(A \setminus B)$, где $\mu(B) = 0$

Следствие 5.6.3. Пусть функция $f(x)$ — непрерывна почти всюду на $[a, b]$ и ограничена на этом отрезке. Тогда $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

Доказательство. Из ограниченности функции на отрезке $[a, b]$ вытекает $\omega(f, [a, b]) = \sup_{x_1, x_2 \in [a;b]} |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant C$. Зафиксируем произвольное $\epsilon > 0$. Положим

$$E_\epsilon = \left\{x \in [a, b] : \omega(f, x) \geqslant \frac{\epsilon}{4(b-a)}\right\}.$$

Множество E_ϵ — замкнутое множество в $[a, b]$. Следовательно компакт. Поскольку E_ϵ — подмножество точек разрыва, то $\mu(E_\epsilon) = 0$. Следовательно существуют интервалы (открытые множества) $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ такие, что $E_\epsilon \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ и $\sum_{k=1}^{+\infty} |I_k| < \frac{\epsilon}{6C}$. По критерию компактности выделим конечное покрытие $I_1, \ldots, I_n$ множества E_ϵ, т.е. $E_\epsilon \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} I_k$.

$$\text{Итог: } E_\epsilon \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} I_k, \quad \sum_{k=1}^{n} |I_k| \leqslant \frac{\epsilon}{6C}.$$

Положим $I = \sum_{k=1}^{n} I_k$. Тогда $K = [a, b] \setminus I$ — компакт. Следовательно $\forall x \in K : \omega(f, x) < \frac{\epsilon}{4(b-a)}$ по лемме 20 существует $\delta_1 > 0$, что $\forall x \in K \quad \omega(f, \mathbb{U}_{\delta_1}(x)) \leqslant \frac{\epsilon}{2(b-a)}$. Положим $\delta_2 = \frac{1}{2} \min\limits_{k=1,\ldots,n} \{|I_k|\}$, $\delta = \delta_\epsilon = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Оценим следующую сумму:

$$\sum_{k=1}^{n} \omega(f, \Delta x_k)|\Delta x_k| = \sum_{k:\Delta x_k \cap I = \emptyset} + \sum_{k:\Delta x_k \cap I \neq \emptyset}.$$

Пусть P произвольное разбиение отрезка $[a;b]$ с $\lambda(P) < \delta$. Тогда

$$\sum_{k:\Delta x_k \cap I = \emptyset} \leqslant \frac{\epsilon}{2(b-a)} \sum_{k:\Delta x_k \cap I = \emptyset} |\Delta x_k| \leqslant \frac{\epsilon}{2(b-a)} \sum_{k=1}^{n} |\Delta x_k| = \frac{\epsilon}{2}.$$

Если $\Delta x_k \cap I_l \neq \emptyset$, то из так выбранных δ_2 и δ вытекает, что гомотетичное раздутие множества I_l в три раза с центром в середине I_l будет полностью содержать отрезок Δx_k (см. рисунок 5.8). Поэтому

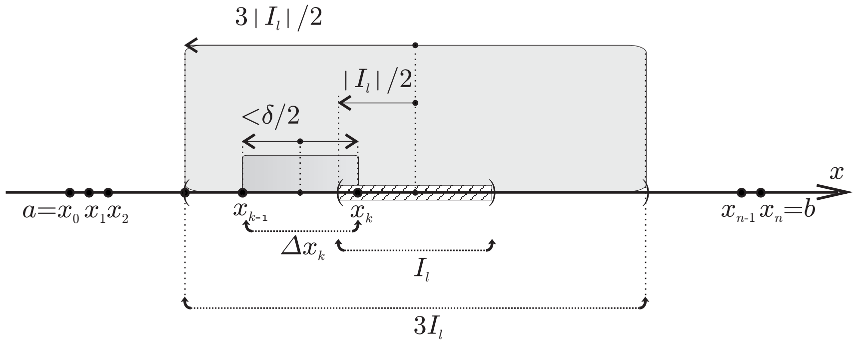


Рис. 5.8:

$$\sum_{k:\Delta x_k \cap I \neq \emptyset} \leqslant C \cdot \sum_{k:\Delta x_k \cap I \neq \emptyset} \leqslant C \cdot \sum_{k=1}^{n} 3|I_k| = 3C \cdot \frac{\epsilon}{6C} = \frac{\epsilon}{2}.$$

Для произвольного $\epsilon > 0$ мы предъявили $\delta_\epsilon = \delta > 0$ такое, что $\forall (P,\xi) \lambda(P) < \delta$ выполнено

$$|\sum_{k=1}^{n} \omega(f, \Delta x_k)|\Delta x_k|| < \epsilon.$$

$\square$

5.7 Суммы Дарбу

Определение 5.7.1 (Суммы Дарбу)**.** Определим верхнюю $S(f,P)$ и нижнюю $s(f,P)$ сумму Дарбу, при помощи равенств

$$S(f,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k, \quad M_k = \sup_{x \in \Delta x_k} f(x),$$
$$s(f,P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k, \quad m_k = \inf_{x \in \Delta x_k} f(x).$$

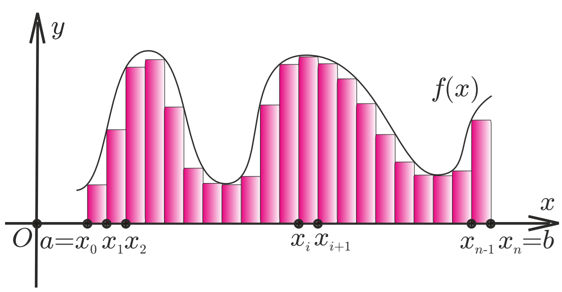


Рис. 5.9: Нижняя сумма Дарбу

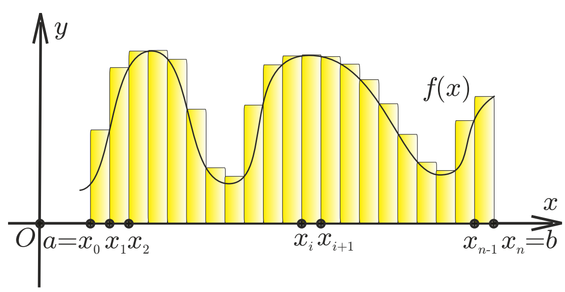


Рис. 5.10: Верхняя сумма Дарбу

Из определения легко вытекают неравенства:

$$s(f,P) \leqslant \sigma(f,(P,\xi)) \leqslant S(f,P)$$

Л е м м а

$$s(f,P) = \inf_{\xi} \sigma(f,(P,\xi))$$

$$S(f,P) = \sup_{\xi} \sigma(f,(P,\xi))$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\epsilon > 0$. Из определение точной верхней грани на k-том отрезке выполняется, что существует $\xi_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$ такая, что $f(\xi_k^*) \geqslant M_k - \frac{\epsilon}{b-a}$. Откуда

$$S(f,P) \geqslant \sigma(f,(P,\xi^*)) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k^*)\Delta x_k \geqslant \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k - \epsilon = S(f,P) - \epsilon.$$

Аналогично

$$s(f,P) \leqslant \sigma(f,(P,\xi^{**})) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k^{**})\Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k + \epsilon = s(f,P) + \epsilon.$$

□

Определение 5.7.2. Введём понятие нижнего ($\underline{I}$) и верхнего ($\overline{I}$) интеграла Дарбу:

$$\underline{I} = \lim_{\lambda(P)\to 0} s(f,P),$$

$$\overline{I} = \lim_{\lambda(P)\to 0} S(f,P),$$

в случае существования и конечности пределов.

Теорема 5.7.1 (Критерий интегрируемости в терминах сумм Дарбу)**.** *Пусть функция $f(x)$ — вещественна и ограничена на $[a,b]$. Тогда справедливо*

$$f \in \mathcal{R}[a,b] \Leftrightarrow \overline{I} = \underline{I},$$

причём общее значение $I = \overline{I} = \underline{I}$ совпадает с $\int_a^b f(x)\,dx$.

Доказательство. ($\Rightarrow$). Зафиксируем произвольное $\epsilon > 0$. Тогда из предыдущей леммы вытекает

$$\begin{array}{cccc} -\epsilon + & \sigma(f,(P,\xi^{**})) & \leqslant s(f,P) \leqslant & \sigma(f,(P,\xi)) \\ \lambda(P)\to 0 & \downarrow & & \downarrow \\ & -\epsilon + I & & I \end{array}$$

Таким образом получаем $\overline{I} = \underline{I} = I$.

($\Leftarrow$) Докажем в обратную сторону.

$$\begin{array}{cccc} & s(f,P) & \leqslant \sigma(f,(P,\xi)) \leqslant & S(f,P) \\ \lambda(P)\to 0 & \downarrow & & \downarrow \\ & \underline{I} & & \overline{I} \end{array}$$

Но, поскольку $\overline{I} = \underline{I}$, то по теореме о зажатой последовательсти вытекает существовани интеграла и равенство $I = \overline{I} = \underline{I}$. □

П р и м е р 5.7.1. Рассмотрим функцию (см. рис. 5.7.1)

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^n, & x \in \left(\frac{1}{2^n}; \frac{1}{2^{n-1}}\right], \; n \in \mathbb{N}, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Легко проверить, функция $f(x)$ определена так, что площадь под каждой "ступенькой" равна единице, поэтому для данной функции справедливо равенство

$$\overline{I}_{[2^{-n};1]} = \underline{I}_{[2^{-n};1]} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^k.$$

Под обозначением $\overline{I}_{[2^{-n};1]}$ мы понимаем, что верхний интеграл Дарбу рассматривается на отрезке $[2^{-n};1]$. Также легко проверяется равенство $\overline{I}_{[0;1]} = \underline{I}_{[0;1]} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k = 3$, но при этом $f(x) \notin \mathcal{R}[a,b]$. Данный пример не противоречит теореме Дарбу, поскольку функция $f(x)$ не ограничена на отрезке $[0;1]$.

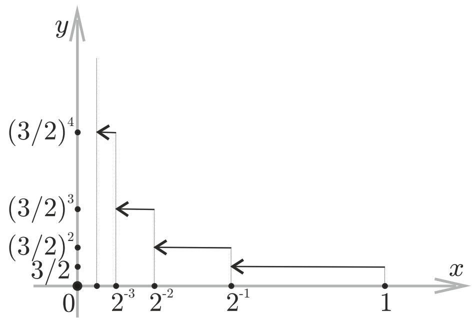


Рис. 5.11:

5.8 Критерий интегрируемости и критерий Лебега

Теорема 5.8.1 (Критерий интегрируемости). *Пусть функция $f(x)$ — определена и вещественна на отрезке $[a,b]$. Тогда*

$$f \in \mathcal{R}[a,b] \Longleftrightarrow \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{k=1}^{n} \omega(f,\Delta x_k)|\Delta x_k| = 0$$

Доказательство. ($\Leftarrow$) В одну сторону уже нами доказано.

($\Rightarrow$) Поскольку $\omega(f,\Delta x_k) = M_k - m_k$, то

$$\sum \omega(f,\Delta x_k)|\Delta x_k| = S(f,P) - s(f,p) \to 0 \quad \lambda(P)\to 0.$$

□

Теорема 5.8.2 (Критерий Лебега).

$$f \in \mathcal{R}([a,b]) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} f \text{ - } \textit{ограничена на } [a,b], \\ f \text{ - } \textit{непрерывна почти всюду на } [a,b]. \end{pmatrix}$$

Доказательство.

$$\Leftarrow \text{(было)}$$

$$\Rightarrow \text{(огр было)}$$

Предположим противное: множество точек разрыва E не является множеством меры 0. Положим

$$E_n = \left\{ x \in [a,b] : \omega(f,x) \geqslant \frac{1}{n} \right\}.$$

Тогда $E = \cup_{n=1}^{+\infty} E_n$ и существует натуральный номер N такой, что E_N — не является множеством меры 0, т.е. существует $\epsilon > 0$, что для любого покрытия $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ такого, что $E_N \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ выполнено $\sum_{k=1}^{+\infty} |I_k| > \epsilon$. Пусть P — произвольное разбиение отрезка $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Положим

$$A = \left\{ \Delta x_k : \Delta x_k \cap E_N \neq 0 \text{ либо } \omega(f,\Delta x_k) \geqslant \frac{1}{2N} \right\}.$$

Тогда справедливо $E_N \subseteq A$. Действительно, либо каждая точка E_N лежит внутри Δx_k, и тогда $\Delta x_k \in A$, либо на границе промежутков разбиения Δx_k, но тогда в силу неравентсва треугольника хотя бы на одном из промежутков колебание функции не менее $1/(2N)$, и данный промежуток войдёт в систему A. Определим

$$B = \{\text{все оставшиеся } \Delta x_k\}.$$

Построим два набора отмеченных точек $\xi^* = (\xi_1^*, \dots, \xi_n^*)$, $\xi^{**} = (\xi_1^{**}, \dots, \xi_n^{**})$:

$$\text{на } A \text{ выберем } \xi_k^*, \xi_k^{**} \in \Delta x_k : \text{ такие, что } |f(\xi_k^*) - f(\xi_k^{**})| > \frac{1}{3N},$$

$$\text{на } B \text{ выберем произвольные } \xi_k^* = \xi_k^{**} \in \Delta x_k.$$

Тогда справедливо:

$$|\sigma(f,(P,\xi^*)) - \sigma(f,(P,\xi^{**}))| \geqslant \sum_{K:\Delta x \text{ из } A} |f(\xi^*) - f(\xi^{**})|\Delta x_k \geqslant \frac{1}{3N} \cdot \sum_{K:\Delta x \text{ из } A} \Delta x_k > \frac{\epsilon}{3N}.$$

Откуда вытекает, что функция $f(x)$ не интегрируема на отрезке $[a;b]$, что противоречит условию. □

Следствие 5.8.1. Пространство $\mathcal{R}([a,b])$.
Если $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, то

1. $f + g \in \mathcal{R}[a,b]$.

2. $f \cdot g \in \mathcal{R}[a,b]$.

3. $\alpha f \in \mathcal{R}[a,b]$, для любой $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. $h \in C[c,d]$ и $E_{[c,d]}(h) \subseteq [a,b] \Rightarrow f \circ h \in \mathcal{R}[c,d]$.

П р и м е р ы 5.8.1. 1. Функция Дирихле $D(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q}, \\ 0, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$ — разрывна всюду. Следовательно, по критерию Лебега $D(x) \notin \mathcal{R}[0,1]$.

2. Функция Римана $R(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, \ x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, \ (m,n) = 1, \\ 0, \ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$ — непрерывна во всех иррациональных точках, а в рациональных разрывна и всюду ограничена. Следовательно, $R(x) \in \mathcal{R}[0,1]$.

3. Положим $f = \operatorname{sign} x$, $g = R(x)$. Тогда $f, g \in \mathcal{R}[0,1]$, но при этом $f \circ g \notin \mathcal{R}[0,1]$, так как $f \circ g = D(x)$. Следовательно композиция интегрируемых функций не обязана быть интегрируемой функцией.

5.9 Формула Ньютона-Лейбница

Лемма 21.

$$1) \ f \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow \Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt \in C[a,b].$$
$$2) \ f \in C[a,b] \Rightarrow \Phi(x) \in C^1[a,b], \Phi'(x) = f(x).$$

Доказательство. Данная лемма указывает на то, что при интегрировании гладкость функции увеличивается.
1. Докажем первое утверждение:

$$|\Phi(x+h) - \Phi(x)| = \left| \int\limits_a^{x+h} - \int\limits_a^{x} \right| = \left| \int\limits_x^{x+h} f(t)\,dt \right| \leqslant C \left| \int\limits_x^{x+h} dt \right| = C \cdot h, \quad h \to 0.$$

2. Докажем второе утверждение. Покажем сначала, что

$$\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = \frac{\int\limits_x^{x+h} f(t)dt}{h} = \frac{\int\limits_x^{x+h} f(x) + \alpha(x,h)dt}{h} = f(x) + \alpha(x,h),$$

где $\alpha(x,h) = o(1), h \to 0$. Из последнего равенства вытекает дифференцируемость функции $\Phi(x)$. Перейдём к пределу при $h \to 0$, чтобы получить равенство $\Phi'(x) = f(x)$. Но, поскольку $f \in C[a,b]$, то $\Phi(x) \in C^1[a,b]$.

□

Теорема 5.9.1 (Формула Ньютона-Лейбница)**.** *Пусть* $f \in C[a,b]$, *тогда*

$$\int\limits_a^b f(t)dt = \mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a),$$

где $\mathcal{F}$ *— произвольная первообразная для* $f(x)$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ тогда по даказанному выше, справедливо $\Phi \in C^1(a,b)$ и $\Phi'(x) = f(x)$. Откуда

$$\int\limits_a^b f(t)\,dt = \Phi(b) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Пусть $\mathcal{F}(x)$ — произвольная первообразная, тогда существует константа $C = Const$, такая, что $\mathcal{F} = \Phi(x) + C$. Следовательно $\mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a) = \Phi(b) - \Phi(a)$. □

5.9.1 Обобщение формулы Ньютона Лейбница. Лестница Кантора.

Определение 5.9.1. *Пространство $PC[a,b]$ кусочно непрерывных функций на отрезке $[a,b]$ функций.* Т.е. функций у которых могут иметь лишь конечное число точек разрыва, причём только лишь первого рода.

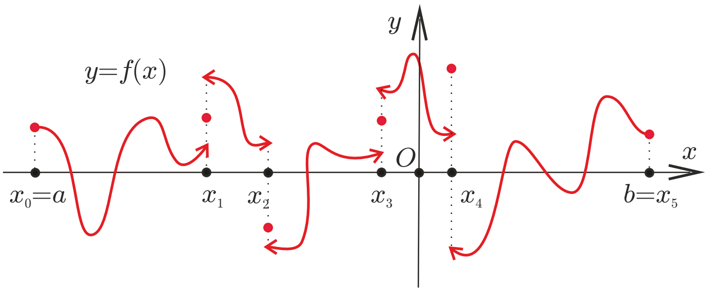


Рис. 5.12: Пример кусочно непрерывной функции.

Определение 5.9.2. *Пространство $PC^1[a,b]$ кусочно непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[a,b]$ функций.* Т.е. пространство непрерывных функций для каждой из которых найдётся конечное разбиение отрезка $[a,b]$: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ такое, что $f \in C^1[x_{k-1}, x_k]$ для всех $k = 1 \dots, n$.

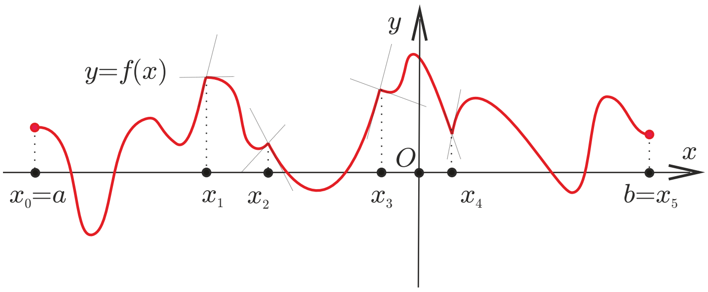


Рис. 5.13: Пример кусочно непрерывно дифференцируемой функции.

Теорема 5.9.2 (Обобщение формулы Ньютона-Лейбница)**.** *Для кусочно непрерывно дифференцируемой на $[a,b]$ функции F имеет место*

$$\int\limits_a^b F'(t)dt = F(b) - F(a).$$

Доказательство. Пусть $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, где $x_1, \dots, x_{n-1}$ — точки разрыва первого рода функции F'. Производная $F'(x)$ существует и непрерывна на каждом интервале (x_{k-1}, x_k), $k = 1, \dots, n$. Кроме того, существуют пределы $F'(x_{k-1}+0)$, $F'(x_k - 0)$, которые равны соответственно правой и левой производной от F в точках $x = x_{k-1}$ и $x = x_{k-1}$. Следовательно для любого $k = 1, \dots, n$ справедливо

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} F'(t)\,dt = F(x_k - 0) - F(x_{k-1} + 0).$$

Тогда из интегрируемости F' на каждом из отрезков $[x_{k-1}, x_k]$ следует ее интегрируемость на $[a,b]$ и равенство

$$\int\limits_a^b F'(t)\,dt = \sum_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} F'(t)\,dt = \sum_{k=1}^n F(x_k - 0) - F(x_{k-1} + 0) = F(b) - F(a).$$

$\square$

Замечание 44. Функция F' не определена в точках $x_1, \dots, x_{n-1} \in [a,b]$, но не смотря на это функция $F'(x)$ интегрируема на $[a,b]$.

Формула Ньютона-Лейбница является важной теоремой анализа, поскольку позволяет установить связь между неопределённым и определённым интегралом. Естественно возникает вопрос: возможно ли расширить равенство $\int\limits_a^b f(t)dt = \mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a)$ на класс всех интегрируемых на отрезке $[a, b]$ функций $f(x)$. В случае положительного ответа, мы могли бы вводить понятие определённого интеграла, используя неопределённый.

П р и м е р 5.9.1. Покажем, что равенство $\int\limits_a^b F'(t)dt = F(b)-F(a)$ невозможно для всех функций дифференцируемых почти всюду функций $F(x)$ таких, что $F'(x) \in \mathcal{R}[a, b]$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $C(x)$, равную $1/2$ на $[1/3; 2/3]$, $1/4$ на $[1/3^2; 2/3^2]$, $3/4$ на $[7/3^2; 8/3^2]$, $1/8$ на $[1/3^3; 2/3^3]$, $3/8$ на $[7/3^3; 8/3^3]$, $5/8$ на $[19/3^3; 20/3^3]$, $7/8$ на $[25/3^3; 26/3^3]$ и так далее. Т.е. мы полагаем

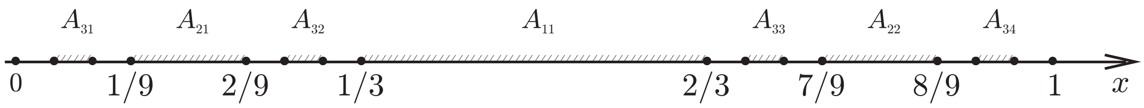


Рис. 5.14: Лестница Кантора

$$C(x) = \frac{2k-1}{2^n}, \quad x \in A_{n,k} \quad n, k \in \mathbb{N}, k = 0, 1, \ldots, 2^{n-1}.$$

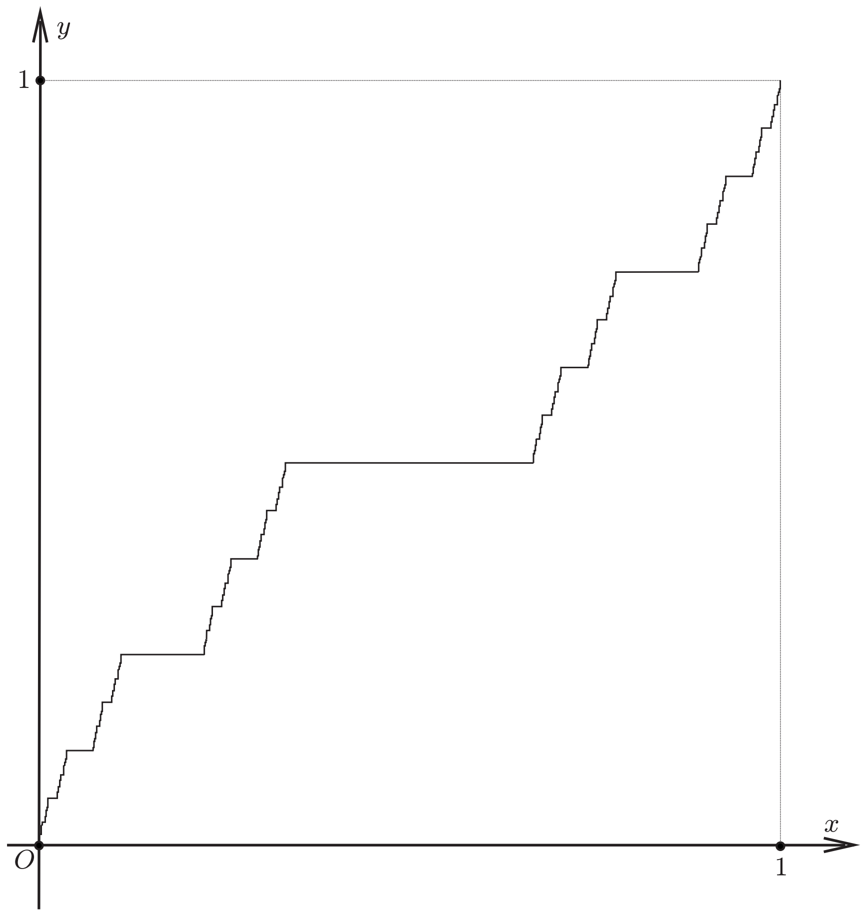


Рис. 5.15: Лестница Кантора

Функцию $C(x)$ можно доопределить на множестве $[0; 1]$ до непрерывности, т.к. $C(x)$ монотонно не убывает и множество её значений всюду плотно на отрезке $[0; 1]$.

Определение 5.9.3. Канторова лестница $K(x)$ — функция, полученная доопределением до непрерывности функции $C(x)$.

Функция $K(x)$ — монотонна и дифференцируема почти всюду, причём $K'(x) = 0$ почти всюду. Для справедливо $K(x)$

$$0 = \int_0^1 K'(t)dt \neq K(1) - K(0) = 1.$$

Замечание 45. Последнее равенство справедливо, если интеграл понимать как в смысле Лебега, так и в смысле Римана, поскольку на произвольном отрезке из существования интеграла по Риману вытекает существование интегралу по Лебегу и их равенство.

□

5.9.2 Формула Тейлора с остатком в интегральном виде.

Теорема 5.9.3 (Интегрирование по частям в определённом интеграле.). *Для $f, g \in C^1[a,b]$ справедливо*

$$\int_a^b f \cdot g'\, dx = fg|_a^b - \int_a^b f' g\, dx.$$

Доказательство. Справедливо равенство $(f \cdot g)' = f'g + fg'$. Проинтегрируем его на отрезке $[a, b]$ и воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница:

$$fg|_a^b = \int_a^b f' g dx + \int_a^b f g' dx.$$

□

Теорема 5.9.4 (Замена переменного в определённом интеграле.). *Пусть $\varphi \in C^1[\alpha, \beta]$, $f \in C[a, b]$, причём множество значений функции φ на отрезке $[\alpha, \beta]$ является отрезок $[a, b]$ и $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Тогда справедливо равенство*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt.$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на $[a, b]$. Тогда, по теореме о дифференцировании композиции функций, функция $\mathcal{F}(\varphi(t))$ является первообразной для функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. По формуле Ньютона—Лейбница

$$\int_a^b f(x)\, dx = \mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a) \quad \text{и} \quad \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt = \mathcal{F}(\varphi(\beta)) - \mathcal{F}(\varphi(\alpha)).$$

Но, по условию, $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$. □

Теорема 5.9.5 (ряд Тейлора с отатком в интегральном виде). *Пусть функция $f \in C^n(\vartheta(x_0))$. Для $x \in \vartheta(x_0)$ справедливо*

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k}{k!} + \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x - t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt.$$

Доказательство. Используя интегрирование по частям, последовательно получаем.

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x f'(t)\, dt = -\int_{x_0}^x f'(t) d(x - t) = f'(x_0)(x - x_0) + \int_{x_0}^x f''(t)(x - t)\, dt =$$

$$= f'(x_0)(x - x_0) - \int_{x_0}^x f''(t)\, d\left(\frac{(x-t)^2}{2}\right) = f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2} + \frac{1}{2!}\int_{x_0}^x f'''(t)(x - t)^2\, dt =$$

$$= \cdots = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k}{k!} + \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x - t)^{n-1} f^{(n)}(t)\, dt.$$

□

5.10 Квадратурные формулы

5.10.1 Оценки и асимптотические равенства некоторых квадратурных формул

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $a \leqslant b$. Положим

$$h = h_n(a,b) = \frac{b-a}{n}.$$

Теорема 5.10.1. *Пусть $f \in \mathrm{Var}[a;b]$. Положим*

$$\Delta_n(f) = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right)$$

Тогда справедливо

$$\Big|\Delta_n(f)\Big| \leqslant \frac{\mathrm{Var}_{[a;b]} f}{n}.$$

Доказательство. Вытекает из равенства

$$\Delta_n(f) = \sum_{k=1}^n \int_{a+(k-1)h}^{a+kh} \{f(x) - f(a+kh)\}\,dx.$$

□

Теорема 5.10.2. *Пусть $f \in C^1[a;b]$. Тогда справедливо*

$$\Delta_n(f) = \frac{b-a}{2n} \cdot (f(a) - f(b)) + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to +\infty.$$

Доказательство. Из равенства и оценки

$$\Delta_n(f) = \sum_{k=1}^n \int_{a+(k-1)h}^{a+kh} \{f(x) - f(a+kh)\}\,dx = \sum_{k=1}^n \int_{a+(k-1)h}^{a+kh} \left(\int_{a+kh}^{x} f'(t)\,dt\right)\,dx,$$

$$m'_k \cdot (x-a-kh) \leqslant \int_{a+kh}^{x} f'(\xi_k)\,dx \leqslant M'_k \cdot (x-a-kh),$$

вытекают неравенства

$$-\frac{h^2}{2}\sum_{k=1}^n m'_k \leqslant \Delta_n(f) \leqslant -\frac{h^2}{2}\sum_{k=1}^n M'_k.$$

Остаётся воспольспозоваться интегрируемостью производной и равенством верхнего и нижнего интеграла Дарбу, т.е.

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n m'_k \cdot h = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n M'_k \cdot h = \int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

□

Оказывается если писать квадратурную формулу выбирая точки ξ_k в серединах отрезков $[(k-1)h; kh]$, мы получаем асимптотическую погрешность на порядок, относительно h меньше. Введём обозначение

$$\Delta_n^*(f) = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f\left(a + (2k-1) \cdot \frac{b-a}{2n}\right).$$

Теорема 5.10.3. *Пусть $f \in C^2[a;b]$. Тогда справедливо*

$$\Delta_n^*(f) = \frac{(b-a)^2}{24n^2} \cdot (f'(b) - f'(a)) + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \to +\infty.$$

Доказательство. Положим

$$\xi_k^* = a + (2k-1) \cdot \frac{b-a}{2n}.$$

Таким образом мы определили ξ_k^* как середины отрезков $[(k-1)h; kh]$. Напишем разложение в ряд Тейлора в точке ξ_k^* на отрезке $[(k-1)h; kh]$ с остатком в форме Лагранжа:

$$f(x) - f(\xi_k^*) = (x - \xi_k^*) f'(\xi_k^*) + \frac{(x-\xi_k^*)^2}{2} f''(c_k).$$

где c_k некая точка из интервала между точками x и ξ_k^*. Проинтегрировав данное равенство по отрезку $[(k-1)h; kh]$

$$\int_{a+(k-1)h}^{a+kh} \{f(x)-f(\xi_k^*)\}\,dx = \int_{a+(k-1)h}^{a+kh} (x-\xi_k^*)f'(\xi_k^*)\,dx + \int_{a+(k-1)h}^{a+kh} \frac{(x-\xi_k^*)^2}{2} f''(c_k)\,dx =$$
$$= \int_{a+(k-1)h}^{a+kh} \frac{(x-\xi_k^*)^2}{2} f''(c_k)\,dx = \frac{(x-\xi_k^*)^3}{6}\Big|_{a+(k-1)h}^{a+kh} f''(c_k) = \frac{2h^3}{2^3\cdot 6} f''(c_k) = \frac{h^3}{24} f''(c_k).$$

Остаётся лишь воспользоваться неравенствами

$$\frac{h^2}{24}\sum_{k=1}^n m_k'' h \leqslant \Delta_n^*(f) = \sum_{k=1}^n \int_{a+(k-1)h}^{a+kh} \{f(x)-f(\xi_k^*)\}\,dx \leqslant \frac{h^2}{24}\sum_{k=1}^n M_k'' h,$$

и интегрируемостью второй производной, точнее равенством верхнего и нижнего интеграла Дарбу:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n m_k''\cdot h = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n M_k''\cdot h = \int_a^b f''(x)\,dx = f'(b)-f'(a).$$

□

5.10.2 Формула Эйлера-Маклорена

Формула Эйлера-Маклорена в простейшем случае

Лемма 22. *Пусть $f\in C^1[0;1]$. Тогда*

$$\frac12\,(f(1)+f(0)) = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_0^1 f'(x)B_1(x)\,dx,$$

где $B_1(x) = x - 1/2$ — многочлен Бернулли.

Доказательство. Вытекает из интегрирования по частям

$$\int_0^1 B_1(x)\,df(x) = \frac12\,(f(1)+f(0)) - \int_0^1 f(x)\,dx.$$

□

Теорема 5.10.4. *Пусть $f\in C^1[n;N]$. Тогда*

$$\sum_{k=n}^N f(k) = \frac12 (f(n)+f(N)) + \int_n^N f(x)\,dx + \int_n^N f'(x)B_1(\{x\})\,dx,$$

где $B_1(x) = x - 1/2$ — многочлен Бернулли.

Доказательство. Воспользуемся предыдущей леммой на отрезке $[0;1]$ к функции $f(x+k)$:

$$\frac12\,(f(k)+f(k+1)) = \int_0^1 f(x+k)\,dx + \int_0^1 f'(x+k)B_1(x)\,dx =$$
$$= \int_k^{k+1} f(x)\,dx + \int_k^{k+1} f'(x)B_1(\{x\})\,dx.$$

Теперь сложим, полученные равенства для всех натуральных k от n до $N-1$. □

Упражнение 4. Использую предыдущую теорему докажите неравенства

1. Для $f\in C^1[n;N]$ справедливо

$$\Big|\sum_{k=n}^N f(k) - \int_n^{N+1} f(x)\,dx\Big| \leqslant \int_n^{N+1} |f'(x)|\,dx,$$

2. Для $\alpha>1$ справедливо

$$0\leqslant \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \leqslant \frac{1}{n^\alpha}.$$

3. Для $p>1$ справедливо

$$\sum_{k=1}^N k^p = \frac{N^{p+1}}{p+1} + O(N^p), \quad N\to+\infty.$$

Числа и полиномы Бернулли

Якоб Бернулли[1] нашел общую формулу для сумм степеней арифметической прогрессии. Точнее он открыл такую последовательность чисел B_0, B_1, B_2,…,B_n,… что при любом n многочлен

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_{n-k} x^k; \tag{5.10.10}$$

называемый *многочленом Бернулли* имеет разность

$$\Delta B_n(x) = nx^{n-1} \tag{5.10.11}$$

(здесь $\Delta B_n(x) = B_n(x+1) - B_n(x)$) и потому может служить для суммирования степеней натуральных чисел. А именно

$$1^p + 2^p + 3^p + \cdots + m^p = \frac{B_{p+1}(m+1) - B_{p+1}(1)}{p+1}. \tag{5.10.12}$$

Первые восемнадцать чисел Бернулли таковы:

$B_0 = 1,$	$B_1 = -\frac{1}{2},$	$B_2 = \frac{1}{6},$	$B_3 = 0,$	$B_4 = -\frac{1}{30},$	$B_5 = 0,$
$B_6 = \frac{1}{42},$	$B_7 = 0,$	$B_8 = -\frac{1}{30},$	$B_9 = 0,$	$B_{10} = \frac{5}{66},$	$B_{11} = 0,$
$B_{12} = -\frac{691}{2730},$	$B_{13} = 0,$	$B_{14} = \frac{7}{6},$	$B_{15} = 0,$	$B_{16} = -7\frac{47}{510},$	$B_{17} = 0.$

Равенство (5.10.11) определяет многочлены Бернулли с точностью до произвольной константы. Но производная многочлена Бернулли уже определяется этим равенством однозначно. Дифференцирование равенства (5.10.11) дает

$$\Delta B'_m(x) = m(m-1)x^{m-2} = \Delta m B_{m-1}(x).$$

Таким образом снять неопределенность для многочленов Бернулли можно при помощи равенства

$$B'_m(x) = mB_{m-1}(x).$$

Теперь m - е *число Бернулли* определим как значение соответствующего многочлена Бернулли в нуле $B_m = B_m(0)$.

Определение 5.10.1. Для натуральных $m \in \mathbb{Z}_+$ *полиномы Бернулли* определим, с точностью до констант, равенствами

$$B_m(x+1) - B_m(x) = mx^{m-1}, \tag{5.10.13}$$

а потом определим точно:

$$B_m(x) = \frac{B'_{m+1}(x)}{m+1}.$$

П р и м е р 5.10.1. Пусть $m = 1$. Тогда будем искать полином $B_1(x) = ax + b$ методом неопределённых коэффициентов.

$$B_1(x+1) - B_1(x) = 1 \iff (a(x+1)+b) - (ax+b) = 1 \iff a = 1. \tag{5.10.14}$$

Таким образом $B_1(x) = x + b$.

Пусть $m = 2$. Тогда будем искать полином $B_2(x) = ax^2 + bx + c$ методом неопределённых коэффициентов.

$$B_2(x+1) - B_2(x) = 2x \iff (a(x+1)^2 + b(x+1) + c) - (ax^2 + bx + c) = 2x \iff$$
$$\iff \begin{matrix} x: \\ 1: \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} 2a = 2, \\ a + b = 0. \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} a = 1, \\ b = -1. \end{array} \right.$$

Таким образом $B_2(x) = x^2 - x + c$.

[1] Якоб Бернулли (27 декабря 1654, Базель, — 16 августа 1705) швейцарский математик.

Пусть $m = 3$. Ищем полином $B_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ методом неопределённых коэффициентов.

$$B_3(x+1) - B_3(x) = 3x^2 \iff (a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d) - (ax^3 + bx^2 + cx + d) = 3x^2 \iff$$

$$\iff \begin{array}{r} x^2: \\ x: \\ 1: \end{array} \begin{cases} 3a = 3, \\ 3a + 2b = 0, \\ a + b + c = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1, \\ b = -3/2, \\ c = 1/2. \end{cases}$$

Таким образом $B_3(x) = x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x + d$.

Теперь, используя равенство получаем:

$$B_0(x) = \frac{B_1'(x)}{1} = 1,$$
$$B_1(x) = \frac{B_2'(x)}{2} = x - \frac{1}{2},$$
$$B_2(x) = \frac{B_3'(x)}{3} = x^2 - x + \frac{1}{6}.$$

Первые шесть многочленов Бернулли таковы:

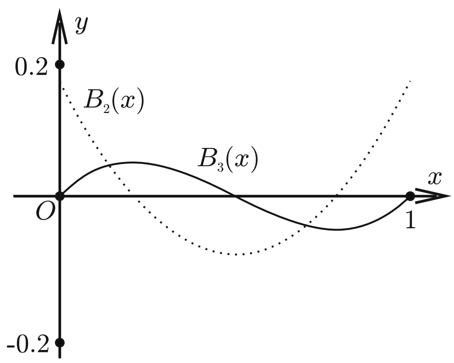


Рис. 5.16: Многочлены Бернулли $B_2(x)$, $B_3(x)$.

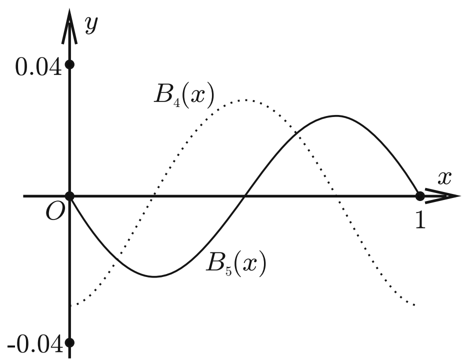


Рис. 5.17: Многочлены Бернулли $B_4(x)$, $B_5(x)$.

$$B_0(x) = 1,$$
$$B_1(x) = x - \frac{1}{2},$$
$$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6},$$
$$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x,$$
$$B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30},$$
$$B_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x,$$
$$B_6(x) = x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42}.$$

Примечание. 1. *Заметим, что можно выписать и явную формулу для многочленов Бернулли:*

$$B_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k (x+k)^n.$$

2. *Также одним из важных свойств многочленов Бернулли является то, что у них среднее на отрезке* $[0;1]$ *равно нулю:*

$$\int_0^1 B_n(x)\,dx = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Формула Эйлера-Маклорена

Лемма 23. *Для натурального m и для $f \in C^1[n;N]$ справедливо равенство*

$$\int_n^N f(x)B_m(\{x\})\,dx = \frac{B_{m+1}\cdot(f(N)-f(n))}{m+1} - \frac{1}{m+1}\int_n^N f'(x)B_{m+1}(\{x\})\,dx.$$

Доказательство. Вытекает из равенств

$$B_m(\{x\})\,dx = \frac{dB_{m+1}(\{x\})}{m+1},$$
$$B_{m+1}(\{k\}) = B_{m+1}(0) = B_{m+1}.$$

для любого натурального k и интегрирования по частям. □

Теорема 5.10.5. *Пусть $f \in C^m[n;N]$. Тогда*

$$\sum_{k=n}^{N} f(k) = \frac{1}{2}(f(n)+f(N)) + \int_n^N f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{m-1}\frac{B_{k+1}}{(k+1)!}\Big(f^{(k)}(N)-f^{(k)}(n)\Big) + \frac{(-1)^{m+1}}{m!}\int_n^N f^{(m)}(x)B_m(\{x\})\,dx,$$

где B_m — многочлен Бернулли.

Доказательство. Докажем по индукции. Для $m=1$ формула совпадает с доказанной в теореме 5.10.4. Предположим, что формула доказана для $m \in \mathbb{N}$. Докажем для $m+1$. По предыдущей лемме преобразуем остаток

$$\frac{(-1)^{m+1}}{m!}\int_n^N f^{(m)}(x)B_m(\{x\})\,dx =$$
$$\frac{(-1)^{m+1}B_{m+1}}{(m+1)!}\cdot(f^{(m)}(N)-f^{(m)}(n)) + \frac{(-1)^{m+2}}{(m+1)!}\int_n^N f^{(m+1)}(x)B_{m+1}(\{x\})\,dx.$$

Остается учесть, что нечётные числа Бернулли равны нулю, то $(-1)^{m+1}B_{m+1} = B_{m+1}$ для любого натурального m. □

5.10.3 Интерполяционный полином Лагранжа

Задача. На отрезке $[a;b]$ задана функция $f(x)$ и система точек $a \leqslant x_0 < x_1 \dots < x_n \leqslant b$. Требуется построить алгебраический полином $P(x) \in \mathcal{P}_n$, степени не выше чем n такой, что

$$f(x_k) = P(x_k), \quad k = 0,\dots,n. \tag{5.10.15}$$

Введём фундаментальные полиномы

$$l_{k,n}(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}, \quad k=0,\dots,n.$$

Данные полиномы обладают свойством:

$$l_{k,n}(x_s) = \delta_{k,s} = \begin{cases} 1, & k = s,\\ 0, & k \neq s.\end{cases}$$

Положим

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)l_{k,n}(x).$$

Тогда данный полином удовлетворяет равенствам (5.10.15).

Покажем, что справедливо равенство

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} P(x_k)l_{k,n}(x),$$

для любого $P \in \mathcal{P}_n$. Для произвольного $p \in \mathcal{P}_n$ положим $P(x) = \sum_{k=1}^{n} p(x_k)l_{k,n}(x)$. Тогда полином $Q(x) = P(x) - p(x)$ имеет ровно $n+1$ различных нулей $x_0 < \dots < x_n$, но такое может быть только если $Q(x) \equiv 0$, т.е. $P(x) - p(x) = 0$ или $P(x) = p(x)$.

Таким образом любой полином из $\mathcal{P}_n$ можно разложить по $l_{k,n}$, $k = 0,\dots,n$, т.е. фундаментальные полиномы $l_{k,n}(x)$, $k=0,\dots,n$ образуют базис в пространстве $\mathcal{P}_n$.

П р и м е р 5.10.2. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ на отрезке $[0;10]$. Пусть $n = 4$ а сетку выберем равномерную, т.е. $x_0 = 0$, $x_1 = 2.5$, $x_2 = 5$, $x_3 = 7.5$, $x_4 = 10$. Построим интерполяционный полином с $n = 4$, на отрезке $[0;10]$ с равномерной сеткой.

$$l_{0,4}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)} = \frac{(x-2.5)(x-5)(x-7.5)(x-10)}{1875/2};$$
$$l_{1,4}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} = \frac{x(x-5)(x-7.5)(x-10)}{1875/8};$$
$$l_{2,4}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} = \frac{x(x-2.5)(x-7.5)(x-10)}{625/4};$$
$$l_{3,4}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} = \frac{x(x-2.5)(x-5)(x-10)}{1875/8};$$
$$l_{4,4}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} = \frac{x(x-2.5)(x-5)(x-7.5)}{1875/2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} P_4(x) &= \sum_{k=0}^{4} f(x_k) l_{k,4}(x) = \\ &= \frac{2}{1875}\Big((x-2.5)(x-5)(x-7.5)(x-10) + 4f(2.5)x(x-5)(x-7.5)(x-10) + \\ &\quad + 6f(5)x(x-2.5)(x-7.5)(x-10) + 4f(7.5)x(x-2.5)(x-5)(x-10) + \\ &\quad + f(10)x(x-2.5)(x-5)(x-7.5)\Big). \end{aligned}$$

Функция $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ и интерполяционный полином $P_4(x)$ изображены на рис. 5.18.

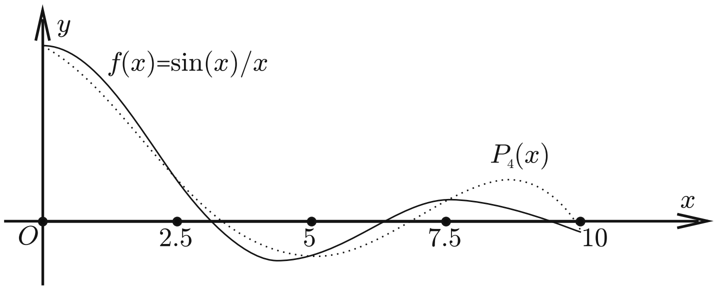


Рис. 5.18: Функция $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ и $P_4(x)$.

5.10.4 Квадратурная формула Симпсона и оценки погрешности квадратурных формул

На отрезке $[a;b]$ задана функция $f(x)$ и система точек $a \leqslant x_0 < x_1 \dots < x_n \leqslant b$.

$$I(f) = \sum_{k=1}^{n} c_k f(x_k).$$

выражение $I(f)$ называют квадратурной формулой для $\int_a^b f(x)\,dx$, x_k — узлами квадратурной формулы ($k = 0, \dots, n$).

Определение 5.10.2. Говорят, что квадратурная формула точна на полиномах степени не выше, чем $r \in \mathbb{N}$, если любого алгебраического полинома степени не выше, чем r справедливо равенство

$$\int_a^b P(x)\,dx = I(P), \quad \forall P(x) \in \mathcal{P}_r.$$

Найдём квадратурную формулу точную на полиномах степени 2 для отрезка $[0;1]$. Будем искать квадратурную формулу вида $I_s(f) = Af(0) + Bf(1/2) + Cf(1)$, т.е коэффициенты A, B, C из равенства

$$\int_0^1 P(x)\,dx = I_s(P)$$

для любого полинома степени не выше, чем 2. Подставив по очереди $P(x) = 1,\ x,\ x^2$, получаем:

$$\begin{cases} 1 = A + B + C, \\ 1/2 = B/2 + C, \\ 1/3 = B/4 + C. \end{cases}$$

Решив, которую находим $A = C = 1/6$, $B = 4/6 = 2/3$. Таким образом приходим к квадратурной формуле

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{1}{6}\left(f(0) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1)\right). \tag{5.10.16}$$

Если в формулу (5.10.16) подставить $f(x) = x^3$, то легко посчитать, что в данном случае достигается равенство. Следовательно квадратурная формула (5.10.16) точна на полинах степени 3.

Покажем, что квадратурная

$$\int_c^d f(x)\,dx \approx \frac{d-c}{6}\left(f(c) + 4f\left(\frac{c+d}{2}\right) + f(d)\right). \tag{5.10.17}$$

точна на полиномах степени 3. Действительно, полагая

$$x = \frac{c+d}{2} + t\cdot\frac{d-c}{2}, \quad F(t) = f\left(\frac{c+d}{2} + t\cdot\frac{d-c}{2}\right)$$

приходим к (5.10.16). Тем самым показано, что в (5.10.17) достигается равенство на полиномах степени 3.

Рассмотрим отрезок $[a;b]$ и равномерное разбиение $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{2n-1} < x_{2n} = b$, где $x_k = a + kh$, $h = \frac{b-a}{2n}$, $k = 0, 1, 2, \dots, 2n$. На каждом из полученных отрезков вида $[x_{2s}; x_{2s+2}]$, $s = 0, 1, \dots, n-1$ напишем квадратурную формулу (5.10.17). Итого получаем квадатурную формулу Симпсона на отрезке $[a;b]$, здесь $h^* = (b-a)/n$

$$\begin{aligned} I_{sim}(f) &= \sum_{s=0}^{n-1} \frac{h^*}{6}\left(f(x_{2s}) + 4f(x_{2s+1}) + f(x_{2s+2})\right) = \\ &= \frac{h^*}{6}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + 2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})\right). \end{aligned}$$

Отметим, чтов силу построения справедливо равенство $\int_a^b f(x)\,dx = I_{sim}(f)$, для любой функции вида $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$.

П р и м е р 5.10.3. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ на отрезке $[0;10]$. Пусть $n = 5$ с равномерной сеткой, т.е. $x_k = (b-a)k/2n = k$, $k = 0, \dots, 10$, $h^* = (b-a)/n = 2$. Тогда

k	Значение $\int\limits_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)\,dx$	$\frac{2}{6}\left(f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2})\right)$
0	$1.605412\dots$	$1.606844\dots$
1	$0.152790\dots$	$0.151202\dots$
2	$-0.333515\dots$	$-0.334303\dots$
3	$0.149499\dots$	$0.150840\dots$
4	$0.084160\dots$	$0.084143\dots$
$\sum_{k=0}^{4}$	$1.658347\dots$	$1.658728\dots$

Т.е. для $n = 5$ значения

$$\int\limits_0^{10} \frac{\sin x}{x}\,dx = 1.658347\dots,$$

$$I_{sim}(f) = \sum_{k=0}^{4} \frac{1}{6}\left(f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2})\right) = 1.658728\dots.$$

отличаются в четвертом знаке после десятичной запятой.

П р и м е р 5.10.4. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ на отрезке $[0; 10]$. Пусть $n = 10$ с равномерной сеткой, т.е. $x_k = k/2$, $k = 0, \ldots, 20$, $h^* = (b-a)/n = 1$. Тогда

k	Значение $\int\limits_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)\,dx$	$\frac{1}{6}\left(f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2})\right)$
0	$0.94608\ldots$	$0.94614\ldots$
1	$0.65932\ldots$	$0.65935\ldots$
2	$0.24323\ldots$	$0.24320\ldots$
3	$-0.009044\ldots$	$-0.009050\ldots$
4	$-0.20827\ldots$	$-0.20831\ldots$
5	$-0.12524\ldots$	$-0.12524\ldots$
6	$0.02990\ldots$	$0.02994\ldots$
7	$0.11959\ldots$	$0.11963\ldots$
8	$0.09085\ldots$	$0.09086\ldots$
9	$-0.00669\ldots$	$-0.00670\ldots$
$\sum_{k=0}^{9}$	$1.65834\ldots$	$1.65836\ldots$

Т.е. для $n = 10$ значения

$$\int\limits_0^{10} \frac{\sin x}{x}\,dx = 1.658347\ldots,$$

$$I_{sim}(f) = \sum_{k=0}^{9} \frac{1}{6}\left(f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2})\right) = 1.658369\ldots.$$

отличаются незначительно в пятом знаке после десятичной запятой. Чуть ниже мы дадим оценку погрешности на классе функций.

Способ построение квадратурных формул, точных на полиномах произвольной степени на отрезке $[0; 1]$

Покажем как, при помощи интерполяционных полиномов Лагранжа построить квадратурную формулу на отрезке $[0; 1]$, точную для любого алгебраического полинома степени не выше, чем $r-1$, $r \in \mathbb{N}$ с узлами в точках $0 \leqslant t_0 < \ldots t_{r-1} \leqslant 1$.

Лемма 24 (Квадратурная формула на отрезке $[0; 1)$). *Пусть $r \in \mathbb{N}$ задана система точек $0 \leqslant t_0 < \ldots t_{r-1} \leqslant 1$. Положим*

$$I^*(f) = \sum_{k=0}^{r-1} c_k f(t_k),$$

где $c_k = \int_0^1 l_{k,r-1}(x)\,dx$. Покажем, что квадратурная формула $I^*(f)$ точна на полиномах степени не выше, чем $r-1$ на отрезке $[0; 1]$.

Доказательство. Проверим равенство

$$\int_0^1 l_{s,r-1}(x)\,dx = I^*(l_{s,r-1}).$$

Действительно,

$$\int_0^1 l_{s,r-1}(x)\,dx = c_s,$$

$$I^*(l_{s,r-1}) = \sum_{k=0}^{r-1} c_k l_{s,r-1}(t_k) = \sum_{k=0}^{r-1} c_k \delta_{k,s} = c_s.$$

Далее остается заметить, что полиномы $l_{k,r-1}$, $k = 0, \ldots, r-1$ образуют базис в пространстве $\mathcal{P}_{r-1}$. □

Лемма 25 (Квадратурная формула на отрезке $[a;b)$. *Пусть $r \in \mathbb{N}$, узлы t_k и веса c_k — определены в лемме 24. Положим*

$$I^*_{[c;d]}(f) = (d-c)\sum_{k=0}^{r-1} c_k f(c+(d-c)t_k),$$

Тогда квадратурная формула $I^*_{[c;d]}(f)$ точна на полиномах степени не выше, чем $r-1$ на отрезке $[c;d]$, причём

$$\int_c^d f(x)\,dx - I^*_{[c;d]}(f) = (d-c)\left(\int_0^1 F(t)\,dt - I^*_{[0;1]}(F)\right),$$

где $F(t) = f(c+(d-c)t)$.

Доказательство. Сделав замену переменного $x = c+(d-c)t$ в интеграле получаем

$$\int_c^d f(x)\,dx - (d-c)\sum_{k=0}^{r-1} c_k f(c+(d-c)t_k) = (d-c)\left(\int_0^1 f(c+(d-c)t)\,dt - \sum_{k=0}^{r-1} c_k f(c+(d-c)t_k)\right).$$

□

Введём обозначение $u_+ = \max\{0;u\}$, т.е. если $u \geqslant 0$, то $u_+ = u$, а если $u<0$, то $u_+ = 0$.

Лемма 26. *Пусть $f \in C^r[a;b]$. Тогда справедливо*

$$\left|\int_0^1 f(x)\,dx - I^*(f)\right| \leqslant \varkappa \|f^{(r)}\|_{[0;1]},$$

где

$$\varkappa = \int_0^1 |\Lambda(t)|\,dt, \quad \Lambda(t) = \frac{(1-t)^r}{r!} - \sum_{k=0}^{r-1} c_k K(t_k - t), \quad K(t) = \frac{t_+^{r-1}}{(r-1)!}.$$

Доказательство. Из формулу Тейлора выкает представление $f(x) = P(x)+R(x)$, где $P(x) \in \mathcal{P}_{r-1}$, $R(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int\limits_0^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt$, точнее

$$\begin{aligned} f(x) =& \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!} + \frac{1}{(r-1)!}\int\limits_0^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t)dt = \\ =& P(x) + R(x). \end{aligned}$$

Тогда

$$R(x) = \int\limits_0^1 \frac{(x-t)_+^{r-1}}{(r-1)!} f^{(r)}(t)dt = \int\limits_0^1 K(x-t) f^{(r)}(t)dt,$$

где $K(x) = \dfrac{x_+^{r-1}}{(r-1)!}$. Поскольку квадратурная формула точна на полиномах степени $r-1$ имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)\,dx - I^*(f) &= \int_0^1 (P(x)+R(x))\,dx - I^*(P+R) = \int_0^1 R(x)\,dx - I^*(R) \leqslant \\ &= \int_0^1 \left(\int\limits_0^1 K(x-t) f^{(r)}(t)\,dt\right) dx - \sum_{k=0}^{r-1} c_k R(t_k) = \\ &= \int_0^1 \left(\int\limits_0^1 K(x-t)\,dx\right) f^{(r)}(t)\,dt - \int\limits_0^1 \sum_{k=0}^{r-1} c_k K(t_k - t) f^{(r)}(t)dt = \\ &= \int_0^1 \Lambda(t) f^{(r)}(t)dt. \end{aligned}$$

Последнее равенство написано с учётом того, что $\int\limits_0^1 K(x-t)\,dx = \dfrac{(1-t)^r}{r!}$. □

П р и м е р 5.10.5. Оценим константу $\varkappa$ для формулы Симпсона на отрезке $[0;1]$. Покажем, что справедливо $\varkappa = \frac{1}{2880}$. Напомним

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{1}{6}\left(f(0) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1)\right),$$

Т.к. формула Симсона точна на полиномах $r-1=3$ степени, то $r=4$, $t_0=0$, $t_1=1/2$, $t_2=1$. Константы $c_0=1/6$, $c_1=2/3$, $c_2=1/6$. Тогда $K(t)=t_+^3/6$ и

$$\begin{aligned}\Lambda(t) &= \frac{(1-t)^4}{24} - \sum_{k=0}^{2} c_k K(t_k - t) = \\ &= \frac{(1-t)^4}{24} - \left(\frac{1}{6}K(0-t) + \frac{2}{3}K(1/2-t) + \frac{1}{6}K(1-t)\right) = \\ &= \frac{(1-t)^4}{24} - \left(0 + \frac{(1/2-t)_+^3}{9} + \frac{(1-t)^3}{36}\right) = \\ &= \frac{(1-t)^4}{24} - \frac{(1/2-t)_+^3}{9} - \frac{(1-t)^3}{36}.\end{aligned}$$

Положим $g(t) = \frac{(1-t)^4}{24} - \frac{(1/2-t)_+^3}{9} - \frac{(1-t)^3}{36}$. Тогда справедливо

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{t^3(3t-2)}{72}, & t \in [0;1/2], \\ \dfrac{(1-t)^3(1-3t)}{72}, & t \in [1/2;1]. \end{cases}$$

Откуда $g(t) \leqslant 0$, следовательно

$$\varkappa = \int_0^1 |\Lambda(t)|\,dt = \int_0^1 \frac{(1-t)^3}{36} - \frac{(1-t)^4}{24}\,dt + \frac{1}{9}\int_0^{1/2}\left(\frac{1}{2}-t\right)^3 dt = \frac{1}{36\cdot 4} - \frac{1}{24\cdot 5} + \frac{1}{9\cdot 4\cdot 2^4} = \frac{1}{2880}.$$

Теорема 5.10.6. *Пусть $f \in C^r[a;b]$. Тогда справедливо*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - I_N(f)\right| \leqslant \frac{(b-a)^{r+1}\varkappa}{N^r}\|f^{(r)}\|_{[a;b]},$$

где $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$, равномерное разбиение отрезка $[a;b]$, т.е $x_k = a + kh$, $h = \frac{b-a}{N}$ и

$$I_N(f) = \frac{b-a}{N}\sum_{k=0}^{N-1} I^*_{[x_k;x_{k+1}]}(f(x)) = \frac{b-a}{N}\sum_{k=0}^{N-1} I^*_{[0;1]}(f(x_k+ht)).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}&\left|\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{N}\sum_{k=0}^{N-1} I^*_{[0;1]}(f(x_k+ht))\right| \leqslant \\ &\qquad \leqslant \sum_{k=0}^{N-1}\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx - hI^*_{[0;1]}(f(x_k+ht))\right| \leqslant \\ &\qquad\qquad \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} h^{r+1}\varkappa\cdot\|f^{(r)}\|_{[x_k;x_{k+1}]} \leqslant N\cdot h^{r+1}\varkappa\cdot\|f^{(r)}\|_{[a;b]}.\end{aligned}$$

□

П р и м е р 5.10.6. Вычислим оценку погрешности для функции $f(x) = \sin(x)/x$, рассмотренной в примерах 5.10.3, 5.10.4 на отрезке $[0;10]$. Для функции $f(x)$ выполнено

$$f^{(3)}(x) = \frac{6\cos x}{x^3} - \frac{\cos x}{x} + \frac{3\sin x}{x^2} - \frac{6\sin x}{x^4}.$$

Вычисления показывают, что

$$\|f^{(3)}\|_{[0;10]} = 0.238102\dots < 0.2382.$$

Откуда для примера 5.10.4 с $N=10$ (на десяти интервалах мы применяли формулу Симсона из трёх точек) имеем

$$\left|\int_0^{10} f(x)\,dx - I_N(f)\right| \leqslant \frac{10^4\varkappa}{10^3}\|f^{(3)}\|_{[0;10]} = \frac{10}{64}\cdot 0.2382 = \frac{397}{480\,000} = 0.00082708(3).$$

Данная оценка согласуется с примером 5.10.4, поскольку согласно примеру 5.10.4

$$\left|\int_0^{10} f(x)\,dx - I_N(f)\right| = \left|\int_0^{10} f(x)\,dx - \frac{b-a}{N}\sum_{k=0}^{9} I^*_{[x_k;x_{k+1}]}\left(f(x)\right)\right| =$$
$$= |1.658347\dots - 1.658369\dots| = 0.000022296\dots$$

5.11 Теоремы о среднем

Лемма 27. *1. Пусть $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, для любого $x \in [a,b]$. Тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)dx.$$

2. Пусть $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Тогда $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$ и

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|dx.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное разбиение (P,ξ) с отмеченными точками. Справедливо

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^n g(\xi_k)\Delta x_k.$$

Интегрируемость функции $|f(x)|$ во втором утверждении вытекает из оценки $||c|-|d|| \leqslant |c-d|$ и критерия интегрируемости Коши, а интегральное неравенство вытекает из

$$\left|\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^n |f(\xi_k)|\Delta x_k.$$

□

Следствие 5.11.1. 1. Пусть $f \in \mathcal{R}[a,b]$ и $m \leqslant f \leqslant M, \forall x \in [a,b]$. Тогда

$$m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a).$$

2. Пусть $f \in C[a,b]$. Тогда существует точка $\xi \in [a,b]$ такая, что

$$\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

Теорема 5.11.1 (Первая теорема о среднем)**.** *Пусть $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, $g(x) \geqslant 0$, $\forall x \in [a,b]$ и $m \leqslant f \leqslant M, \forall x \in [a,b]$. Тогда существует $\mu \in [m,M]$:*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Доказательство. Поскольку $mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x)$, $\forall x \in [a,b]$, то

$$m\int\limits_a^b g(x)dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \leqslant M\int\limits_a^b g(x)dx$$

Если $\int\limits_a^b g(x)dx = 0$, то все очевидно. Если $\int\limits_a^b g(x)dx \neq 0$, то

$$m \leqslant \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx}{\int\limits_a^b g(x)dx} \leqslant M \Rightarrow \exists \mu \in [m,M]: \quad \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx}{\int\limits_a^b g(x)dx} = \mu$$

□

Пример 5.11.1. Покажем, что условие неотрицательности (либо неположительности) одной из функций является обязательным условием в первой теореме о среднем.

Рассмотрим $f(x) = g(x) = x$ на отрезке $[-1;1]$. Тогда выполнено:

$$\frac{2}{3} = \int_{-1}^{1} x \cdot x\, dx \neq \xi \cdot \int_{-1}^{1} x\, dx = 0, \quad \forall \xi \in [-1;1].$$

Пример 5.11.2. Покажем, что остаток в интегральном виде формулы Тейлора можно преобразовать к виду Лагранжа. Пусть $f \in C^n(\vartheta(x_0))$ и $x \in \vartheta(x_0)$ для определённости будем считать $x > x_0$, тогда остаток в интегральном виде записывается: $\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}f^{(n)}(t)\,dt$. Поскольку $(x-t)^{n-1} \geqslant 0$ и $f^{(n)} \in C[x_0, x]$, а следовательно функция $f^{(n)} \in \mathbb{R}[x_0, x]$. Таким образом выполнены все условия первой теоремы о среднем. Т.е. существует такое $\xi \in [x_0, x]$, что

$$\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}f^{(n)}(t)\,dt = \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}\,dt = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n.$$

5.11.1 Преобразование Абеля и вторая теорема о среднем

Пусть $\{a_k\}_{k=1}^n$, $\{b_k\}_{k=1}^n$ произвольные числовые последовательности. Положим

$$A_m = \sum_{k=1}^{m} a_k.$$

В случае пустой суммы, полагаем ноль, т.е. $A_0 = 0$.

Лемма 28 (преобразование Абеля)**.** *Пусть $\{a_k\}_{k=1}^n$, $\{b_k\}_{k=1}^n$ произвольные числовые последовательности. Тогда*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_n b_n.$$

Доказательство. Поскольку $a_k = A_k - A_{k-1}$, то

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n}(A_k - A_{k-1})b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=2}^{n} A_{k-1}b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{\tilde{k}=1}^{n-1} A_{\tilde{k}} b_{\tilde{k}+1} = \sum_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_n b_n.$$

□

Лемма 29. *Рассмотрим сумму $\sum_{k=1}^n a_k b_k$, где $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \dots \geqslant b_n \geqslant 0$ и $m \leqslant \sum_{k=1}^s a_k \leqslant M$, для любого $s = 1, \dots, n$. Тогда*

$$mb_1 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant Mb_1.$$

Доказательство. Оценка

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_n b_n \leqslant M(\sum_{k=1}^{n-1}(b_k - b_{k+1}) + b_n) = Mb_1.$$

□

Лемма 30. *Пусть $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, $g(x)$ — неотрицательная, невозрастающая функция $\downarrow$ на $[a;b]$. Тогда существует точка $\xi \in [a,b]$ такая, что*

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)g(x)dx = g(a+0)\int\limits_{a}^{\xi} f(x)dx$$

Доказательство. Поскольку функция интегрируема на отрезке $[a;b]$, то она ограничена на нем, т.е. $|f(x)| \leqslant C$, $\forall x \in [a;b]$. Рассмотрим произвольное разбиение $a = x_0 < \dots < x_n = b_n$. Тогда

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)g(x)dx = \sum_{k=1}^{n} g(x_k)\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx + \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)(g(x) - g(x_k))dx.$$

Покажем, что вторая сумма стремиться к нулю с $\lambda(P) \to 0$. Действительно

$$|\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)(g(x)-g(x_k))dx| \leqslant C\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |g(x)-g(x_k)|dx \leqslant C\sum_{k=1}^{n}(g(x_{k-1})-g(x_k))\Delta x_k \leqslant$$
$$\leqslant C\lambda(P)\sum_{k=1}^{n}(g(x_{k-1})-g(x_k)) = C\lambda(P)(g(x_0)-g(x_n)).$$

Таким образом доказано

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \sum_{k=1}^{n} g(x_k)(F(x_k)-F(x_{k-1})) + o(1).$$

Покажем, что справедливо:

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx \leqslant Mg(a+0). \tag{5.11.18}$$

Действительно, из определения функции $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ вытекает $F(x) \in C[a,b]$. Положим $m = \min_{x\in[a;b]} F(x)$, $M = \max_{x\in[a;b]} F(x)$. Поскольку справедливо $g(a) = g(x_0) \geqslant g(x_1) \geqslant \cdots \geqslant g(x_n) = g(b)$ и

$$\sum_{k=1}^{s}(F(x_k)-F(x_{k-1})) = \int\limits_a^{x_s} f(t)dt, \quad m \leqslant \int\limits_a^x f(t)dt \leqslant M \quad x \in [a,b],$$

то из леммы 29, получаем

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \sum_{k=1}^{n} g(x_k)(F(x_k)-F(x_{k-1})) + o(1) \leqslant g(x_1)\cdot M + o(1), \quad \lambda(P) \to 0.$$

Теперь, сделав предельный переход $\lambda(P) \to 0$, получаем (5.11.18). Аналогично можно получить и оценку снизу. Следовательно справедливо

$$mg(a+0) \leqslant \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \leqslant Mg(a+0).$$

Вернемся к доказательству исходной леммы. Если $g(a+0) = 0$ то лемма доказана, если $g(a+0) > 0$, то

$$\frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx}{g(a+0)} = \mu = F(\xi) = \int\limits_a^{\xi} f(t)dt.$$

□

Теорема 5.11.2 (Вторая теорема о среднем). *Пусть $f \in \mathcal{R}[a,b]$, $g(x)$ — монотонна на $[a,b]$. Тогда существует точка $\xi \in [a,b]$ такая, что*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = g(a+0)\int\limits_a^{\xi} f(x)dx + g(b-0)\int\limits_{\xi}^b f(x)dx$$

Доказательство. Пусть g невозрастает. Положим $G(x) = g(x) - g(b-0)$. Применяем предыдущую лемму

$$\int\limits_a^b f(x)G(x)dx = G(a+0)\int\limits_a^{\xi} f(x)dx$$

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx - g(b-0)\int\limits_a^b f(x)dx = g(a+0)\int\limits_a^{\xi} f(x)dx - g(b-0)\int\limits_a^{\xi} f(x)dx$$

Пусть g неубывает. Положим $G(x) = g(b-0) - g(x)$. Применяем предыдущую лемму

$$\int_a^b f(x)G(x)dx = G(a+0)\int_a^\xi f(x)dx$$

$$-\int_a^b f(x)g(x)dx + g(b-0)\int_a^b f(x)dx = g(b-0)\int_a^\xi f(x)dx - g(a+0)\int_a^\xi f(x)dx.$$

□

5.12 Несобственный интеграл

Определение 5.12.1. Пусть $f(x) \notin \mathcal{R}[a,\omega)$, но для любого $b \in (a,\omega)$ выполнено $f(x) \in \mathcal{R}[a,b]$ и существует конечный предел

$$\lim_{b\to\omega-}\int_a^b f(x)dx.$$

Тогда говорят, что функция $f(x)$ интегрируема в *несобственном смысле*, а предел обозначают $\int_a^\omega f(x)dx$. Если же предел не существует, либо равен бесконечности, то говорят, что интеграл *расходится*.

Пример 5.12.1. Функция $f(x) = 1/\sqrt{x}$ не интегрируема по Риману на $(0,1)$, т.к. неограничена. Но поскольку для любого $\varepsilon \in (0,1)$ справедливо $f(x) \in \mathcal{R}[\varepsilon, 1]$ и

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\epsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0+} 2(1-\varepsilon^{1/2}) = 2.$$

Следовательно функция $f(x) = 1/\sqrt{x}$ интегрируема на $[0,1]$ в несобственном смысле и

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2.$$

Теорема 5.12.1 (Критерий Коши)**.** *Пусть $f \in \mathcal{R}[a,b]$ для любого $b \in [a,\omega)$, но $f(x) \notin \mathcal{R}[a,\omega)$. Тогда*

$$\left(\begin{array}{ll} \textit{Несобственный} & \int_a^\omega f(x)dx \\ \textit{интеграл сходится} & \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \forall\epsilon > 0 \quad \exists B \in [a,\omega) : \forall b_1, b_2 \in [B,\omega) \\ \left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| < \epsilon. \end{array}\right)$$

Замечание 46. В условии требование $f(x) \notin \mathcal{R}[a,\omega)$ нужно лишь для того, что бы отделить собственный интеграл от несобственного. В случае $f(x) \in \mathcal{R}[a,\omega)$ данный критерий, конечно же остаётся верным (см. доказательство).

Доказательство. Положим $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Тогда

$$\lim_{b\to\omega}\int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to\omega-} F(b),$$

то по по критерию Коши для существования предела функции получаем:

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists B \in [a,\omega) \quad \forall b_1, b_2 \in [B,\omega) \quad |F(b_1) - F(b_2)| < \epsilon.$$

□

Теорема 5.12.2. *Пусть $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, $\forall x \in [a,\omega)$ и $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, $\forall b \in [a,\omega)$. Тогда*

1. *Если $\int_a^\omega g(x)\,dx$ — сходится $\Rightarrow \int_a^\omega f(x)\,dx$ — сходится.*

2. *Если $\int_a^\omega f(x)\,dx$ — расходится $\Rightarrow \int_a^\omega g(x)\,dx$ — расходится.*

Доказательство. Вытекает из неравенства

$$\Big|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx\Big| \leqslant \Big|\int\limits_{b_1}^{b_2} g(x)dx\Big|,$$

и критерия Коши. □

Теорема 5.12.3. *Пусть $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, $\forall b \in [a,\omega)$, $f(x), g(x) \geqslant 0$ и $f(x) \sim g(x), x \to \omega-$. Тогда*

$$\int_a^\omega f(x)\,dx \quad и \quad \int_a^\omega g(x)\,dx$$

сходятся и расходятся одновременно.

Доказательство. Из условия теоремы вытекают неравенства $C_2 g(x) \leqslant f(x) \leqslant C_1 g(x)$, $\forall x \in [b,\omega)$. Откуда, проинтегрировав, получаем

$$C_2\int\limits_{b_1}^{b_2} g(x)\,dx \leqslant \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx \leqslant C_1\int\limits_{b_1}^{b_2} g(x)\,dx.$$

Далее остается сослаться на критерий Коши. □

П р и м е р ы 5.12.1. Пусть $a > 0$. Тогда справедливо

$$\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty}\left\{\begin{array}{l} \frac{x^{1-p}}{1-p}\big|_a^b \\ \ln x\big|_a^b \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{l} +\infty, p \leqslant 1, \text{ расходится} \\ \frac{a^{1-p}}{p-1}, p > 1, \text{сходится} \end{array}\right.$$

$$\int\limits_0^{a}\frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to 0+}\left\{\begin{array}{l} \frac{x^{1-p}}{1-p}\big|_b^a \\ \ln x\big|_b^a \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{l} +\infty, p \geqslant 1, \text{ расходится} \\ \frac{a^{1-p}}{1-p}, p < 1, \text{ сходится} \end{array}\right.$$

Следствие 5.12.1. Пусть $f(x) \geqslant 0$ для любых $x \in [a,+\infty)$ и $f \in \mathcal{R}[a,b]$ для любого $b \in (a,+\infty)$. Если выполняется

$$f(x) \sim \frac{C}{x^p}, x \to \infty,$$

то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится при $p > 1$ и расходится $p \leqslant 1$.

Следствие 5.12.2. Пусть $f(x) \geqslant 0$ для любых $x \in (a,c]$ и $f \in \mathcal{R}[b,c]$ для любого $b \in (a,c]$. Если выполняется

$$f(x) \sim \frac{C}{(x-a)^p}, x \to a+,$$

то $\int\limits_a^{c} f(x)\,dx$ сходится при $p < 1$ и расходится $p \geqslant 1$.

Теорема 5.12.4 (Абеля-Дирихле)**.** *Пусть выполнено*

0^1*)* $f \in \mathcal{R}[a,b]$, $\forall b \in [a,\omega)$.

0^2*)* $g(x)$ *- монотонная функция на* $[a,\omega)$.

и если выполнены любые два следующие свойства 1), 2) *либо* 1′), 2′)

Дирихле:	1)$\Big\vert\int\limits_a^b f(x)dx\Big\vert \leqslant C, \forall b \in [a,\omega)$	*Абеля:*	1′) $\int\limits_a^\omega f(x)dx$ *- сходится*
	2) $\lim_{x\to\omega-} g(x) = 0$		2′)$\vert g(x)\vert \leqslant C, \forall x \in [a,\omega)$

$$\textit{Тогда} \int\limits_a^\omega f(x)g(x)dx \textit{ - сходится}$$

Доказательство. Из второй теремы о среднем вытекает

$$\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)\,dx = g(b_1+0)\int\limits_{b_1}^{\xi} f(x)\,dx + g(b_2-0)\int\limits_{\xi}^{b_2} f(x)\,dx.$$

Откуда из свойств 1), 2) либо 1′), 2′) вытекает

$$\Big|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)\,dx\Big| \leqslant C_1\epsilon + C_2\epsilon \leqslant \epsilon C.$$

□

П р и м е р 5.12.2. Исследовать на сходимость условную и абсолютную: $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\,dx$ при $p > 0$.

1. Исследуем на сходимость. Проверим, что выполнены свойства признаки Дирихле:

0^1) очевидно;
0^2) функция $\frac{1}{x^p}$ — монотонна при $p > 0$.

Также выполнено 1) $\left|\int\limits_1^b \sin x\,dx\right| \leqslant 2$;
2) $\frac{1}{x^p} \to 0$, $p > 0$.

Поэтому исходный интеграл сходится при всех $p > 0$.

2. Абсолютная сходимость для $p > 1$ вытекает из оценки $|\sin x| \leqslant 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ и сходимости интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$. При $p \in (0;1]$ исследуем интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p}\,dx$ на сходимость. Справедливо

$$\frac{|\sin x|}{x^p} \geqslant \frac{\sin^2 x}{x^p} = \frac{1}{2x^p} - \frac{\cos 2x}{2x^p}.$$

Поскольку интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{2x^p}\,dx$ расходится, а $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x^p}\,dx$ сходится (опять по признаку Дирихле), то при $p \in (0;1]$ абсолютной сходимости нет.

Ответ: При $p > 1$ сходится абсолютно, при $p \in (0;1]$ — условно.

Контрольные вопросы.

1. Сформулировать признак сходимости Абеля-Дирихле.
2. Можно ли ослабить признак Дирихле, убрав условие монотонности?

Упражнения к 5.12

Упражнение 5.12.1. *Исследовать на сходимость условную и абсолютную.*

$$(a)\quad \int_1^{+\infty} \cos(x^{3/2} - \ln x)\,dx; \qquad (b)\quad \int_1^{+\infty} x^2 \sin\left(\frac{\cos x^3}{x+1}\right)dx;$$

Ответы: 5.12.1 (a), (b) сходится условно;

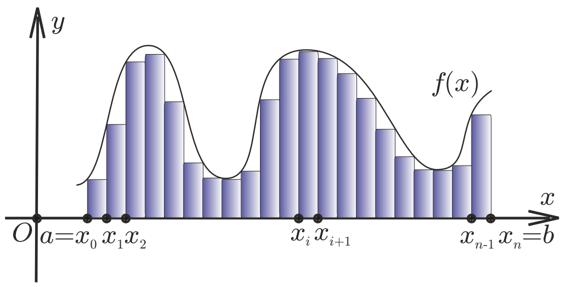


Рис. 5.19: Нижняя сумма Дарбу

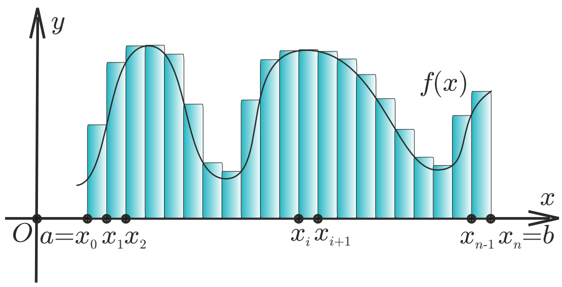


Рис. 5.20: Верхняя сумма Дарбу

5.13 Приложения интеграла

5.13.1 Площади

Теорема 5.13.1. *Пусть* $f \in \mathcal{R}[a,b]$, $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [a,b], \ y \in [0, f(x)]\}$. *Тогда*

$$S(\Omega) = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Доказательство. Пусть $m_k = \inf_{x \in \Delta x_k} f(x)$, $M_k = \sup_{x \in \Delta x_k} f(x)$, S_k — площадь под графиком функции $y = f(x)$ на отрезке $[x_{k-1}; x_k]$, $\lambda(P) = \max_{k=0,\dots,n-1} \Delta x_k$. Тогда см. рис. 5.19, 5.20

$$m_k \Delta x_k \leqslant S_k \leqslant M_k \Delta x_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \leqslant S(\Omega) \leqslant \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$$

Сделав предельный переход $\lambda(P) \to 0$, получаем, что сумма в правой и левой части предыдущего неравенства стремится к $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ как суммы Дарбу. □

Теорема 5.13.2. *Пусть* $r = r(\varphi) \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$. *Тогда площадь ограниченная кривой* $r = r(\varphi)$ *и углами* $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ *вычисляются по формулам:*

$$S(\Omega) = \frac{1}{2} \int\limits_\alpha^\beta r^2(\varphi)\,d\varphi.$$

Доказательство. Пусть $r_k = \inf_{\varphi \in \Delta\varphi_k} r(\varphi)$, $R_k = \sup_{\varphi \in \Delta\varphi_k} r(\varphi)$, Ω_k — площадь ограниченная кривой $r = r(\varphi)$ и углами φ_{k-1} и φ_k, $\lambda(P) = \max_{k=0,\dots,n-1} \Delta\varphi_k$. Тогда см. рис. 5.21, 5.22

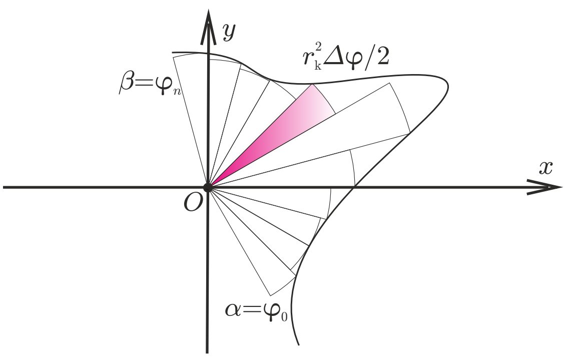


Рис. 5.21: Нижняя сумма Дарбу

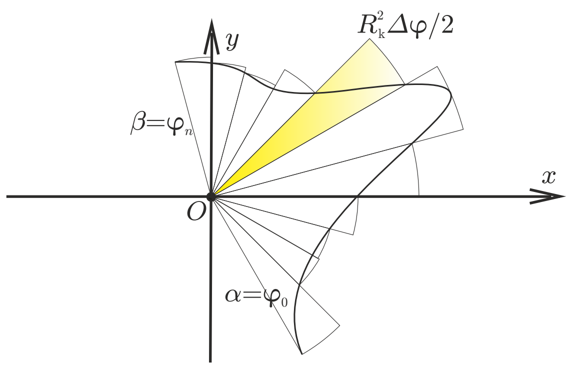


Рис. 5.22: Верхняя сумма Дарбу

$$\frac{1}{2} r_k^2 \Delta\varphi_k \leqslant S(\Omega_k) \leqslant \frac{1}{2} R_k^2 \Delta\varphi_k.$$

Просуммируем неравенства по k от 0 до $n-1$. Получаем

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} r_k^2 \Delta\varphi_k \leqslant S(\Omega) \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} R_k^2 \Delta\varphi_k$$

Сделав предельный переход $\lambda(P) \to 0$, получаем, что сумма в правой и левой части предыдущего неравенства стремится к $\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\, d\varphi$ как суммы Дарбу. $\square$

5.13.2 Объемы

Теорема 5.13.3. *Пусть $f^2 \in \mathcal{R}[a,b]$. Тогда объём тела, полученного вращением графика функции $y = f(x)$ относительно оси Ox (прямой $y = 0$) равен:*

$$V_{y=0} = V_{Ox} = \pi \int\limits_{a}^{b} f^2(x) dx.$$

Доказательство. Пусть $m_k = \inf_{x\in\Delta x_k} |f(x)|$, $M_k = \sup_{x\in\Delta x_k} |f(x)|$, V_k — объём вращения графика функции $y = f(x)$ на отрезке $[x_{k-1}; x_k]$ вокруг оси Ox, $\lambda(P) = \max_{k=0,\dots,n-1} \Delta x_k$. Тогда см. рис. 5.23, 5.24

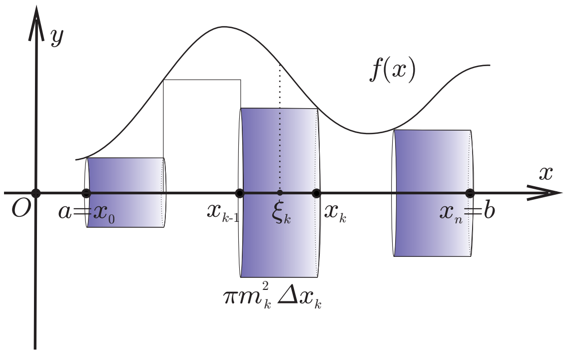


Рис. 5.23: Нижняя сумма Дарбу

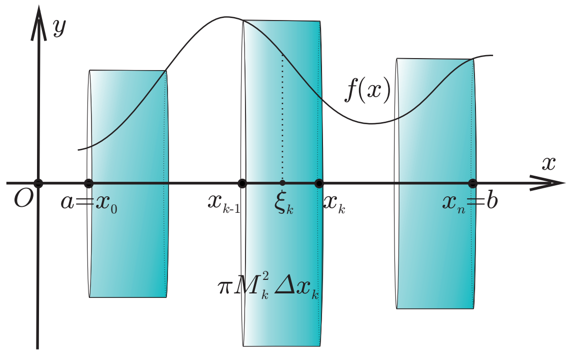


Рис. 5.24: Верхняя сумма Дарбу

$$\pi m_k^2 \Delta x_k \leqslant V_k \leqslant \pi M_k^2 \Delta x_k$$

$$\pi \sum_{k=1}^{n} m_k^2 \Delta x_k \leqslant V \leqslant \pi \sum_{k=1}^{n} M_k^2 \Delta x_k.$$

Сделав предельный переход $\lambda(P) \to 0$, получаем, что сумма в правой и левой части предыдущего неравенства стремится к $\pi \int\limits_{a}^{b} f^2(x)\, dx$ как суммы Дарбу. $\square$

Замечание 47. Пусть $C \in \mathbb{R}$ и $(f - C)^2 \in \mathcal{R}[a,b]$. Тогда объём тела, полученного вращением графика функции $y = f(x)$ относительно прямой $y = C$ равен:

$$V_{y=C} = \pi \int\limits_{a}^{b} (f - C)^2\, dx.$$

Теорема 5.13.4. *Пусть $f(x) \in \mathcal{R}[a,b]$. Тогда объём тела, полученного вращением графика функции $y = f(x)$ относительно оси Oy (прямой $x = 0$) равен:*

$$V_{Oy} = 2\pi \int\limits_{a}^{b} |xf(x)|\, dx.$$

Доказательство. Пусть $m_k = \inf_{x\in\Delta x_k} |f(x)|$, $M_k = \sup_{x\in\Delta x_k} |f(x)|$, V_k — объём вращения графика функции $y = f(x)$ на отрезке $[x_{k-1}; x_k]$ вокруг оси Oy, $\lambda(P) = \max_{k=0,\dots,n-1} \Delta x_k$. Тогда см. рис. 5.25, 5.26

$$V_k \leqslant \pi M_k |x_k^2 - x_{k-1}^2| = \pi M_k |2x_{k-1}\Delta x_k + \Delta x_k^2| \leqslant 2\pi M_k |x_{k-1}| \Delta x_k + \lambda(P) \pi M_k \Delta x_k.$$

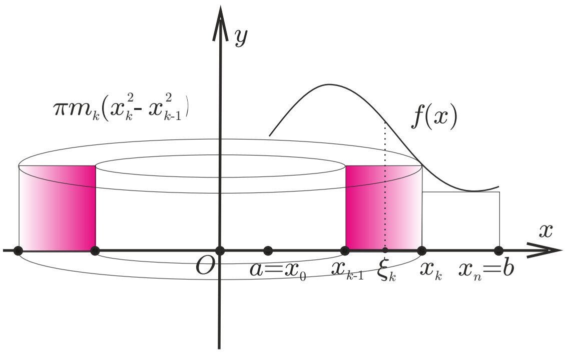


Рис. 5.25: Нижняя сумма Дарбу

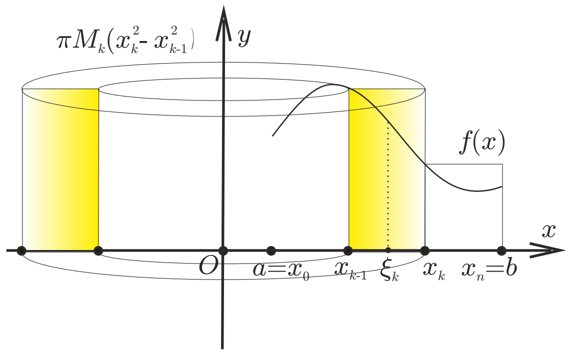


Рис. 5.26: Верхняя сумма Дарбу

Откуда

$$V_{Oy} \leqslant 2\pi \sum_{k=1}^{n} M_k |x_{k-1}| \Delta x_k + \lambda(P)\pi \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$$

Вторая сумма при $\lambda(P) \to 0$ стремится к нулю, поскольку $\sum\limits_{k=1}^{k} M_k \Delta x_k$ стремится к $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Сделав предельный переход $\lambda(P) \to 0$, получаем

$$V_{Oy} \leqslant 2\pi \int\limits_a^b |xf(x)|\,dx.$$

Аналогично, используя оценку на нижнюю сумму Дарбу, получаем оценку

$$V_{Oy} \geqslant 2\pi \int\limits_a^b |xf(x)|\,dx.$$

□

Замечание 48. Пусть $C \in \mathbb{R}$ и $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Тогда объём тела, полученного вращением графика функции $y = f(x)$ относительно прямой $x = C$ равен:

$$V_{x=C} = 2\pi \int\limits_a^b |(x-C)f(x)|\,dx.$$

5.13.3 Длина кривой

Определение 5.13.1. Пусть $|\overrightarrow{A_kA_{k-1}}|$ длина вектора, $\lambda(P) = \max\limits_{k=1,\ldots,n} |\overrightarrow{A_kA_{k-1}}|$ — параметр разбиения. Тогда если существует и конечен следующий предел

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{k=1}^{n} |\overrightarrow{A_kA_{k-1}}|$$

то говорят, что кривая спрямляемая, а данный предел называют длиной кривой.

П р и м е р 5.13.1. Приведём пример непрерывной кривой на отрезке $[0, \frac{1}{2\pi}]$, которая не является спрямляемой (см. рис. 5.27):

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, \quad x = 0. \end{cases}$$

Используя очевидное неравенство $\frac{1}{n+1} \geqslant \int\limits_{n+1}^{n+2} \frac{dx}{x} = \ln(n+2) - \ln(n+1)$. Получаем (см. рис. 5.28)

$$l \geqslant \sum_{n=1}^{N} |\overrightarrow{A_kB_k}| \geqslant \sum_{n=1}^{N} |\overrightarrow{A_kC_k}| \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2\pi(n+1)} \geqslant \frac{1}{2\pi}(\ln(N+2) - \ln 2).$$

Поскольку при $N \to +\infty$ логарифм в последнем неравенстве стремится к бесконечности, то соответсвующий предел стремится к бесконечности, что означает, что данная кривая не является спрямляемой на отрезке $[0; 1/2\pi]$.

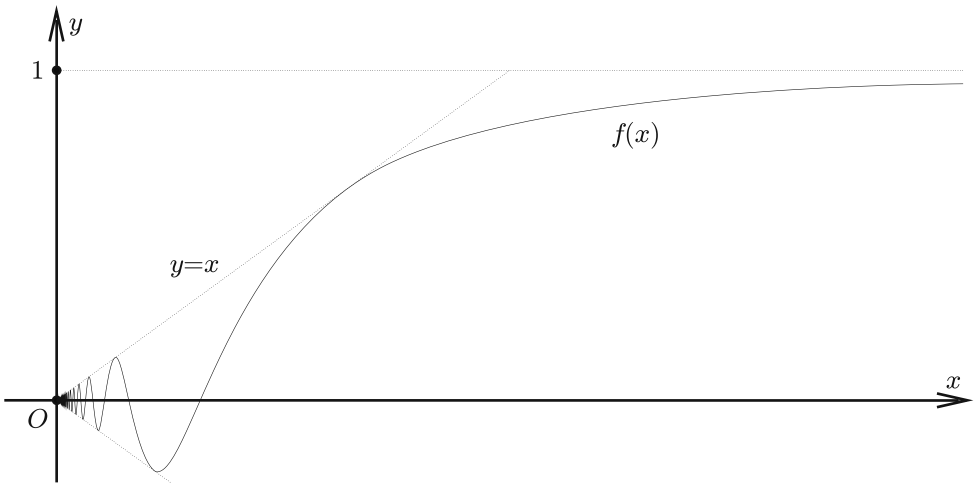


Рис. 5.27: График функции $f(x) = x\sin(1/x)$.

Теорема 5.13.5. *Пусть $x(t), y(t), z(t) \in C^1[\alpha,\beta]$. Тогда*

$$l_{[\alpha,\beta]} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} dl,$$

где $dl = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2}\, dt$.

Доказательство. Из теоремы Лагранжа вытекает

$$\begin{aligned}
&\Delta x_k = x(t_k) - x(t_{k-1}) = x'(\xi_k)\Delta t_k, \quad \xi_k \in (t_{k-1}; t_k),\\
&\Delta y_k = y'(\mu_k)\Delta t_k, \quad \mu_k \in (t_{k-1}; t_k),\\
&\Delta z_k = z'(\eta_k)\Delta t_k, \quad \eta_k \in (t_{k-1}; t_k).
\end{aligned}$$

Откуда

$$\sum_{k=1}^{n} |\overrightarrow{A_{k-1}A_k}| = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2 + (\Delta z_k)^2}.$$

Положим $\vartheta(\xi_k, \mu_k, \eta_k) = \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\mu_k))^2 + (z'(\eta_k))^2}$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} |\overrightarrow{A_{k-1}A_k}| = \sum_{k=1}^{n} \vartheta(\xi_k, \mu_k, \eta_k)\Delta t_k = \sum_{k=1}^{n} \vartheta(t_k, t_k, t_k)\Delta t_k + \sum_{k=1}^{n} (\vartheta(\xi_k, \mu_k, \eta_k)\Delta t_k - \vartheta(t_k, t_k, t_k)\Delta t_k) \to$$

$$\to \int\limits_{\alpha}^{\beta} \vartheta(t,t,t)dt + 0 \quad (\lambda(P) = \max \Delta t_k \to 0).$$

Продолжим

$$|\vartheta(\xi_k, \mu_k, \eta_k) - \vartheta(t_k, t_k, t_k)| \leqslant \sup_{\vec{t}_k^{\,*} = (\xi_k, \mu_k, \eta_k), \vec{t}_k = (t_k, t_k, t_k) \in [t_{k-1}, t_k]^3} |\vartheta(\vec{t}_k^{\,*}) - \vartheta(\vec{t}_k)| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{|\vec{t}_k^{\,*} - \vec{t}_k| \leqslant \sqrt{3}|\Delta t_k|,\ \vec{t}_k^{\,*}, \vec{t}_k \in [\alpha,\beta]^3} |\vartheta(\vec{t}_k^{\,*}) - \vartheta(\vec{t}_k)| = \omega(\vartheta, \sqrt{3}|\Delta t_k|) \leqslant \omega(\vartheta, \sqrt{3}\lambda(P)) \to 0 \quad (\lambda(P) \to 0).$$

Здесь $\omega(\vartheta, \delta)$ — модуль непрерывности (мы его определили в формуле выше). Из равномерной сходимость на любом компактном множестве (например, на отрезке или брусе) вытекает $\omega(\vartheta, \delta) \to 0$, когда $\delta \to 0$. Следовательно

$$\sum |\vartheta(\xi_k, \mu_k, \eta_k) - \vartheta(t_k, t_k, t_k)|\Delta t_k \leqslant \omega(\vartheta, \sqrt{3}\lambda(P)) \sum_{k=1}^{n} \Delta t_k = (\beta - \alpha)\omega(\vartheta, \sqrt{3}\lambda(P)) \to 0 \quad (\lambda(P) \to 0).$$

$\square$

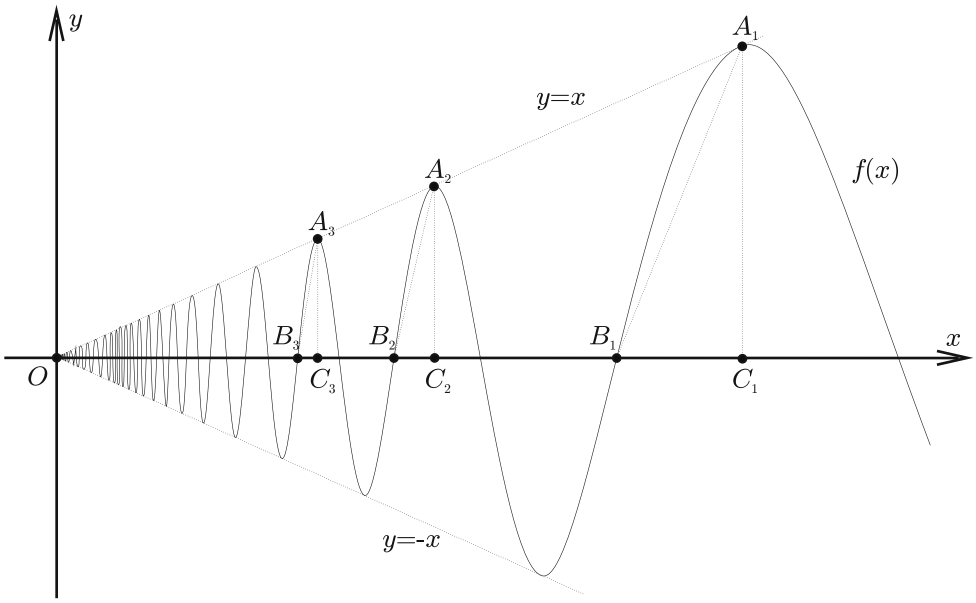


Рис. 5.28: График функции $f(x) = x\sin(1/x)$.

Площадь поверхности вращения

Теорема 5.13.6. *Пусть* $x(t), y(t) \in C^1(a,b)$. *Тогда справедливо:*

$$S_{Ox} = 2\pi \int_a^b |y|\, dl$$

Доказательство. Площадь поверхности усеченного конуса равна $S = \pi(R_1 + R_2)L$, где L — образующая, а R_1, R_2 — радиусы нижнего и верхнего основания конуса. Поскольку

$$S_k \leqslant \pi(M_k + M_k)\Delta l_k \leqslant 2\pi M_k \Delta l_k,$$

то

$$\sum S_k \leqslant \begin{array}{c}\sum \pi(2M_k)\Delta l_k \\ \downarrow \\ 2\pi \int_a^b |y|\, dl\end{array} \qquad (\Delta t_k \to 0) \Rightarrow (\Delta l_k \to 0)$$

□

Замечание 49. Пусть $x, y \in C^1[\alpha,\beta]$ и ρ — расстояние до прямой, относительной которой происходит вращение.

$$S_{\text{прямой}} = 2\pi \int_\alpha^\beta \rho\, dl.$$

В частности:

$$S_{Oy} = 2\pi \int_\alpha^\beta |x|\, dl$$

Замечание 50. Приведём формулы для вычисления дифференциала дуги:

$$dl = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\, dt = \sqrt{r^2 + (r'_\varphi)^2}\, d\varphi = \sqrt{1 + r^2(\varphi'_r)^2}\, dr = \sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx.$$

Поясним, как получить формулу для нахождения длины кривой, заданной в полярной системе координат при помощи параметризации $\varphi = \varphi(r)$. В декартовой системе координат уравнение кривой принимает вид: $x = r\cos\varphi(r)$, $y = r\sin\varphi(r)$. Откуда

$$(x'_r)^2 + (y'_r)^2 = (\cos\varphi - r\sin\varphi\cdot\varphi'_r)^2 + (\sin\varphi + r\cos\varphi\cdot\varphi'_r)^2 = 1 + r^2(\varphi'_r)^2.$$

Контрольные вопросы.

1. Сформулируйте теорему о нахождении площади фигуры $\Omega = \{(\varphi, r);\ \varphi \in [\alpha; \beta],\ r \leqslant r(\varphi)\}$ в полярной системе координат.

Упражнения к 5.13

Упражнение 5.13.1. *Найдите площадь фигуры, заданной при помощи неравенств: $r \leqslant \sin 2\varphi$, $r \leqslant \cos 2\varphi$.*

Ответы: 5.13.1 $S = (\pi - 1)/4$.

5.14 Приложения определенного интеграла к задачам экономики

5.14.1 Объем выпускаемой продукции, дисконтированный доход.

Отметим экономический смысл определенного интеграла, выражающего объем произведенной продукции при известной функции производительности труда. Напомним хорошо известную производственную функцию Кобба-Дугласа $f(x_1, x_2) = abx_1^{\alpha}x_2^{\beta}$. Если считать, что затраты труда есть линейная зависимость от времени, а затраты капитала неизменны, то производственная функция примет вид $g(t) = (\alpha t + \beta)e^{\gamma t}$. Тогда объем *выпускаемой продукции* за T лет составит:

$$Q = \int_0^T (\alpha t + \beta)e^{\gamma t}\, dt.$$

П р и м е р 5.14.1. Найти объем продукции, произведенной за 4 года, если производственая функция имеет вид $g(t) = (1+t)e^{3t}$. Используем метод интегрирования по частям находим объём произведённой продукции

$$Q = \int_0^4 (1+t)e^{3t}\, dt = \frac{1}{3}\int_0^4 (1+t)\, de^{3t} = \left.\frac{1+t}{3}e^{3t}\right|_0^4 - \frac{1}{3}\int_0^4 e^{3t}\, dt =$$
$$= \frac{5e^{12}-1}{3} - \left.\frac{1}{9}e^{3t}\right|_0^4 = \frac{1}{9}(14e^{12} - 2) = 253\,173,8977\ldots$$

Следовательно, объем продукции, произведенной за 4 года примерно равен 253 174 усл.ед.

Определение 5.14.1. Определение начальной суммы по её конечной величине, полученной через время t лет при годовом проценте (процентной ставке) p, называется *дисконтированием*.

Задачи такого рода встречаются при определении экономической эффективности капиталовложений. Пусть K_t — конечная сумма, полученная за t лет, и K — дисконтируемая (начальная) сумма, которую в финансовом анализе также называют *современной суммой*. Если проценты просты, то $K_t = K(1 + mt)$, где $m = p/100$ — удельная процентная ставка. Тогда $K = K_t/(1 + mt)$. В случае сложных процентов $K_t = K(1 + m/t)^t$ и потому $K = K_t/(1 + m/t)^t$.

Пусть поступающий ежегодно доход изменяется во времени и описывается функцией $f(t)$ и при удельной норме процента, равной m, процент начисляется непрерывно. Можно показать, что в этом случае дисконтированный доход K за время T вычисляется по формуле:

$$K = \int_0^T f(t)e^{-mt}\, dt.$$

П р и м е р 5.14.2. Определить дисконтированную сумму капиталовложений за три года при процентной ставке 8%, если первоначальные (базовые) капиталовложения составили 10 млн. руб. и намечается ежегодно увеличивать капиталовложения на 1 млн.руб. Очевидно, капиталовложения задаются функцией $f(t) = 10 + 1 \cdot t = 10 + t$. Тогда дисконтированная сумма капиталовложений

$$K = \int_0^3 (10 + t)e^{-0.08t}\, dt.$$

Интегрируя аналогично предыдущему примеру, получим $\approx 30,5$ млрд.руб. Это значит, что для получения одинаковой наращенной суммы через три года ежегодные капиталовложения от 10 до 13 млн. руб. равносильны одновременным первоначальным вложениям 30,5 млн. руб. при той же процентной ставке, начисляемой непрерывно.

5.14.2 Приложения определенного интеграла к задачам экономики: коэффициент Джини

Для измерения фактического распределения доходов используют «кривую Лоренца» и «коэффициент Джини», показывающие, какая доля совокупного дохода приходится на каждую группу населения, что позволяет судить об уровне экономического неравенства в данной стране.

«Кривая Лоренца» –– это метод графического изображения уровня концентрации явления. Для ее построения на обе оси координат наносят процентную масштабную шкалу (от 0 до 100%). Равномерное распределение признака будет представлено в таком случае диагональю, называемой «линией равномерного распределения», а неравномерное –– «линией Лоренца», отклонение которой от диагонали и характеризует степень неравномерности (см. рис. 5.29).

Таким образом, если принять величину дохода и численность населения за 100%, то прямая OA покажет абсолютно равномерное распределение совокупного дохода между всеми группами населения. Однако реальное распределение всегда будет характеризоваться отклонением от этой прямой. Абсолютно неравномерное распределение совпало бы с осями координат. Но поскольку «сверхбедные» и «сверхбогатые» всегда составляют незначительную часть рыночного общества, то перед нами будет некоторая кривая («кривая Лоренца»), отклонение которой от диагонали наглядно покажет степень неравномерного распределения доходов.

Для расчета конкретного уровня неравенства в распределении доходов поступают следующим образом. Площадь, образованную линиями равномерного и неравномерного распределения доходов (она на графике заштрихована), относят к площади треугольника OAC. Полученный результат и есть «коэффициент Джини».

Исследуя кривую Лоренца — зависимость процента доходов от процента имеющего их населения (кривую OBA, рис. 5.29), можем оценить степень неравенства в распределении доходов населения.

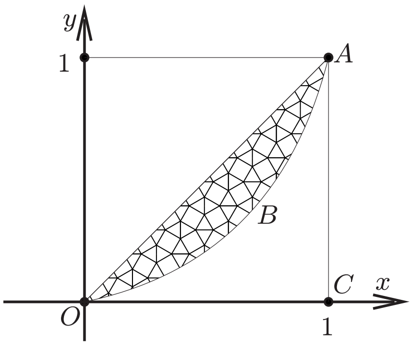


Рис. 5.29: По оси Ox — доля населения в %, по оси Oy — доля доходов в %.

Определение 5.14.2. При равномерном распределении доходов кривая Лоренца вырождается в прямую – биссектрису OA, поэтому площадь фигуры OBA между биссектрисой OA и кривой Лоренца, отнесенная к площади треугольника OAC (коэффициент Джини), характеризует степень неравенства в распределении доходов населения.

П р и м е р 5.14.3. Рассмотрим первую модель в которой будет три группы населения.

группа	доля дохода	процент населения
A	0	10%
B	$0,1$	80%
C	$0,9$	10%

Кривая Лоренца изображена на рис. 5.30.

Рассмотрим вторую модель абсолютного равенства в доходах населения, когда все будут получать одинаковый доход. Рассмотрим опять три группы населения.

группа	доля дохода	процент населения
A	$0,1$	10%
B	$0,8$	80%
C	$0,1$	10%

Кривая Лоренца изображена на рис. 5.31.

П р и м е р 5.14.4. По данным исследований в распределении доходов в одной из стран кривая Лоренца OBA (рис. 1) может быть описана уравнением $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$, где x — доля населения, а y — доля доходов населения. Вычислить коэффициент Джини.

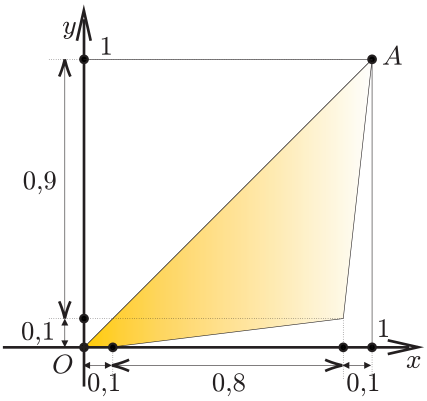


Рис. 5.30: Первая модель

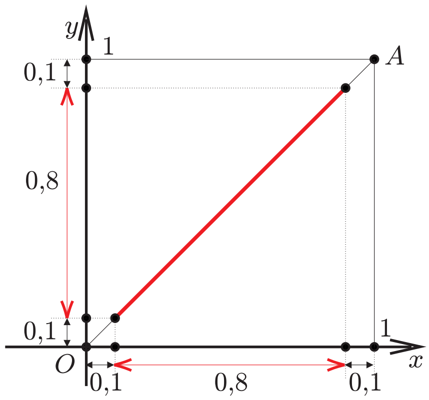


Рис. 5.31: Вторая модель

Поскольку $S_{\triangle OAC} = 1/2$, то коэффициент Джини

$$G = \frac{S_{OAB}}{S_{\triangle OAC}} = 1 - \frac{S_{OBAC}}{S_{\triangle OAC}} = 1 - 2S_{OBAC}.$$

Поэтому

$$G = 1 - 2\left(1 - \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx\right) = 2\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx - 1.$$

Последний интеграл можно посчитать многими способами, например, использую интегрирования по частям или с помощью замены $x = \sin t$. Используя данную замену, получаем

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = (1/2)\int_0^{\pi/2} (1+\cos 2t)\,dt = (1/2)\int_0^{\pi/2} dt = \pi/4.$$

Итак, коэффициент Джини $G = \pi/2 - 1 \approx 0.57\ldots$.

Достаточно высокий коэффициент Джини показывает существенно неравномерное распределение доходов среди населения в рассматриваемой стране.

Глава 6

Ряды

6.1 Знакопостоянные ряды

Определение 6.1.1. *Знакопостоянные ряды* имеют вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где все a_n одного знака. Например, если выполнено $a_n \geq 0$ для любого натурального n, либо выполнено $a_n \leq 0$ для всех натуральных n.

Определение 6.1.2. Частичную сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ будем обозначать через $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n$.

Определение 6.1.3. Ряд сходится, если существует и конечен следующий предел

$$S = \lim_{N\to+\infty} S_N,$$

который по определению мы называем суммой ряда.

П р и м е р 6.1.1. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Справедливо

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}\right) = 1 - \frac{1}{N+1}.$$

Поскольку $\lim\limits_{N\to+\infty} S_N$ существует и равен единицы, то исходный ряд сходится и его сумма равна 1.

Теорема 6.1.1 (критерий Коши)**.** *Ряд сходится тогда и только тогда, когда* $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geqslant N,\ n \geq m \quad |a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n| \leq \varepsilon$.

Доказательство. Применяем, уже доказанный, критерий Коши к последовательности $\{S_N\}_{N=1}^{+\infty}$. □

Замечание 51. Сделаем важный вывод о том, что любое конечное число слагаемых в сумме не влияет на сходимость ряда. Т.е. сходимость рядов $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} a_n$ для произвольного натурального $N \in \mathbb{N}$ равносильны. Суммы этих двух рядов, конечно же различны для $N \neq 1$.

П р и м е р 6.1.2. Рассмотрим *гармонический* ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$. Используя отрицание критерия Коши докажем, что гармонический ряд расходится. Пусть $\varepsilon = 1/2$. Положим $m = N$, $n = 2N$, тогда

$$\frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} + \cdots + \frac{1}{2N} > N \cdot \frac{1}{2N} = \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом гармоническиий ряд расходится.

Следствие 6.1.1 (необходимый признак сходимости)**.** Если ряд сходится $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Данным признаком пользуемся следующим образом: если $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \neq 0$ либо предел не существует, то ряд расходится. Если предел существует и равен нулю, то осделать выводы о сходимости или расходимости ряда нельзя, требуется дополнительное иследование.

П р и м е р 6.1.3. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^{-\frac{1}{n}}$. Поскольку

$$\lim_{n\to+\infty} n^{-\frac{1}{n}} = 1,$$

то исходный ряд расходится.

Теорема 6.1.2 (сравнения)**.** *Даны два ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *с неотрицательными коэффициентами* $a_n, b_n \geq 0$ *и некоторая положительная константа* $C > 0$.

1) Если $\forall n \geq N_0 \quad a_n \leq Cb_n$*;* (B) *- сходится* $\Rightarrow$ (A) *- сходится;* (A) *- расходится* $\Rightarrow$ (B) *- расходится.*

2) Если $\forall n \geq N_0$, $a_n, b_n > 0 \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ (B) *- сходится* $\Rightarrow$ (A) *- сходится;* (A) *- расходится* $\Rightarrow$ (B) *- расходится.*

3) Если $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$, $b_n > 0, \forall n > N_0, 0 < k < +\infty \Rightarrow (A) \Leftrightarrow (B)$ *- сходятся (расходятся) одновременно.*

Доказательство. 1) Из оценки $0 \leqslant a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n \leqslant C(b_m + \ldots + b_n)$, получаем, если (B) - сходится, то правая часть $< \varepsilon \Rightarrow (A)$ - сходится, др. аналогично (критерий Коши).

2)Без потери общности будем считать, что выполняется для $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{a_2}{a_1} \leq \frac{b_2}{b_1}, \frac{a_3}{a_2} \leq \frac{b_3}{b_2}, \ldots, \frac{a_{N+1}}{a_N} \leq \frac{b_{N+1}}{b_N}$, перемножим все неравенства, получим $\frac{a_{N+1}}{a_1} \leq \frac{b_{N+1}}{b_1} \Rightarrow a_k < \frac{a_1}{b_1} b_k$.

3) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n > N \quad b_n(K - \varepsilon) \leq a_n \leq b_n(K + \varepsilon)$, из 1) получаем требуемое. □

П р и м е р 6.1.4. Исследовать вопрос о сходимости для ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\cos^{-1}\frac{1}{n}\right)$.

Решение. Поскольку

$$\ln\left(\cos^{-1}\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{2n^2}, \quad (n \to +\infty),$$

то можно сделать вывод из теоремы сравнения о том, что исходный ряд и ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^2}$ либо сходится одновременно, либо расходятся. Теперь из оценки

$$0 \leqslant \frac{1}{2n^2} \leqslant \frac{1}{n(n+1)}$$

и того, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ сходится (см. пример 6.1.1) делаем вывод опять из теоремы сравнения о том, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^2}$ также сходится, а следовательно и исходный. □

6.1.1 Признаки Коши (радикальный и интегральный)

Теорема 6.1.3 (признак Коши о сходимости ряда)**.** *Рассмотрим ряд* $\sum c_n$, $c_n \in \mathbb{C}$. *Пусть* $q = \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$. *Тогда*

- $q < 1$ *- ряд сходится, причём абсолютно;*
- $q > 1$ *- ряд расходится;*
- $q = 1$ *- неизвестно сходится или расходится. Требуется дополнительное исследование.*

Доказательство. Доказательсто сводиться к сравнению с геометрической прогрессии для доказательства сходимости и применению необходимого признака сходимости для доказательства расходимости.

a. Пусть
$$q = \overline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_n|} < 1.$$
Тогда существует $\tilde{q} \in (q; 1)$ такое, что $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad \sqrt[n]{|c_n|} < \tilde{q} < 1$. Откуда
$$|c_n| < (\tilde{q})^n, 0 < \tilde{q} < 1.$$
Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(\tilde{q})^n$ сходится (бесконечная убывающая геометрическая прогрессия), то из признака сравнения вытекает, что исходный ряд также сходится.

b. Если
$$\overline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_n|} > 1,$$
то существует подпоследовательность $\{n_k\}_{k=1}^{+\infty}$ натурального ряда такая, что $\lim_{k\to+\infty} \sqrt[n_k]{|c_{n_k}|} > 1$. Следовательно, существует такое натуральное число N, что для любого $k > N$ выполняется $\sqrt[n_k]{|c_{n_k}|} > 1$. Откуда $|c_{n_k}| > 1$ для всех натуральных $k > N$. Необходимый признак сходимости не выполнен, т.е. ряд расходится.

c. Приведём примеры $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ — расходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ — сходится. Вопросы сходимости и расходимости данных рядов можно доказать напрямую, но легче сослаться на интегральный признак, который будет доказан ниже.

□

П р и м е р 6.1.5. Исследовать вопрос о сходимости для ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2+(-1)^n}{3^n}$.

Решение. Воспользуемся признаком Коши, согласно которому
$$q = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{\frac{2+(-1)^n}{3^n}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{3}{3^n}} = \frac{1}{3} < 1.$$
Следовательно ряд сходится. □

Теорема 6.1.4 (интегральный признак Коши)**.** *Пусть функция $f(x)$ — монотонна на $[1; +\infty)$ и $a_n = f(n)$. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \Leftrightarrow \int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ — сходятся (расходятся) одновременно.*

Замечание 52. Вместо единицы как в интеграле, так и в сумме можно подставить произвольное $N \in \mathbb{N}$, т.е. теорема будет утверждать о равносильности сходимости или расходимости ряда $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n$ и интеграла $\int\limits_N^{\infty} f(x)dx$.

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что функция $f(x)$ монотонно убывает (см. рис. 6.3). Предположим, что $\lim_{x\to+\infty} f(x) \neq 0$ (см. рис. 6.1, 6.2), но тогда, как это следует из необходимых признаков сходи-

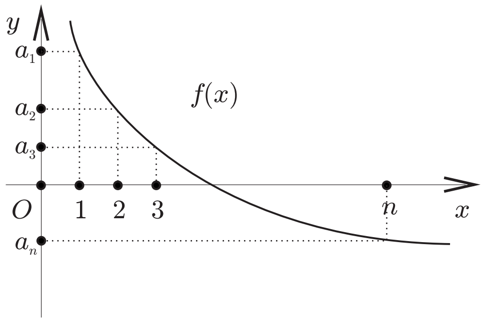


Рис. 6.1:

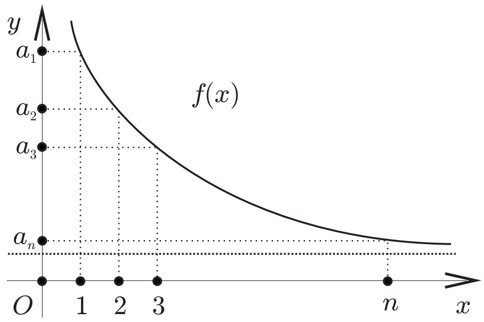


Рис. 6.2:

мости ряда и несобственного интеграла и ряд и интеграл расходятся. Поэтому будем считать, что $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Тогда из монотонного убывания вытекает, что $f(x) \geqslant 0$ для любого $x \geqslant 1$. Справедливы следующие неравенства:

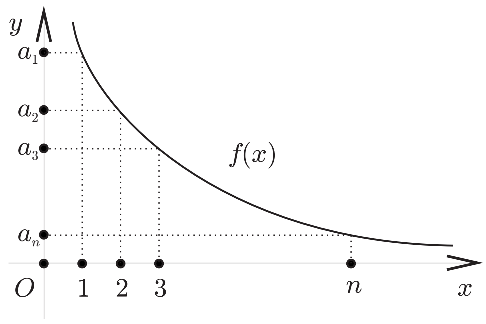


Рис. 6.3:

$$\begin{aligned} a_1 \geq f(x) \geq a_2,\ x \in [1,2],\\ a_2 \geq f(x) \geq a_3,\ x \in [2,3],\\ \dots,\\ a_N \geq f(x) \geq a_{N+1},\ x \in [N, N+1]. \end{aligned}$$

Интегрируем каждое неравенство по отрезку и суммируем:

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \geq \int\limits_1^{N+1} f(x)dx \geq \sum_{n=2}^{N+1} a_n.$$

Из последних неравенств вытекает, что если ряд сходится, то интеграл сходится, и наоборот, если интеграл сходится, то ряд сходится, а также расходимость ряда влечёт расходимость несобственного интеграла, и наоборот, расходимость несобственного интеграла влечёт расходимость ряда.

Поясним сказанное: пусть, например ряд сходится тогда из неравенства $\sum_{n=1}^{N} a_n \geq \int\limits_1^{N+1} f(x)dx$ и $S = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n$, где S сумма ряда, вытекает оценка $S \geqslant \int_1^{N+1} f(x)dx$. Таким образом функция $g(t) = \int_1^t f(x)dx$ монотонно возрастает (ввиду неотрицательности функции $f(x)$) и ограничена сверху. Следовательно, по теореме Вейерштрасса существует конечный предел $\lim_{t\to+\infty} g(t)$ или, иначе говоря, сходится несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$. $\square$

П р и м е р 6.1.6. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$, $p \in \mathbb{R}$. Справедливо

a. Пусть $p < 0$. Тогда $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. Следовательно не выполнен необходимый признак сходимости и ряд расходится.

b. Пусть $p = 0$. Тогда $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$. Следовательно, как и ранее, не выполнен необходимый признак сходимости и ряд расходится.

c. Случай $p \leqslant 0$ мы разобрали использую необходимый признак сходимости, но можно сразу для любого $p \in \mathbb{R}$ решить вопрос о сходимости при помощи интегрального признака. Действительно, поскольку функция $f(x) = \frac{1}{x^p}$ — монотонна при любом $p \in \mathbb{R}$, то сходимость ряда определим по поведению несобственного интеграла. Интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$, как нам известно, сходится при $p > 1$ и расходится при других $p \leqslant 1$. Значит сумма ведёт себя таким же образом.

Замечание 53. Из теоремы Вейерштрасса вытекает, что если монотонная последовательность возрастает и ограничена, тогда у последовательности существует конечный предел. Таким образом, если $a_n \geq 0, \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq C$, то ряд (A) - сходится.

6.1.2 Признак Куммера и Гаусса

Теорема 6.1.5 (признак Куммера). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, $a_n, c_n > 0$. *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ *— расходится и существует* *предел* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(c_n\frac{a_n}{a_{n+1}}-c_{n+1}\right)=k$. *Тогда*

- *если* $k>0\Rightarrow(A)$, *то ряд (A) сходится;*
- *если* $k<0$, *то ряд (A) расходится;*
- *если* $k=0$, *то ряд (A) может как сходится, так и расходится.*

Доказательство. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $k>0$. Тогда $\forall n\geq N_0\quad c_n\frac{a_n}{a_{n+1}}-c_{n+1}\geq\delta>0$, $c_na_n-c_{n+1}a_{n+1}\geq\delta a_{n+1}>0$, $c_na_n>c_{n+1}a_{n+1}>0\Rightarrow c_na_n\downarrow\Rightarrow\exists\lim\limits_{n\to+\infty}a_nc_n$, суммируя, получим

$$\sum_{n=N_0}^{N_1}(c_na_n-c_{n+1}a_{n+1})=c_{N_0}a_{N_0}-c_{N_1+1}a_{N_1+1}\geq\delta\sum_{n=N_0}^{N_1}a_n,\ N_1\to+\infty$$

откуда следует, что частичные суммы ограничены сверху $\Rightarrow$ [т.к. ряд знакопостоянный] ряд сходится.

2. Пусть $k<0$. Тогда $c_n\frac{a_n}{a_{n+1}}-c_{n+1}\leq 0$, или что равносильно $\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq\frac{c_n}{c_{n+1}}=\frac{\frac{1}{c_{n+1}}}{\frac{1}{c_n}}$. Откуда из признака сравнения из расходимости $\left(\frac{1}{C}\right)$ следует, что ряд (A) также расходится.

□

Следствие 6.1.2 (признак Даламбера)**.** Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$, $a_n>0$ существует предел

$$q=\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Тогда если $q<1$ ряд сходится, $q>1$ ряд расходится, в случае $q=1$ требуется дополнительное иследование.

Доказательство. Пусть $c_n=1$, применим признак Куммера $k=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{D_n}-1\right),D_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}$; $q=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ - расходится, <1 - сходится. □

Следствие 6.1.3 (признак Раабе)**.** Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$, $a_n>0$ существует предел

$$R=\lim_{n\to+\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right).$$

Тогда если $R>1$ ряд сходится, $R<1$ ряд расходится, в случае $R=1$ требуется дополнительное иследование.

Замечание 54. Условие существования предела равносильно следующему равенству

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{R}{n}\cdot(1+o(1)),\quad n\to+\infty.$$

Доказательство. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,a_n>0$, $c_n=n$; $n\frac{a_n}{a_{n+1}}-(n+1)=n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1=R_n-1$. Если $\lim\limits_{n\to+\infty}R_n=R\in\mathbb{R}$, $R>1$ - ряд сходится, если <1 - расходится. □

Следствие 6.1.4 (признак Бертрана)**.** Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$, $a_n>0$ существует предел

$$B=\lim_{n\to+\infty}\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right)\ln n.$$

Тогда если $B>1$ ряд сходится, $B<1$ ряд расходится, в случае $B=1$ требуется дополнительное иследование.

Замечание 55. Условие существования предела равносильно следующему равенству

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{B}{n \ln n} \cdot (1 + o(1)), \quad n \to +\infty.$$

Доказательство. Пусть $c_n = n \ln n$. Тогда ряд $\sum \frac{1}{n \ln n}$ — расходится. Рассмотрим выражение из признака Куммера:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} n \ln n - (n+1) \ln (n+1) = \ln n \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) - (n+1) \ln (n+1) + (n+1) \ln n.$$

Справедливо

$$-(n+1) \ln (n+1) + (n+1) \ln n \to -1, n \to +\infty.$$

Положим $B_n = \ln n \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right)$. Тогда из признака Куммера вытекает, что для константы $B = \lim\limits_{n\to+\infty} B_n$ возможны два случая. Если $B > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится, если $B < 1$, то расходится. □

Следствие 6.1.5 (признак Гаусса). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0$. Если

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right), n \to +\infty,$$

то если $\lambda > 1$ - ряд сходится, $\lambda = 1, \mu > 1$ - сходится; иначе расходится.

Доказательство. Доказательство данной теоремы сводится к рассмотрению нескольких случаев.

- Пусть $\lambda > 1$ либо $\lambda < 1$. Тогда утверждение теоремы вытекает из признака Даламбера;
- Пусть $\lambda = 1$, а $\mu > 1$ либо $\mu < 1$. Тогда утверждение теоремы вытекает из признака Раабе. Действительно, $n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \mu + o\left(\frac{1}{\ln n}\right), \lim R_n = \mu$;
- Пусть $\lambda = \mu = 1$. Тогда утверждение теоремы вытекает из признака Бертрана. Действительно, $n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 = o\left(\frac{1}{\ln n}\right)$, умножая на $\ln n$, получим $B_n = o(1) \Rightarrow B = 0$.

□

П р и м е р 6.1.7. Исследовать вопрос о сходимости для ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{7 \cdot n!}{(an)^n}$ при $a = 1$ и при $a = 1/3$.

Решение. Воспользуемся признаком Даламбера, согласно которому

$$q = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{7 \cdot (n+1)!}{(a(n+1))^{n+1}} \cdot \frac{(an)^n}{7 \cdot n!} \right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{a} \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \right) = \frac{1}{a \cdot e}.$$

Следовательно при $a = 1$ получаем $q = 1/e < 1$, т.е. по признаку Даламбера ряд сходится. При $a = 1/3$ получаем $q = 3/e > 1$, т.е. по признаку Даламбера ряд расходится. □

П р и м е р 6.1.8. Исследовать вопрос о сходимости для ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{7 \cdot n!}{(an)^n}$ при всех положительных a.

Решение. Согласно предыдущему примеру и признаку Даламбера, можно сделать вывод, что

- при $a > 1/e$ ряд сходится;
- при $a \in (0; 1/e)$ ряд расходится;
- на случай $a = 1/e$ признак Даламбера вопрос о сходимости ряда не даёт ответа. Попробуем использовать признак Гаусса[1]

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{e} \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \frac{1}{e} \cdot e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = e^{-1 + n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)} =$$

$$= e^{-\frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)} = 1 - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (n \to +\infty).$$

Следовательно, по признаку Гаусса с параметрами $\lambda = 1$, $\mu = -1/2$ данный ряд расходится.

[1] Для случая $a = e$ можно было бы решить задачу и при помощи признака Раабе.

□

Из признака Куммера можно получить гораздо больше признаков, чем приведено выше. Помимо таких, например, как признаки Даламбера, Раабе, Гаусса. Для сравнения признаков обычно дается пример $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$. По интегральному признаку Коши легко получить, что данный ряд в случае $p>1$ сходится, а иначе $p\leqslant 1$ расходится. Если же попытаться применить признак Гаусса, то получаем

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{1}{n}+\frac{p}{n\ln n}+O\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right),\quad (n\to+\infty), \tag{6.1.1}$$

где за a_n обозначено $\frac{1}{n(\ln n)^p}$. Т.е. признак Гаусса оказывается бессилен. Можно предложить усилить признак Гаусса (на основе признака Куммера) следующим образом

Теорема 6.1.6. *Пусть для произвольной последовательности a_n с положительными членами выполнено*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lambda_1+\frac{\lambda_2}{n}+\frac{\lambda_3}{n\ln n}+\frac{\lambda_4}{n\ln n\ln\ln n}+$$
$$+\frac{\lambda_5}{n\ln n\ln\ln n\ln\ln\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n\ln\ln n\ln\ln\ln n\ln\ln\ln\ln n}\right),\quad (n\to+\infty),$$

тогда если

$$\begin{aligned}
&\lambda_1>1,\\
&\lambda_1=1,\ \lambda_2>1,\\
&\lambda_1=1,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3>1,\\
&\lambda_1=1,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=1,\ \lambda_4>1,\\
&\lambda_1=1,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=1,\ \lambda_4=1,\ \lambda_5>1,
\end{aligned}$$

то ряд сходится. Иначе данный ряд расходится.

Теперь уже можно сказать когда ряд $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$ сходится, это сразу вытекает из разложения (6.1.1). И вообще говоря, можно было всего лишь одной индукцией усилить признак Гаусса,то есть из разложения

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lambda_1+\frac{\lambda_2}{n}+\frac{\lambda_3}{n\ln n}+\sum_{k=2}^{m}\frac{\lambda_{k+2}}{n\ln n\cdot\ln\ln n\cdot\dots\cdot\underbrace{\ln\ln\dots\ln}_{k-\text{раз}} n}+$$
$$+o\left(\frac{1}{n\ln n\cdot\ln\ln n\cdot\dots\cdot\underbrace{\ln\ln\dots\ln}_{m-\text{раз}} n\cdot\underbrace{\ln\ln\dots\ln}_{m+1-\text{раз}} n}\right),\quad (n\to+\infty),$$

сделать вывод о сходимости знакопостоянного ряда $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$. Доказательство данного утверждения можно посмотреть, например, в [9].

Ещё одно доказательство признака Гаусса в более слабой формулировке

Лемма 31. *Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, $a_n>0$ для любого $n\in\mathbb{N}$. Пусть справедливо равенство*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{\mu}{n}+\alpha_n,$$

где $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ абсолютно сходящийся ряд. Тогда существует константа $C>0$ такая, что $a_n\sim C/n^\mu$.

Доказательство. Справедливо равенство

$$\ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)=\ln\left(1+\frac{\mu}{n}+\alpha_n\right)=\frac{\mu}{n}+\alpha_n+\frac{(\frac{\mu}{n}+\alpha_n)^2}{2}\cdot(1+o(1))=\frac{\mu}{n}+\beta_n,$$

где $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\beta_n$ абсолютно сходящийся ряд.

$$\ln\left(\frac{a_1}{a_n}\right)=\left(\frac{a_1}{a_2}\right)+\left(\frac{a_2}{a_3}\right)+\dots+\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\mu}{n}+\sum_{k=1}^{n}\beta_n=\mu\ln n+C^*+o(1),\quad n\to+\infty.$$

Здесь использовали равенства

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}=\ln n+\gamma+o(1),\quad n\to+\infty,$$
$$\sum_{k=1}^{n}\beta_n=B+o(1),\quad n\to+\infty.$$

где γ — константа Эйлера. Откуда

$$\frac{a_1}{a_n}=\exp\left(\ln\left(\frac{a_1}{a_n}\right)\right)=\exp\left(\mu\ln n+C^*+o(1)\right)\sim n^{\mu}\cdot e^{C^*},\quad n\to+\infty.$$

□

Теорема 6.1.7 (признак Гаусса). *Рассмотрим знакопостоянный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n, a_n>0$. Пусть для некоторого $\varepsilon>0$ выполнено равенство*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lambda+\frac{\mu}{n}+O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right), n\to+\infty.$$

Тогда если $\lambda>1$ - ряд сходится, $\lambda=1,\mu>1$ - сходится; иначе расходится.

Доказательство. Поскольку

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{\lambda}+o(1),\quad n\to+\infty,$$

то из признака Даламбера вытекает, что в случае $\lambda>1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, в случае $\lambda<1$ расходится.

Пусть $\lambda=1$. Положим $\alpha_n=O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ абсолютно сходится. Тогда согласно лемме существует константа $C>0$ такая, что $a_n\sim C/n^{\mu}$, $n\to+\infty$. Откуда и следует утверждение теоремы. □

Контрольные вопросы.

1. Сформулируйте признаки Коши (радиальный и интегральный).
2. Сформулируйте признак Даламбера.
3. Сформулируйте признак Гаусса.

Упражнения к 6.1

Упражнение 6.1.1. *Исследуйте на сходимость ряды (здесь $p\in\mathbb{R}$):*

$(a)\ \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{5+(-1)^n}{2^n}$; $(b)\ \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n+\ln n}{3^n}$; $(c)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\ln n}$; $(d)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} n}{n+1}$;

$(e)\ \sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sin^3(n!)}{n\ln^2 n}$; $(f)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+p}{3n^2+1}$; $(g)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\sin(1/n))}{n^p}$; $(h)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{3}{n}\right)$.

Упражнение 6.1.2. *Исследуйте на сходимость ряды (здесь $p\in\mathbb{R}$):*

$(a)\ \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$; $(b)\ \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n(n!)^2}{4\cdot 11\cdot\ldots\cdot(2n^2+n+1)}$; $(c)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!e^n}{n^{n+p}}$.

Упражнение 6.1.3. *Исследуйте на сходимость ряд (здесь $p,q,s\in\mathbb{R}$):*

$$\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{s}{3\ln 3\ln\ln 3}\right)\left(1+\frac{s}{4\ln 4\ln\ln 4}\right)\ldots\left(1+\frac{s}{n\ln n\ln\ln n}\right)}\cdot\frac{n^q}{\ln^p n}.$$

Ответы: 6.1.1 (c), (d), (f) — расходятся, все остальные сходятся. **6.1.2** (a), (b) — расходятся, (c) при $p>3/2$ — сходится, при $p\leqslant 3/2$ — расходится. **6.1.3** при $q<-1$ ряд сходится, при $q>-1$ расходится; при $q=-1$, $p>1$ сходится, при $q=-1$, $p<1$ расходится; при $q=-1$, $p=1$, $s>1$ сходится, при $q=-1$, $p=1$, $s\leqslant 1$ расходится.

6.2 Знакопеременные ряды

Определение 6.2.1. *Знакопеременными рядами* называются ряды, которые не обладают свойством знакопостоянства. Например ряд $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n a_n$, $a_n > 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$ называется *знакочередующимся рядом.*

Введём обозначение $A_l = \sum\limits_{k=m-1}^{l} a_k$. Тогда справедливо $a_k = A_k - A_{k-1}$.

Преобразование Абеля.

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=m}^{n} A_k b_k - \sum_{k=m}^{n} A_{k-1} b_k$$

Сделав замену $\tilde{k} = k - 1$, продолжим

$$\sum_{k=m}^{n} A_k b_k - \sum_{\tilde{k}=m-1}^{n-1} A_{\tilde{k}} b_{\tilde{k}+1} = \sum_{k=m}^{n} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_{n+1} - A_{m-1} b_m.$$

Таким образом, получено равенство:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_{n+1} - A_{m-1} b_m,$$

которое и называется преобразованием Абеля.

Лемма 32. *Если b_n — монотонная последовательность, то*

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k b_k\right| \leq 4 \underline{\max_{k=m-1,n}} |A_k| \cdot \max\{|b_m|, |b_{n+1}|\}.$$

Доказательство.

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k b_k\right| \leq (\max |A_k|) \cdot \left|\sum |b_k - b_{k+1}| + |b_{n+1}| + |b_m|\right|,$$

т.к. b_n - монотонная, то $\sum |b_k - b_{k+1}| = |b_{n+1} - b_m|$. □

Теорема 6.2.1 (признак Дирихле). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. *Если для* $\forall N$ $\left|\sum\limits_{k=1}^{N} a_k\right| \leq c$ *и* $b_n \downdownarrows_0 \Rightarrow$ *ряд сходится.*

Доказательство. Воспользуемся предыдущей леммой. $\max |A_k|$ - ограничен. $\max\{|b_m|, |b_{n+1}|\}$ - может быть сколь угодно малым. Делаем сумму $< \varepsilon$ и по критерию Коши получаем, что ряд сходится. □

Теорема 6.2.2 (признак Абеля). *Если b_n — монотонная ограниченная последовательность и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.*

Доказательство. Воспользуемся леммой. $\max |A_k| \to 0$, критерий Коши, $\max\{|b_m|, |b_{n+1}|\}$ - ограничен. □

Замечание 56. Признак Абеля можно было бы доказать используя признак Дирихле. Действительно, пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Поскольку b_n — монотонная и ограниченная, то существует конечный предел $\lim_{n\to+\infty} b_n$, который обозначим через b. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(b_n - b) + b\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Теперь первый ряд сходится по признаку Дирихле, а второй по условию.

Следствие 6.2.1 (признак Лейбница)**.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot b_n, b_n \geq 0(\leq 0)$, если $b_n \downdownarrows_0 \Rightarrow$ ряд сходится.

Доказательство. По признаку Дирихле при $a_n = (-1)^{n+1}$ получаем требуемое. □

П р и м е р 6.2.1. Доказать равенство

$$\sum_{n=0}^{N} \sin nx = \frac{\sin\frac{N+1}{2}x \cdot \sin\frac{N}{2}x}{\sin\frac{x}{2}};$$

$$\sum_{n=0}^{N} \cos nx = \frac{\sin\frac{N+1}{2}x \cdot \cos\frac{N}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Данные равенства часто бывают полезными при исследовании вопроса о сходимости ряда при помощи признака Дирихле. Действительно,

$$\sum_{n=0}^{N} e^{inx} = \frac{1-e^{i(N+1)x}}{1-e^{ix}} = \frac{e^{i\frac{N+1}{2}x}\left(e^{-i\frac{N+1}{2}x} - e^{i\frac{N+1}{2}x}\right)}{e^{i\frac{x}{2}}\left(e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}\right)} =$$

$$= e^{i\frac{N}{2}x}\cdot\frac{\sin\frac{N+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} = \left(\cos\frac{N}{2}x + i\sin\frac{N}{2}x\right)\cdot\frac{\sin\frac{N+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Остается отделить вещественную часть и мнимую.

П р и м е р 6.2.2. Исследовать на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\pi/8)}{n^p}, \quad p\in\mathbb{R}.$$

a. Из предыдущего примера вытекает:

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\sin(n\pi/8)\right| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\pi}{16}},$$

для любого натурального $\mathbb{N}$. Поскольку при $p > 0$ последовательность $b_n = \frac{1}{n^p}$ монотонно убывает к нулю, то из признака Дирихле вытекает сходимость исходного ряда при $p > 0$.

b. Пусть $p \leqslant 0$. Тогда

$$\lim_{m\to+\infty}\frac{\sin\frac{(4+16m)\pi}{8}}{(4+16m)^p} = \lim_{m\to+\infty}\frac{1}{(4+16m)^p} \neq 0, \quad p\leqslant 0,$$

т.е. не выполняется необходимый признак сходимости ряда, следовательно исходный ряд расходится.

Ответ. При $p > 0$ ряд сходится; при $p \leqslant 0$ — расходится.

Теорема 6.2.3 (признак сходимости). *Если для знакочередующегося ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot b_n$, $b_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ *справедливо разложение* $\frac{b_n}{b_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), n \to +\infty$, *то*

- *в случае* $\lambda > 1$ *ряд сходится (причем абсолютно), в случае* $\lambda = 1$, $\mu > 0$ *— сходится;*
- *в случае* $\lambda < 1$ *либо* $\lambda = 1$, $\mu < 0$ *— расходится;*
- *в случае* $\lambda = 1$, $\mu = 0$ *— требуется дополнительное исследование.*

Доказательство. **1.** В случае $\lambda > 1$ достаточно взять ряд из модулей: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ и сослаться на признак Даламбера. В случае $\lambda < 1$ получаем расходимость, поскольку не выполняется необходимый признак сходимости.

2. Случай $\lambda = 1$, $\mu > 0$.

1а) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \quad 1 + \frac{\mu - \varepsilon}{n} < \frac{b_n}{b_{n+1}} < 1 + \frac{\mu+\varepsilon}{n}$; $\varepsilon = \frac{\mu}{2}$, тогда

$$1 + \frac{\mu}{2N} \leq \frac{b_N}{b_{N+1}} < 1 + \frac{3\mu}{2N}$$

$$\ldots$$

$$1 + \frac{\mu}{2m} \leq \frac{b_m}{b_{m+1}} < 1 + \frac{3\mu}{2m},$$

перемножим все неравенства, получим

$$\prod_{k=N}^{m}\left(1 + \frac{\mu}{2k}\right) \leq \frac{b_N}{b_{m+1}} \leq \prod_{k=N}^{m}\left(1 + \frac{3\mu}{2k}\right),$$

$$0 < b_{m+1} < \frac{b_N}{\prod\left(1 + \frac{\mu}{2k}\right)} \leq \frac{b_N}{1 + \frac{\mu}{2N} + \ldots + \frac{\mu}{2m}} \Longrightarrow b_{m+1} \to +0, m \to +\infty.$$

1б) b_n монотонная, $\frac{b_n}{b_{n+1}} > 1$, т.к. $\mu > 0 \Rightarrow$ [признак Лейбница] ряд сходится.

3. Случай $\lambda = 1$, $\mu < 0$. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad \frac{b_n}{b_{n+1}} < 1$, не выполняется необходимый признак сходимости, т.е. ряд расходится.

□

Данная теорема несложно обощается на более общий вид:

Теорема 6.2.4. *Рассмотрим знакопеременный ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot b_n$, *где для положительных членов* $b_n > 0$ *выполнено*

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{n} + \frac{\lambda_3}{n\ln n} + \sum_{k=2}^{m} \frac{\lambda_{k+2}}{n \ln n \cdot \ln\ln n \cdot \cdots \cdot \underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{k-раз} n} +$$

$$+ o\left(\frac{1}{n \ln n \cdot \ln\ln n \cdot \cdots \cdot \underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{m-1-раз} n \cdot \underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{m-раз} n}\right), \quad (n \to +\infty),$$

тогда если

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 > 1,\\
&\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 > 0,\\
&\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 > 0,\\
&\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 0,\ \lambda_4 > 0,\\
&\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 0,\ \lambda_4 = 0,\ \lambda_5 > 0,\\
&\dots\\
&\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 0,\ \dots\lambda_{m+1} = 0,\ \lambda_{m+2} > 0.
\end{aligned}$$

то ряд сходится. Иначе, кроме случая, когда $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_i = 0$, $i = 2, \dots, m+2$, данный ряд расходится. Случай $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_i = 0$, $i = 2, \dots, m+2$ зависит от поведения о-малого, поэтому из данного разложения вывод о сходимости или расходимости сделать невозможно.

6.2.1 Действия над рядами

Определение 6.2.2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется абсолютно сходящимся, если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится.

Определение 6.2.3. Ряд называется условно сходящимся, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ - расходится.

Теорема 6.2.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *- сходятся $a_n, b_n > 0 (< 0), \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$. Тогда $\sum(a_n \pm b_n), \sum \alpha a_n$ - сходятся.*

Доказательство. По критерию Коши $|(a_n \pm b_n) + \ldots + (a_m \pm b_m)| \leq |a_n + \ldots + a_m| + |b_n + \ldots + b_m| < \varepsilon$, др. тоже легко. ☐

Лемма 33. *Рассмотрим знакопостоянный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n \geqslant 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Если данный ряд сходится к $S \in \mathbb{R}$, то тогда ряд, полученный при помощи любой его перестановки, также сходится к данному числу, т.е. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\delta(n)} = S$, где δ — произвольная перестановка множества $\mathbb{N}$.*

Доказательство. $S'_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{\delta(k)}$, $N = \max\limits_{k=\overline{1,n}}(\delta(k))$, $S'_n \leq S_N \leq S$. Таким образом последовательность $\{S'_n\}_{n=1}^{+\infty}$ монотонно возрастает и ограничена сверху. Следовательно $\sum a_{\delta(n)} = S'$ — сходится; доказано, что $S' \leq S$.

Также справедливо неравенство и в другую сторону $S \leq S'$. Поскольку исходный ряд является перестановочным к ряду $\sum a_{\delta(n)}$. ☐

Теорема 6.2.6 (о перестановке абсолютно сходящегося ряда)**.** *$\sum a_n$ - абсолютно сходится к $S \in \mathbb{R}$. Тогда $\sum a_{\tau(n)}$ - абсолютно сходится к $S \in \mathbb{R}$, где $\tau :\ \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ — произвольная перестановка натурального ряда.*

Доказательство. Положим

$$a_n = a_n^+ - a_n^-, \quad a_n^+ = \max\{0, a_n\}, \quad a_n^- = \max\{0, -a_n\}.$$

Тогда $|a_n^\pm| \leq |a_n|$. Ряды $\sum a_n^\pm$ — сходятся. Откуда

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N} a_n^+ - \sum_{n=1}^{N} a_n^- \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^-.$$

Поскольку $\sum_{n=1}^{N} a^+_{\tau(n)} - \sum_{n=1}^{N} a^-_{\tau(n)} = \sum_{n=1}^{N} a_{\tau(n)}$, то из лемме получаем требуемое. $\square$

Теорема 6.2.7 (Римана). *Пусть $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ — условно сходится. Тогда $\forall S \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ существует перестановка $\tau:\ \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ натурального ряда такая, что $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\tau(n)} = S$.*

Доказательство. Сначала докажем простое утверждение, а далее проведём доказательство для случая $S \in \mathbb{R}$ и $S = \pm\infty$.

- *Если ряд $\sum a_n$ — условно сходится, то ряды $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^-$ расходятся.*

  Действительно, из равенства $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$ и расходимости ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ вытекает, что хотя бы один из рядов $\sum a_n^-$, $\sum a_n^+$ — расходится. Пусть, например, $\sum a_n^+$ - расходится, тогда $\sum_{n=1}^{N} a_n^- = \sum_{n=1}^{N} a_n^+ - \sum_{n=1}^{N} a_n \Rightarrow \sum a_n^-$ — расходится. Таким образом, оба ряда $\sum a_n^\pm$ расходятся.

- 1) $|S| < \infty$, будем суммировать члены последовательности a_n^+ до тех пор, пока сумма впервые не превысит S:
$$S_1 = a_1^+ + \ldots + a_{k_1}^+ > S > a_1^+ + \ldots + a_{k_1-1}^+,$$
  затем будем вычитать из S_1 члены последовательности a_n^- до тех пор, пока сумма впервые не станет меньше S:
$$S_2 = S_1 - a_1^- - \ldots - a_{l_1}^- < S < S_1 - a_1^- - \ldots - a_{l_1-1}^-,$$
  и т.д. $|S - S_{2n}| < |a_{l_n}^-|$; $|S - S_{2n-1}| < |a_{k_n}^+|$. $\sum a_n$ - сходится $\Rightarrow$ выполняется необходимое условие сходимости $\Rightarrow$ ряд сходится к S.

- 2) $S = +\infty$ ($S = -\infty$ - аналогично).
$$\begin{aligned} S_1 =& a_1^+ + \ldots + a_{k_1}^+ > 1;\\ S_2 =& S_1 - a_1^- + a_{k_1+1}^+ + \ldots + a_{k_2}^+ > 2;\\ S_3 >& 3; \ldots; S_n > n. \end{aligned}$$

$\square$

П р и м е р 6.2.3. Переставить коэффициенты условно сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ так, чтобы ряд, составленный из переставленых членов ряд стал расходящимся.

Доказательство. Перегруппируем члены ряда следующим образом: сначала возьмём два положительных коэффициентов ряда, потом один отрицательный и т.д., т.е.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} = \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{6}}\right) + \ldots =$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}}\right).$$

Посмотрим на асимптотику членов данного ряда.

$$a_n = \left(\frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{4n}} + \frac{1}{\sqrt{4n}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится, ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ знакопостояннен и $a_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$, $n \to +\infty$. Следовательно ряд из $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ также расходится. $\square$

6.2.2 Произведение рядов

Пусть у нас имеются два ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$, мы хотим определить произведение этих рядов. Например, частичную сумму можно определить таким образом (см. рис. 6.4)

$$\begin{aligned}
S_1 =& a_1 b_1;\\
S_2 =& a_1 b_1 + (a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_2);\\
S_3 =& a_1 b_1 + (a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_2) + (a_3 b_1 + a_3 b_2 + a_3 b_3 + a_2 b_3 + a_3 b_3);\\
&\ldots;\\
S_N =& a_1 b_1 + (a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_2) + (a_3 b_1 + a_3 b_2 + a_3 b_3 + a_2 b_3 + a_3 b_3) + \left(\sum_{k=1}^{N} a_N b_k + \sum_{k=1}^{N-1} a_k b_N\right).
\end{aligned}$$

Но, более распространённо определение произведения рядов в смысле Коши (см. рис. 6.5), т.е. частичную сумму мы определяем следующим образом

$$\begin{aligned}
S_1 =& a_1 b_1;\\
S_2 =& a_1 b_1 + (a_2 b_1 + a_1 b_2);\\
S_3 =& a_1 b_1 + (a_2 b_1 + a_1 b_2) + (a_3 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_3);\\
&\ldots;\\
S_N =& a_1 b_1 + (a_2 b_1 + a_1 b_2) + (a_3 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_3) + \left(\sum_{k=1}^{N} a_{N+1-k} b_k\right).
\end{aligned}$$

Частичную сумму произведения рядов можно ввести и другими способами, поэтому и сходимость произведения рядов будет зависить от того, каким способом мы определяем частичную сумму. Например, $S_N = \left(\sum_{k,l\in\mathbb{N}:\ k\leqslant 2N,\ l\leqslant N} a_k b_l\right)$ (см. рис. 6.6), $S_N = \left(\sum_{k,l\in\mathbb{N}:\ k^2+l^2\leqslant N^2} a_k b_l\right)$ (см. рис. 6.7).

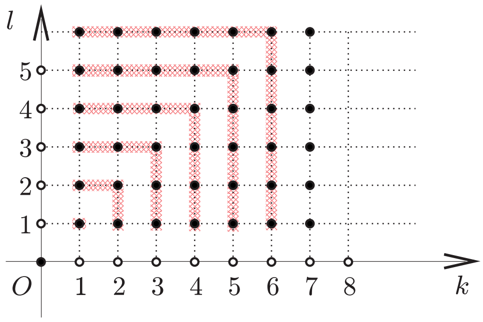


Рис. 6.4:

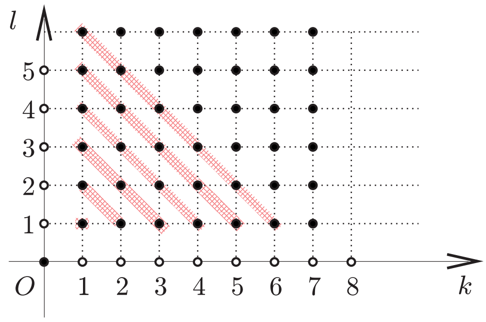


Рис. 6.5:

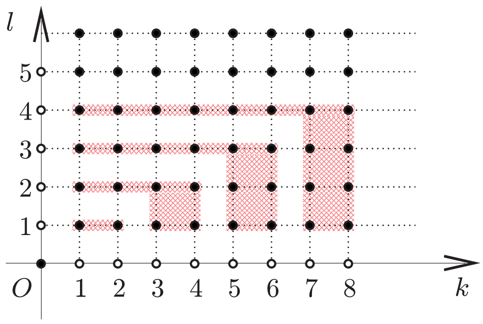


Рис. 6.6:

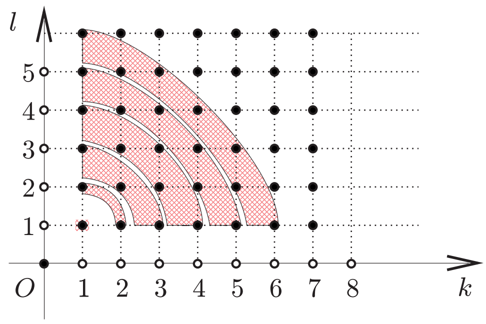


Рис. 6.7:

Теорема 6.2.8. *Пусть оба ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ — абсолютно сходятся к A, B, соответственно. Тогда ряд, составленный из произведений рядов $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$, взятых в любом порядке, также абсолютно сходится и его сумма равна $A \cdot B$.*

Доказательство. Возьмем какой-нибудь ряд, составленный из произведений рядов $\sum a_n$ и $\sum b_n$. Рассмотрим его частичную сумму $S_n = a_{k_1} b_{l_1} + \ldots + a_{k_n} b_{l_n}$. Из абсолютной сходимости рядов вытекает существование неотрицательных констант A^* и B^* таких, что $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| = A^*$, $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n| = B^*$. Тогда

$$|S_n| \le |a_{k_1} b_{l_1}| + \ldots + |a_{k_n} b_{l_n}| \le \left(|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_{\max\limits_{i=\overline{1,n}} k_i}|\right) \cdot \left(|b_1| + |b_2| + \ldots + |b_{\max\limits_{i=\overline{1,n}} l_i}|\right) \le A^* \cdot B^*.$$

Поскольку частичные суммы $S_N = \sum\limits_{i=1}^{N} a_{k_i} b_{l_i}$ образуют мотонную неубывающую последовательность, которая ограничена сверху числом $A^* B^*$, то из теоремы Вейерштрасса вытекает, что ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k_i} b_{l_i}$ сходится абсолютно. Найдем теперь к чему он сходится. Ряд абсолютно сходится $\Rightarrow$ группировка произвольная.

$$\begin{aligned}
S_1 =& a_1 b_1 = A_1 \cdot B_1;\\
S_2 =& S_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_2 + a_2 b_1) = A_2 \cdot B_2;\\
S_3 =& S_2 + (a_1 b_3 + a_2 b_3 + a_3 b_3 + a_3 b_2 + a_3 b_1) = A_3 \cdot B_3,\\
S_n =& A_n \cdot B_n.
\end{aligned}$$

где A_n, B_n - частичные суммы. $|S_n - AB| = |A_n \cdot B_n - AB| = |A_n(B_n - B) + B(A_n - A)| \le |A| \cdot |A_n - A| + |B| \cdot |B_n - B| < \varepsilon$. $\square$

Теорема 6.2.9 (Мертенса). *(Без доказательства). $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ - сходятся, причем один из них абсолютно. Тогда $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ – сходится, где $c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}$.*

Контрольные вопросы.

1. Сформулируйте признак Дирихле о сходимости числового ряда.
2. Сформулируйте признак Лейбница о сходимости ряда.
3. Дайте определение произведения двух рядов. Бывают ли другие виды определения произведения двух рядов?

Упражнения к 6.2

Упражнение 6.2.1. *Исследуйте на сходимость ряды:*

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln^2 n}{n+2}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n + (-1)^n}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n - \ln n}$; (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{arctg}(\pi n)}{10 + \ln\ln n}$;

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi n}{16}}{2 + \ln n}$; (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \frac{\pi n}{16}}{2 + \ln n}$; (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^3 \frac{\pi n}{12}}{5 + \ln n}$; (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left|\sin \frac{\pi n}{12}\right|}{n+5}$.

Ответы: 6.2.1 (b), (f), (h) — расходятся, все остальные сходятся.

6.3 Функциональные ряды

Определение 6.3.1. Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$, то последовательность называется сходящейся в точке $x_0 \in X$. Если последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходиться в каждой точке множества X, то для каждого $x_0 \in X$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$, который мы и назовём значением функция $f(x)$ в точке x_0. Функция $f(x)$ называется предельной функцией на множестве X для данной последовательности.

Определение 6.3.2. $\{f_n\}$ равномерно сходится на множестве X к $f(x)$, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N, \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ $[\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = 0]$.

П р и м е р 6.3.1. Рассмотрим последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ на отрезке $[0;1]$. Определим её линейной функцией на трёх отрезках, соединяющей точки $(0;0)$, $(1/(2n);1)$, $(1/n;0)$, $(1;0)$ (см. рис. 6.8). Поскольку в нуле $f(0) = \lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$ и для любого фиксированного $x \in (0;1]$ всегда существует натуральное число $N \in \mathbb{N}$ такое, что $1/n < x$ для всех $n \geqslant N$, то предельная функция $f(x) \equiv 0$. Но,

$$\sup_{x\in[0;1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0;1]} |f_n(x)| = 1.$$

Следовательно последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ сходится на отрезке $[0;1]$ к функции $f(x) \equiv 0$ неравномерно.

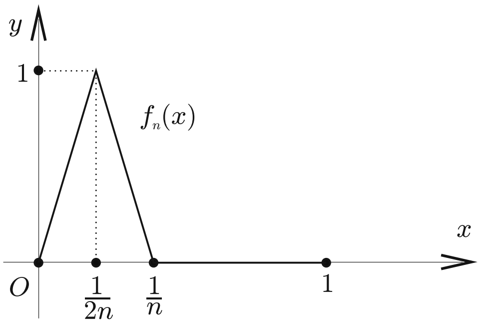


Рис. 6.8:

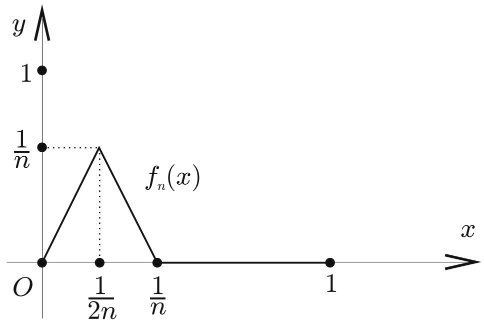


Рис. 6.9:

П р и м е р 6.3.2. Для последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ на отрезке $[0;1]$, изображенной на рисунке (см. рис. 6.9) найдём предельную функцию. Как и в предыдущем примере предельная функция $f(x) \equiv 0$. Но,

$$\sup_{x\in[0;1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0;1]} |f_n(x)| = \frac{1}{n}.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = 0$, то последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ сходится на отрезке $[0;1]$ к функции $f(x) \equiv 0$ равномерно.

Теорема 6.3.1 (критерий Коши о равномерной сходимости последовательности)**.** $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n > N, \forall x \in X \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

Доказательство.

- $(\Rightarrow)$. $\forall x \in X \quad |f_n(x) - f_m(x)| = |f_n - f + f - f_m| \leq |f_n - f| + |f - f_m| < 2\varepsilon$.
- $(\Leftarrow)$ Фиксируем $x \in X$; $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, по критерию Коши для числовой последовательности $f_n(x)$ - сходится $\Rightarrow f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon,\ m \to \infty,\ \forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N, \forall x \in X \quad |f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$.

$\square$

Определение 6.3.3. $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_n(x)$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ называется *равномерно сходящимся* на X, если функциональная последовательность $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно на множестве X.

Замечание 57. Следующие условия эквивалентны:

$$S_n \overset{X}{\rightrightarrows} S \Leftrightarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N, \forall x \in X \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x) \right| < \varepsilon \Leftrightarrow$$
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in X} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x) \right| = 0.$$

П р и м е р 6.3.3. Исследуйте функциональный ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x^n}{n!} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right)$ на равномерную сходимость на множестве a) $[0;1]$, b) $[1;+\infty)$. Найдём частичную сумму ряда

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{x^n}{n!} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right) = \left(x - \frac{x^2}{2!} \right) + \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} \right) + \ldots \left(\frac{x^N}{N!} - \frac{x^{N+1}}{(N+1)!} \right) = x - \frac{x^{N+1}}{(N+1)!}.$$

При любом $x \in [0;+\infty)$ последовательность $S_N(x)$ при $N \to +\infty$ сходится к функции $S(x) = x$. Поэтому

$$\lim_{N\to+\infty} \sup_{x \in [0;1]} |S_N(x) - S(x)| = \lim_{N\to+\infty} \sup_{x \in [0;1]} \frac{x^{N+1}}{(N+1)!} = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{(N+1)!} = 0,$$
$$\lim_{N\to+\infty} \sup_{x \in [1;+\infty)} |S_N(x) - S(x)| = \lim_{N\to+\infty} \sup_{x \in [1;+\infty)} \frac{x^{N+1}}{(N+1)!} = \lim_{N\to+\infty} +\infty = +\infty.$$

Следовательно функциональный ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x^n}{n!} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right)$ сходится равномерно на множестве $[0;1]$ и сходится неравномерно на множетсве $[1;+\infty)$.

Теорема 6.3.2 (критерий Коши о равномерной сходимости ряда)**.** *Функциональный ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *равномерно сходится на* $X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq m > N, \forall x \in X\ |a_m(x) + a_{m+1}(x) + \ldots + a_n(x)| < \varepsilon$.

Доказательство. Из критерия Коши о равномерной сходимости последовательности и определения равномерно сходящегося ряда легко следует требуемое. □

Теорема 6.3.3 (необходимый признак равномерной сходимости ряда)**.** *Если* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *— равномерно сходится на* X*, то* $|a_n(x)| \overset{X}{\rightrightarrows} 0$.

Доказательство. В критерии Коши положим $n = m$, откуда сразу следует требуемое. □

Теорема 6.3.4 (Мажорантный признак Вейерштрасса)**.** *Рассмотрим ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)$

a. *Если для любого* $n \in \mathbb{N}$ *выполнено* $|a_n(x)| \leqslant b_n(x)$ *на* X*, и* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n(x)$ *— равномерно сходится на* X*. Тогда* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)$ *— сходится равномерно и абсолютно.*

b. *Если для любого* $n \in \mathbb{N}$ *выполнено* $\sup\limits_{x \in X} |a_n(x)| \leqslant c_n$ *и* $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ *— сходится, то ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)$ *—*

равномерно сходится на X.

Доказательство. Рассмотрим первый случай

a. Справедлива оценка $|a_n(x)+\ldots+a_m(x)| \leqslant |a_n(x)|+\ldots+|a_m(x)| \leqslant |b_n(x)+\ldots+b_m(x)| < \varepsilon$ следовательно из критерия Коши получаем требуемое.

b. По критерию Коши о равномерной сходимости ряда (либо как следствие предыдущего пункта).

□

Теорема 6.3.5 (Дирихле). $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)b_n(x)$ — *функциональный ряд на X. $\forall x \in X$ $b_n(x)$ - монотонная последовательность, $b_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} 0$, $\forall N$, $\forall x \in X$, $\left|\sum\limits_{k=1}^{N} a_k(x)\right| < c$. Тогда $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)b_n(x)$ — равномерно сходится на X.*

Доказательство. Из преобразования Абеля для любого фиксированного $x \in X$ получаем

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k(x)b_k(x)\right| \leqslant 4 \max_{k=m-1,n} |A_k(x)| \cdot \max\{|b_{n+1}(x)|,\ |b_m(x)|\}.$$

Откуда $\left|\sum\limits_{k=m}^{n} a_k b_k\right| \leqslant 4c\varepsilon$, а следовательно по критерию Коши ряд $\sum a_k b_k$ — равномерно сходится на X. □

Теорема 6.3.6 (Абеля). $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)b_n(x)$ — *функциональный ряд на X. $\forall x \in X$ $b_n(x)$ - монотонная последовательность по n; x - фиксированный, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in X$ $|b_n(x)| \leqslant c$ - равномерная ограниченная последовательность. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)$ - равномерно сходится на X. Тогда $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)b_n(x)$ - равномерно сходится на X.*

Доказательство. Аналогично признаку Дирихле. □

П р и м е р 6.3.4. Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$ на множествах *a*) $x \in [\varepsilon; 2\pi-\varepsilon]$, где $\varepsilon \in (0;\pi)$ и *b*) $x \in [0;2\pi]$.

a. В первом случае справедливо

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \sin nx\right| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\varepsilon}{2}}, \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Также очевидно, что последовательность $1/n$ монотонна по n и равномерно стремиться к нулю. Откуда из признака Дирихле вытекает равномерная сходимость исходного ряда.

b. Если $x \in [0;2\pi]$, то исходный ряд сходится в точках 0 и 2π, поскольку состоит из одних нулей. А сходимость во всех точках интервала $(0;2\pi)$ вытекает, например из предыдущего пункта. Покажем что, тем не менее равномерной сходимости на множестве $[0;2\pi]$ нет. Пусть $\varepsilon = 1/4$. Тогда для любого натурально N выполнено

$$\sup_{x\in[0;2\pi]} \left|\sum_{n=N}^{2N} \frac{\sin nx}{n}\right| \geqslant \left|\sum_{n=N}^{2N} \frac{\sin\left(n\cdot\frac{\pi}{4N}\right)}{n}\right| \geqslant \left|\sum_{n=N}^{2N} \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{n}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=N}^{2N} \frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot N \cdot \frac{1}{2N} = \frac{1}{2\sqrt{2}} > \frac{1}{4} = \varepsilon.$$

Следовательно из критерия Коши вытекает, что равномерной сходимости на множестве $[0;2\pi]$ у исходного ряда нет.

Теорема 6.3.7 (о непрерывности функции). *Пусть* $f_n \in C[a,b],\ f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f \Rightarrow f \in C[a,b]$.

Доказательство. Пусть $x_0, x \in [a;b]$, тогда

$$|f(x_0) - f(x)| \leqslant |f(x_0) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| \leqslant 3\varepsilon,$$

т.к. первое и третье слагаемое $\leqslant \varepsilon$ в силу равномерной сходимости ряда, а второе слагаемое $\leqslant \varepsilon$ в силу непрерывности функций $f_n(x)$. Следовательно $f(x) \to f(x_0)$, $x \to x_0$. □

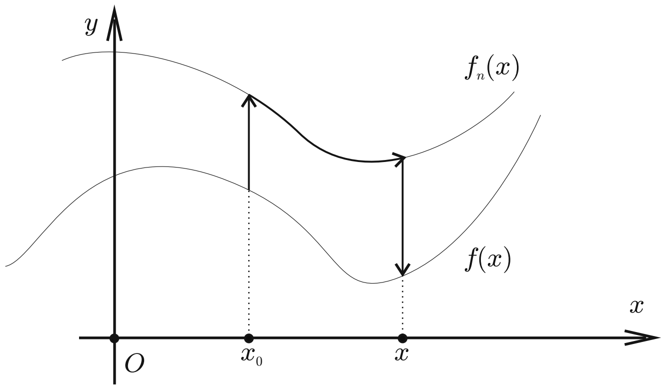


Рис. 6.10:

Теорема 6.3.8 (об интегрируемости функции). *Пусть* $f_n \in R[a,b],\ f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f \Rightarrow f \in R[a,b],\ \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Доказательство. Зафиксируем прозвольное положительное ε. Из равномерной сходимости вытекает $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N,\ \forall x \in [a,b] \quad f_n(x) - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant f_n(x) + \varepsilon$. Используя интегрируемость функций $f_n(x)$ по фиксированному $n = N$ и ε подберём δ такое, что как только произвольное разбиение отрезка $[a,b] = \cup \Delta x_i$ с параметром разбиения меньшем, чем δ, то $\sum_i \omega(f_n, \Delta_i)\Delta x_i = \sum_i (M_i^{(n)} - m_i^{(n)})\Delta x_i \leqslant \varepsilon$. Здесь $M_i^{(n)} = \sup_{x\in\Delta_i} f_n(x)$ и $m_i^{(n)} = \inf_{x\in\Delta_i} f_n(x)$. Поскольку

$$\forall x \in \Delta_i \quad m_i^{(n)} - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant M_i^{(n)} + \varepsilon,$$

то складывая данные неравенства на каждом отрезке Δ_i, получаем:

$$\sum \omega(f, \Delta_i)\Delta x_i \leqslant \sum (M_i^{(n)} - m_i^{(n)} + 2\varepsilon)\Delta x_i = \sum \omega(f_n, \Delta_i)\Delta x_i + 2\varepsilon(b-a) \leqslant c\varepsilon,$$

где $\sum \omega(f_n, \Delta_i)\Delta x_i \to 0$, по критерию интегрируемости. Следовательно $f \in R[a,b]$. Докажем равенство в теореме. Докажем оценку $\int\limits_a^b |f(x) - f_n(x)|dx \leqslant \varepsilon(b-a)$. Действительно,

$$\left| \int\limits_a^b f(x)dx - \int\limits_a^b f_n(x)dx \right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x) - f_n(x)|dx \leqslant \varepsilon(b-a).$$

□

Теорема 6.3.9 (о непрерывности ряда). *Пусть* $a_n(x) \in C[a,b]$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *— равномерно сходится на* $[a,b] \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) \in C[a,b]$.

Доказательство. $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)$, из теоремы о непрерывности функциональной последовательности $\{S_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ получаем требуемое. Действительно,

1. $S_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$
2. $S_n(x) \in C[a;b]$ как конечная сумма непрерывных функций.

Следовательно предельная функция $S(x)$ непрерывна. □

Теорема 6.3.10 (об интегрируемости ряда). *Пусть* $a_n(x) \in R[a,b]$, $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k(x)$ *— равномерно сходится на* $[a,b] \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x) \in \mathcal{R}[a,b]$ *и более того* $\int_a^b \sum_{k=1}^{+\infty} a_k(x)dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_a^b a_k(x)dx$.

Доказательство. По теореме об интегрируемости функциональной последовательности $\{S_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ делаем вывод о том, что $S(x) \in \mathcal{R}[a,b]$. Представим $S(x) = a_1(x) + \ldots + a_n(x) + \varphi_n(x)$, из равномерной сходимости ряда $\sup\limits_{x\in[a,b]} |\varphi_n(x)| < \varepsilon$;

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{+\infty} a_k(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_a^b a_k(x)dx + \int\limits_a^b \varphi_n(x)dx,$$

$$\left| \int_a^b \sum_{k=1}^{+\infty} a_k(x)dx - \sum_{k=1}^{n} \int_a^b a_k(x)dx \right| \leqslant \int\limits_a^b |\varphi_n(x)|dx \leqslant \varepsilon \cdot (b-a).$$

□

П р и м е р 6.3.5. Рассмотрим функцию Вейерштрасса

$$f_{a,b}(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a^k \cos(b^k x),$$

при условии, что $a \in (0;1)$, $ab \geqslant 1$. Проверим, что при заданных значениях a и b данная функция представляет

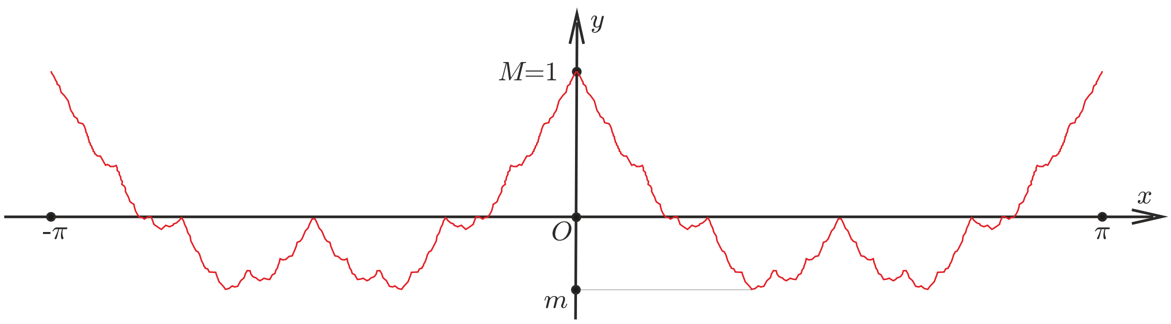


Рис. 6.11: Функция Вейерштрасса (при $a = 1/2$, $b = 2$).

собой пример непрерывной функции на всей числовой оси $\mathbb{R}$. Действительно, из оценки $\sup_{x\in\mathbb{R}} |a^k \cos(b^k x)| \leqslant$

a^k и сходимости ряда $\sum_{k=1}^{+\infty} a^k$, кстати, он сходится к значению $\frac{1}{1-a}$, вытекает нерерывность функции Вейерштрасса.

Можно доказать, что данная функция не дифференцируема ни в одной точке числовой прямой, но сделать это значительно сложнее, чем доказать непрерывность. В 1872 году (на докладе прочитанном в Прусской академии наук 18 июля 1872 года) Вейерштрасс указал, что введённая им выше функция непрерывна и представил строгое доказательство её недифференцируемости (при некоторых значениях на параметры a, b). В печати (в журнале) этот пример впервые появился в 1875 году в работе П. Дюбуа-Реймона (Вейерштрасс был редактором этого журнала и сообщил о своем контрпримере в письме к Дюбуа-Реймону 23 ноября 1873 года). А то, что функция при всех значениях a и b, таких, что $a \in (0;1)$, $ab \geqslant 1$ не дифференциема ни в одной точке доказал Харди [7] в 1910 году.

П р и м е р 6.3.6 (Пример функции $f \in C(\mathbb{R})$, но не дифференцируемой ни в одной точке $\mathbb{R}$.)**.** Определим функцию $\psi(x)$ сначала на отрезках $[0;1/2]$ и $[1/2;1]$ как x и $1-x$ соответственно (см. рис. 6.12), а затем

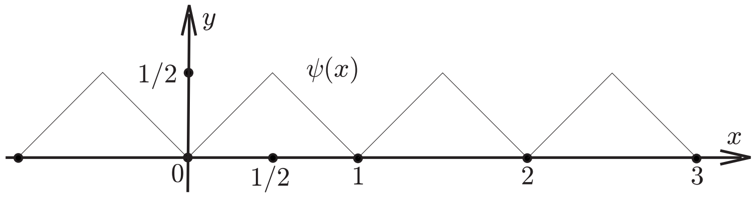


Рис. 6.12:

продолжим её как 1 периодическую функцию на все множество действительных чисел $\mathbb{R}$. Теперь определим нужную функцию в виде ряда

$$f(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{4^m}\psi\left(4^m x\right).$$

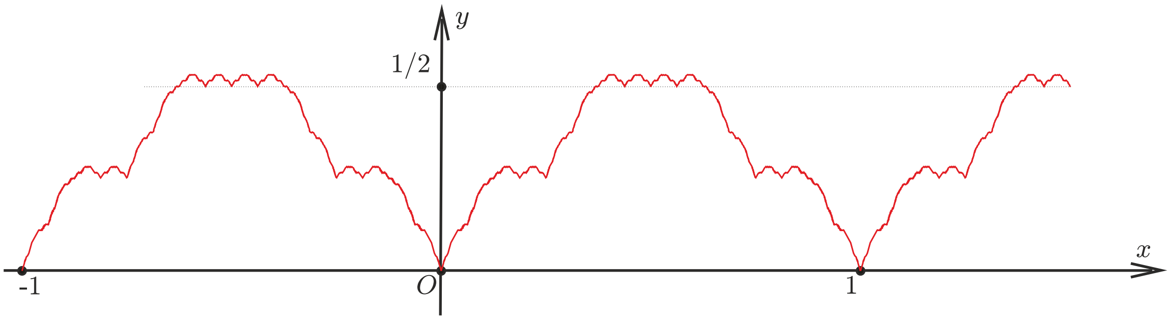


Рис. 6.13:

Покажем, что функция $f(x)$ непрерывна на множестве действительных чисел, но не дифференцируема ни в какой точке действительной оси. Поскольку все функции $4^{-m}\psi\left(4^m x\right)$, $k \in \mathbb{N}$ — непрерывны, а из оценки

$$0 \leqslant \frac{1}{4^m}\psi\left(4^m x\right) \leqslant \frac{1}{2\cdot 4^m}, \quad m \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}\cup\{0\},$$

и того, что ряд $\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{2\cdot 4^m}$ сходится (его сумма равна $\frac{2}{3}$, как сумма геометрической прогрессии), по теореме Вейерштрасса следует равномерная сходимость ряда на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$. Откуда делаем вывод о непрерывности функции $f(x)$ на множестве действительных чисел, т.е. $f(x) \in C(\mathbb{R})$. Покажем, что функция $f(x)$ не дифференцируема в произвольной точке $x_0 \in \mathbb{R}$. Для точки $x_0 \in \mathbb{R}$ найдётся последовательность вложенных отрезков Δ_n

$$\Delta_n = \left[\frac{q_n - 1}{2\cdot 4^n}; \frac{q_n}{2\cdot 4^n}\right], \quad q_n \in \mathbb{N},$$

такая, что $x_0 \in \Delta_n$. У отрезка Δ_n длины $\mu(\Delta_n) = \frac{1}{2\cdot 4^n}$ существует точка x_n, отстоящая от x_0 на $1/4^{n+1}$. Возможны два случая:

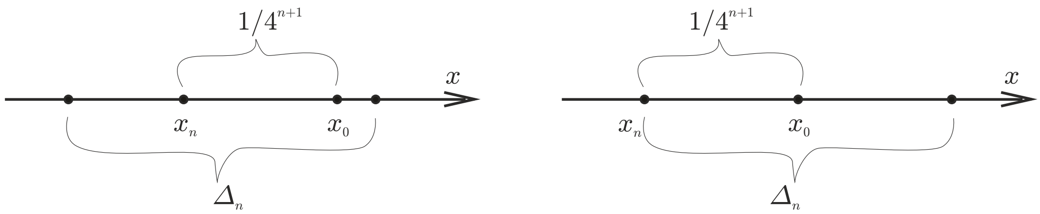


Рис. 6.14:

- Если $m > n$, то число $1/4^{n+1}$ является периодом для функции $\psi(4^m \cdot x)$, и следовательно
$$\frac{\psi_m(x_n) - \psi_m(x_0)}{x_n - x_0} = 0.$$
- Если $m \leqslant n$ (см. рис. 6.15), то функция $\psi(4^m \cdot x)$ линейна на Δ_n и её угловой коэффициент по модулю равен 1, следовательно
$$\frac{\psi_m(x_n) - \psi_m(x_0)}{x_n - x_0} = \pm 1.$$

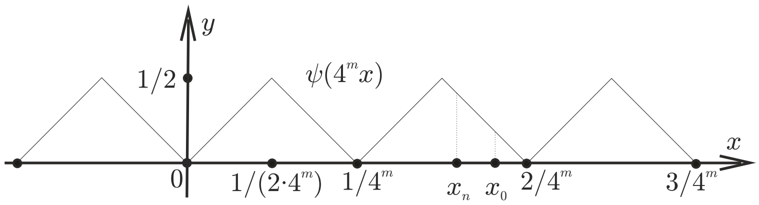


Рис. 6.15:

Поэтому
$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\psi_m(x_n) - \psi_m(x_0)}{x_n - x_0} = \sum_{m=0}^{n} \pm 1 = \begin{cases} \text{чётное число при } n = 2l+1,\ l \in \mathbb{Z}_+, \\ \text{нечётное число при } n = 2l,\ l \in \mathbb{Z}_+. \end{cases}$$
Так как $x_n \to x_0$ при $n \to +\infty$, то отношение $\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n - x_0}$ не имеет предела при $x_n \to x_0$.

По аналогии с предыдущим примером можно построить непрерывную функцию на всей числовой прямой такую, что она не только ни дифференцируема ни в одной точке, но и не принадлежит $f \notin \operatorname{Lip}\alpha$ на произвольном интервале $(a;b)$ для любого $\alpha > 0$[2].

П р и м е р 6.3.7 (Пример функции $f \in C(\mathbb{R})$, но $f \notin \operatorname{Lip}\alpha$ на произвольном интервале $(a;b)$ для любого $\alpha > 0$)**.** Определим функцию $\psi(x)$ сначала на отрезках $[0;1/2]$ и $[1/2;1]$ как x и $1-x$ соответственно (см. рис. 6.12), а затем продолжим её как 1 периодическую функцию на все множество действительных чисел $\mathbb{R}$. Теперь определим нужную функцию в виде ряда
$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{10^k} \psi\left(2^{k!} x\right).$$

Покажем, что функция $f(x)$ непрерывна на множестве действительных чисел, в частности принадлежит пространствам $L_p[0;1]$, $p \in \mathbb{R}$, но $f \notin \operatorname{Lip}\alpha$ для любого $\alpha > 0$. Поскольку все функции $10^{-k}\psi\left(2^{k!}x\right)$, $k \in \mathbb{N}$ — непрерывны, а из оценки
$$\frac{1}{10^k}\psi\left(2^{k!}x\right) \leqslant \frac{1}{2 \cdot 10^k}, \quad k \in \mathbb{N},$$
получаем
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{10^k}\psi\left(2^{k!}x\right) \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2 \cdot 10^k} = \frac{1}{18}.$$
Откуда следует равномерная сходимость ряда на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$. По теореме Вейерштрасса делаем вывод о непрерывности функции $f(x)$ на множестве действительных чисел, т.е. $f(x) \in C(\mathbb{R})$. Покажем, что функция $f(x)$ не принадлежит пространствам $\operatorname{Lip}\alpha$ на произвольном интервале $(a;b)$ для любого $\alpha > 0$. Зафиксируем произвольное $x \in (a;b) \subset \mathbb{R}$. Для заданного $x \in \mathbb{R}$ и каждого натурального $n \in \mathbb{N}$, подберём x_n из условий (см. рис. 6.17)

[2] $f \in \operatorname{Lip}\alpha$ на интервале $(a;b)$, если существует константа $C > 0$ такая, что для любых $x, y \in (a;b)$ выполнено неравенство: $|f(x) - f(y)| \leqslant C \cdot |x-y|^\alpha$

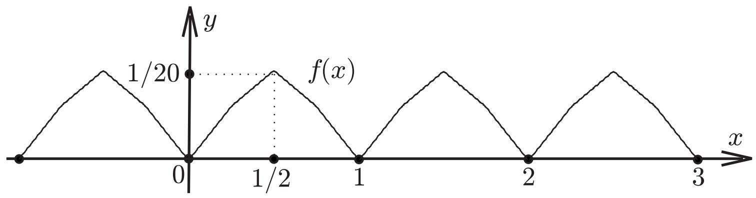


Рис. 6.16:

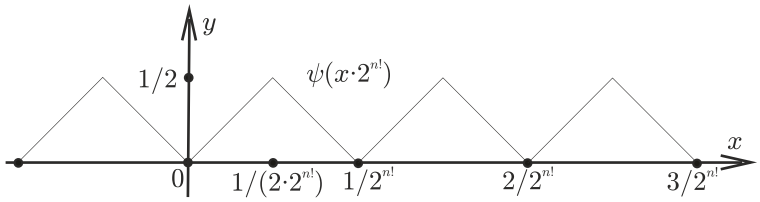


Рис. 6.17:

$$|x - x_n| \leqslant \frac{1}{2^{n!}}, \quad \left|\psi(2^{n!}x) - \psi(2^{n!}x_n)\right| = \frac{1}{4}.$$

Заметим, что в силу построения функции $\psi(x)$ справедливо неравенство

$$|\psi(x) - \psi(y)| \leqslant |x - y|.$$

Рассмотрим разность приращений у функции $f(x)$:

$$f(x) - f(x_n) =$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{10^k}\left(\psi(2^{k!}x) - \psi(2^{k!}x_n)\right) + \frac{1}{10^n}\left(\psi(2^{n!}x) - \psi(2^{n!}x_n)\right) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{10^k}\left(\psi(2^{k!}x) - \psi(2^{k!}x_n)\right) =$$

$$S_1 + S_2 + S_3.$$

Оценим каждое слагаемое по отдельности

$$|S_1| = \left|\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{10^k}\left(\psi(2^{k!}x) - \psi(2^{k!}x_n)\right)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{10^k}\frac{2^{k!}}{2^{n!}} \leqslant$$

$$\frac{2^{(n-1)!}}{2^{n!}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{9} \cdot \frac{2^{(n-1)!}}{2^{n!}} \leqslant \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{10^n}, \quad (n \geqslant 4),$$

$$|S_2| = \frac{1}{10^n}\left|\psi(2^{n!}x) - \psi(2^{n!}x_n)\right| = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{10^n},$$

$$|S_3| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{10^k}\left(\psi(2^{k!}x) - \psi(2^{k!}x_n)\right)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{10^k}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{10^n}.$$

Откуда

$$|f(x) - f(x_n)| \geqslant |S_2| - |S_1| - |S_3| \geqslant \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\right) \cdot \frac{1}{10^n} = \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{10^n}.$$

Следовательно, для любого $\alpha > 0$ справедливо

$$\frac{|f(x) - f(x_n)|}{|x - x_n|^\alpha} \geqslant \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{10^n} \cdot \left(2^{n!}\right)^\alpha = \frac{2^{n! \cdot \alpha}}{36 \cdot 10^n} \to +\infty, \quad (n \to +\infty).$$

Откуда следует, что функция $f \in C[0;1]$, в частности и всем $L_p[0;1]$, $p \in \mathbb{R}$, но $f \notin \mathrm{Lip}\,\alpha$ для любого $\alpha > 0$.

Замечание 58. Из того, что функция $f \in C(\mathbb{R})$, не принадлежит ни одному классу $\mathrm{Lip}\,\alpha$ для любого $\alpha > 0$, вытекает, что функция $f(x)$ не дифференцируема ни в одной точке $x \in \mathbb{R}$.

Замечание 59. Функция $f \in C(\mathbb{R})$, не вкладывается не только в пространство $\mathrm{Lip}\,\alpha$ для любого $\alpha > 0$, но и более широкое пространство Lip $\left(\frac{1}{\ln\frac{1}{\cdot}}\right)$. Действительно,

$$\frac{|f(x)-f(x_n)|}{\frac{1}{\ln\frac{1}{|x-x_n|}}} \geqslant \frac{1}{36}\cdot\frac{1}{10^n}\cdot(n!)\ln 2 = \frac{(n!)\ln 2}{36\cdot 10^n} \to +\infty, \quad (n\to+\infty).$$

Теорема 6.3.11 (о перестановке предела и суммы)**.** *Пусть существует* $\lim\limits_{x\to a} a_n(x) = c_n,\ S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *— равномерно сходится на* X, $a\in X$ *и является предельной точкой для* $X\backslash a$. *Тогда сходится ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ *и* $\lim\limits_{x\to a}\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\lim\limits_{x\to a} a_n(x)$.

Доказательство. По критерию Коши $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$, $\forall n,m>\mathbb{N}$, $\forall x\in X$ выполнено

$$|a_m(x)+\dots+a_n(x)|<\varepsilon.$$

Сделав предельный переход $x\to a$ в последнем неравенстве получим:

$$|c_m+\dots+c_n|\leqslant\varepsilon,$$

что означает сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ по критерию Коши. Обозначим $C_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k$, $C = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$. Проведём оценку

$$|S(x)-C| \leqslant |S(x)-S_n(x)| + |S_n(x)-C_n| + |C_n - C| < 3\varepsilon,$$

т.к. $|S(x)-S_n(x)|<\varepsilon$ по равномерной сходимости, $|S_n(x)-C_n|<\varepsilon$, т.к. $\forall\varepsilon>0\ \exists\dot{U}_\delta(a):\forall x\in\dot{U}_\delta(a)\ |S_n(x)-C_n|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|a_k(x)-c_k|<\varepsilon$, а неравенство $|C_n-C|<\varepsilon$ следует из сходимости ряда $\sum c_n$. Т.е. $\lim S(x) = C = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\lim\limits_{x\to a} a_n(x)$. □

Теорема 6.3.12 (о почленном дифференцировании ряда)**.** *Ряд* $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *сходится в точке* $x = x_0$, $x_0\in[a;b]$; $\forall n\ a_n(x)\in D[a,b]$; $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$ *— сходится равномерно на* $[a;b]$. *Тогда* $S(x)\in D[a,b]$ *и более того* $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)\right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$.

Доказательство. По критерию Коши $\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}:\forall m,n>N,\ \forall x\in[a,b]\ \left|\sum\limits_{k=m}^{n} a_k'\right|<\varepsilon$. Докажем равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{a_k(x)-a_k(c)}{x-c}$, $c\in[a,b]$ на множестве $[a,b]\backslash c$. Оценим, используя теорему Лагранжа

$$\left|\sum_{k=m}^{n}\frac{a_k(x)-a_k(c)}{x-c}\right| = \left|\frac{U(x)-U(c)}{x-c}\right| = |U'(\xi)| = \left|\sum_{k=m}^{n} a_k'(\xi)\right| < \varepsilon.$$

Докажем, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ равномерно сходится на отрезке $[a;b]$. Поскольку предыдущая оценка верна для любого $c\in[a;b]$, то можно рассмотреть $c = x_0$. Но тогда из доказанной равномерной сходимости вытекает, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k(x)-a_k(x_0))$ также равномерно сходится по признаку Абеля. Поскольку ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x_0)$ сходится (а следовательно равномерно сходится на $[a,b]$, поскольку от x не зависит). Следовательно функция $S(x)$ определена (и даже непрерывна на $[a;b]$). Пусть точка $c\in[a;b]$. Тогда при помощи теоремы о предельном переходе (разобрана выше)

$$S'(c) = \lim_{x\to c}\frac{S(x)-S(c)}{x-c} = \lim_{x\to c}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n(x)-a_n(c)}{x-c} = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to c}\frac{a_n(x)-a_n(c)}{x-c} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(c).$$

□

Замечание 60. Если в условии теоремы дополнительно потребовать $a_n(x) \in C^1[a,b]$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то тогда $S(x) \in C^1[a,b]$.

Доказательство. Данный факт легко вытекает из теоремы о непрерывности ряда, т.к. $a'_n(x) \in C[a;b]$ и ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a'_n(x)$ равномерно сходится на $[a;b]$. □

П р и м е р 6.3.8. Исследовать на дифференцируемость функцию $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ на множестве $x \in [\varepsilon; 2\pi - \varepsilon]$, где $\varepsilon \in (0;\pi)$.

Доказательство. Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a'_n(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$ сходится равномерно (см. пример 6.3.4) на исследуемом множестве $x \in [\varepsilon; 2\pi - \varepsilon]$, где $\varepsilon \in (0;\pi)$. Исходный ряд сходится, например, в нуле и функции $a_n(x) = \frac{\cos nx}{n^2}$ обладают гладкостью $C^1(\mathbb{R})$, то $f(x) \in C^1[\varepsilon; 2\pi - \varepsilon]$, где $\varepsilon \in (0;\pi)$. □

Теорема 6.3.13 (Дини). *Путь $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \in C[a,b]$ — монотонная последовательность по номеру n при любых $x \in [a;b]$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, причём предельная функция $f(x) \in C[a,b]$. Тогда $f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$.*

Замечание 61. Не обязательно на отрезке. Утверждение предыдущей теоремы верно на любом компакте.

Доказательство. Зафиксируем произвольное положительное $\varepsilon > 0$. Тогда $f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \ldots \leqslant f_n(x)$, $\forall n \geqslant N$, $\forall x_0 \in [a,b]$ - фиксированного $0 \leqslant f(x_0) - f_n(x_0) < \varepsilon$. Т.к. $f, f_n \in C \Rightarrow \forall n \geqslant N\ \exists U_{\delta_0}(x_0) : 0 \leqslant f(x) - f_n(x) \leqslant \varepsilon$, получаем покрытие $\Rightarrow$ [лемма о конечном подпокрытии] $\underset{N_1}{U_{\delta_1}}(x_1), \ldots, \underset{N_n}{U_{\delta_n}}(x_n)$ - конечные подпокрытия $[a,b]$.

Положим $N = \max\{N_1, \ldots, N_n\}$ - выполняется определение равномерно сходящейся последовательности: $\forall x \in [a,b]$, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > N\ |f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$. □

Следствие 6.3.1. Пусть $a_n(x) \geqslant 0$, $\forall x \in [a,b]$, $a_n(x) \in C[a,b]$, $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \in C[a,b] \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ - равномерно сходится на $[a,b]$.

Доказательство. $S_n(x)$ - возрастает: $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)$, $S_1(x) \leqslant S_2(x) \leqslant \ldots \leqslant S_n(x) \leqslant \ldots$. □

Контрольные вопросы.

1. Дайте определение равномерной сходимости функциональной последовательности.
2. Дайте определение равномерной сходимости функционального ряда.
3. Сформулируйте теорему о непрерывности функционального ряда.

Упражнения к 6.3

Упражнение 6.3.1. *Исследуйте на поточечную и равномерную сходимость функциональные ряды:*

$$(a)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x+n^2}{x+2^n}; \quad (b)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^4}{n+x+1}\operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{\sqrt{n}}\right); \quad (c)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+x\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{nx}\right); \quad (d)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2\sin\frac{x}{n}}{\sqrt{n}+x^2};$$

$$(e)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x+n}\operatorname{th}\frac{x}{n}; \quad (f)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 x}{x^2+n^4}\operatorname{arctg}(n^3x); \quad (g)\ \sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n}x)\sin\frac{1}{n^2x^5}; \quad (h)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{1+nx}\right)}{\sqrt{1+nx}}.$$

на множествах $E_1 = (0;1)$ и $E_2 = (1;+\infty)$.

Ответы: 6.3.1 Все ряды пототечно сходятся на множествах E_1 и E_2, равномерно сходятся на множестве E_1 и сходятся неравномерно на множестве E_2 в (a), (b), (d), (e), (f); для рядов из (c), (g), (h) равномерно сходятся на множестве E_2 и сходятся неравномерно на множестве E_1 .

6.4 Степенные ряды

Определение 6.4.1. Пусть задана $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{C}$ последовательность комплексных чисел. Будем писать

$$z_n \to z_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad |z_n - z_0| < \varepsilon.$$

Здесь $z = x + iy$ и $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Из неравенств

$$\max\{|x_n - x_0|, |y_n - y_0|\} \leqslant |z_n - z_0| \leqslant |x_n - x_0| + |y_n - y_0|$$

вытекает, что $z_n \to z_0$ равносильно тому, что $x_n \to x_0,\ y_n \to y_0$.

Теорема 6.4.1. *Рассмотрим степенной ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$, $z \in C$. *Тогда*

1. $|z - z_0| < R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}} \Rightarrow$ *ряд абсолютно сходится.*
2. $|z - z_0| > R \Rightarrow$ *ряд расходится.*
3. $|z - z_0| = R \Rightarrow$ *неизвестно сходится или расходится.*

Замечание 62. Нахождение радиуса сходимости по формуле

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}$$

называется формулой *Коши-Адамара.*

Доказательство. Поскольку третий пункт ничего не утверждает, то достаточно доказать только первые два.

1. Зафиксируем произвольное комплексное число z и рассмотрим числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n| \cdot |z - z_0|^n$ к которому применим признак Коши. Согласно которому, если

   $$\overline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_n| \cdot |z - z_0|^n} < 1,$$

   то ряд сходится абсолютно. Но последнее условие равносильно следующему:

   $$|z - z_0| < \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

2. Не выполняется необходимое условие сходимости.

$\square$

Замечание 63. Радиус сходимости R можно найти так $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$. Достаточно применить при фиксированном z к числовому ряду признак Даламбера.

Теорема 6.4.2 (Абеля 1ая)**.** *Если ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ *- сходится в точке* $\xi \Rightarrow$ *ряд сходится абсолютно и* *равномерно в области* $K_q = \{z \in \mathbb{C} | \ |z - z_0| \leqslant q|z_0 - \xi|\}, \ q \in (0,1)$ *(см. рис. 6.18).*

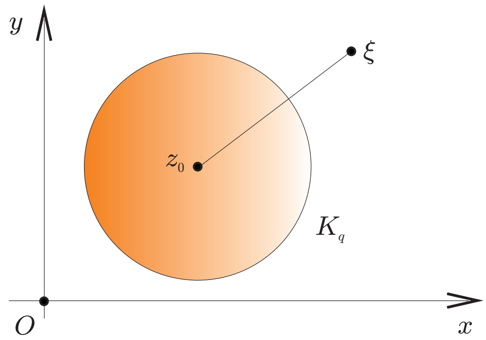


Рис. 6.18:

Доказательство. $|c_n(z-z_0)^n| = \left|c_n(\xi - z_0)^n \cdot \left(\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^n\right|$, $c_n(\xi - z_0)^n \to 0$ по необходимому признаку сходимости, $\left|\left(\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^n\right| \leqslant 1 \cdot q^n$ - т.к. монотонная и равномерно ограниченная. $\left|\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right|^n \leqslant q^n$; q^n, z - сходятся, $z \in K_q \Rightarrow$ по признаку Вейерштрасса ряд сходится равномерно и абсолютно в K_q. ◻

Лемма 34. *Пусть R - радиус сходимости ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$*;*

R' - радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \cdot n(z-z_0)^{n-1}$*;*

$R^{\int}$ - радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} \cdot (z-z_0)^{n+1}$*. Тогда* $R = R' = R^{\int}$*.*

Доказательство. $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n \cdot n|} = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n/(n+1)|}$. ◻

Теорема 6.4.3 (о почленном дифференцировании и о непрерывности)**.** $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, $K_r = \{z \in \mathbb{C} | \ |z - z_0| \leqslant r < R\}$, *$R$ - радиус сходимости. Тогда* $f(z) \in C^{\infty}(K_r)$*.*

Доказательство. Т.к. $c_n(z-z_0)^n \in C(K_r)$ и ряд равномерно сходится, то $f \in C(K_r)$. Докажем $f \in D(K_r)$. Т.к. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ - сходится в точке z_0; $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot n(z-z_0)^{n-1}$ по лемме и 1-ой теореме Абеля — равномерно сходится в K_r; $c_n(z-z_0)^n \in D(K_r) \Rightarrow f \in D(K_r)$.

Аналогично

$$f' = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot n(z-z_0)^{n-1} \in D(K_r); \quad \ldots; \quad f^{(n)} \in D(K_r).$$

◻

Найдем c_n (в K_r, $r < R$): $c_0 = f(z_0)$, $c_1 = f'(z_0)$. Поскольку

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)(z-z_0)^{n-k},$$

то $c_k \cdot k! = f^{(k)}(z_0)$ или $c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \Rightarrow$ для степенного ряда его коэффициенты есть коэффициенты ряда Тейлора.

Теорема 6.4.4 (Абеля 2ая). $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} c_n(z-z_0)^n$ *- сходится в точке* ζ. *Тогда ряд равномерно сходится на отрезке* $I = \{z \in \mathbb{C}|\ z = z_0 + t(\zeta - z_0);\ t \in [0,1]\}$.

Доказательство. Справедливо представление $c_n(z-z_0)^n = c_n(\zeta - z_0)^n \cdot t^n$. По признаку Абеля исходный ряд равномерно сходится на I т.к.

1. $\sum c_n(\zeta - z_0)^n$ — равномерно сходится на I.

2. t^n — монотонная равномерно ограниченная последовательность.

$\square$

Следствие 6.4.1. Пусть $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} c_n(z-z_0)^n$ — сходится в точке ζ. Тогда $f(z) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} c_n(z-z_0)^n \in C(I)$ (здесь непрерывность понимается по t).

П р и м е р 6.4.1. Найти ряд для $\operatorname{arctg} x$. Справедливо разложение (геометрическая прогрессия)

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots, \quad x \in (-1;1).$$

Радиус сходимости степенного ряда в последнем равенстве равен $R = 1$. Поэтому можно интегрировать внутри круга сходимости почленно, т.е. на любом множестве вида $K_r = \{x : |x| \leqslant r\}$, где $r \in (0;1)$. Интегрируя, получаем

$$\operatorname{arctg} x + C = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, \quad x \in K_r.$$

Константу C найдём, подставив $x = 0$. Откуда $C = 0$. Поскольку радиус сходимости проинтегрированного ряда такой же, как и исходного, то $R = 1$. Исследуем на сходимость в концевых точках. Пусть $x = 1$. Тогда ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ сходится по признаку Лейбница. Аналогично в точке $x = -1$. Из второй теоремы Абеля вытекает, что правая часть в равенстве

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, \tag{6.4.2}$$

будет непрерывной функцией слева в точке $x = 1$ и справа в точке $x = -1$ (поскольку есть равномерная сходимость на множестве $[-1;1]$ и все функции вида $\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ непрерывны на этом отрезке для любого натурального номера $n \in \mathbb{N}$). Следовательно равенство (6.4.2) справедливо не только на множестве $(-1;1)$, но и на отрезке $[-1;1]$.

6.5 Бесконечные произведения

В данном параграфе, при исследовании бесконечного произведения $\prod\limits_{k=1}^{\infty} p_k$, будем предполагать, что все $p_k \neq 0$. Т.к. если существует $p_l = 0$, то очевидно $P_N = \prod_{k=1}^{N} p_k = 0$ для $N \geqslant l$ и бесконечное произведение в этом случае будем говорить сходится к нулю.

Определение 6.5.1. Пусть все $p_n \neq 0$, тогда $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ — сходится, если существует конечный $\lim\limits_{N\to\infty} \prod\limits_{n=1}^{N} p_n = P \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, этот предел называется бесконечным произведением. Если $\exists \lim \prod\limits_{n=1}^{N} p_n = 0$, то произведение расходится к нулю. Иначе произведение расходится.

П р и м е р 6.5.1. Исследуем на сходимость бесконечные произведения:

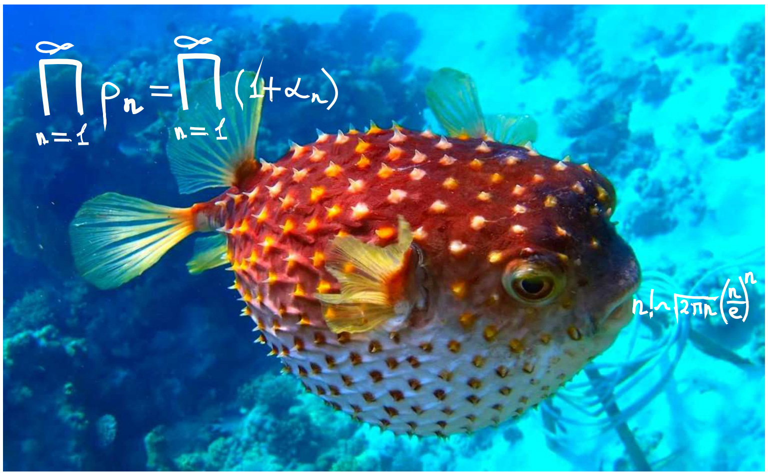


Рис. 6.19:

1. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$;
2. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n}$.

В случае их сходимости найти явный вид бесконечного произведения.

Доказательство. 1. Вычислим N – ое частичное произведение:

$$P_N = \prod_{n=1}^{N} \left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{N}{N-1} \cdot \frac{N+1}{N} = N+1.$$

Поскольку $\lim\limits_{N\to\infty} P_N \to +\infty$, то бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ расходится.

2. Найдём его частичное произведение:

$$P_N = \prod_{n=1}^{N} \cos \frac{x}{2^n} = \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2^2} \cdot \cos \frac{x}{2^3} \cdot \ldots \cdot \cos \frac{x}{2^N}.$$

Умножая обе части полученного равенства на $\sin \frac{x}{2^N}$ и используя последовательно формулу синуса двойного аргумента $2 \sin y \cdot \cos y = \sin 2y$, получаем

$$P_N \cdot \sin \frac{x}{2^N} = \frac{1}{2^N} \cdot \sin x.$$

Из последней формулы следует равенство

$$P_N = \frac{\sin x}{x} \cdot \left(\frac{\frac{x}{2^N}}{\sin \frac{x}{2^N}}\right), \quad x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Поскольку выражение в скобках стремиться к 1 при $N \to +\infty$ (в силу первого замечательного предела), то исходное бесконечное произведение сходится и

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x}, \quad x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

□

Теорема 6.5.1 (необходимый признак сходимости). *Если* $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ *сходится* $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} p_n = 1$.

Доказательство. $p_n = \frac{P_n}{P_{n-1}}$. Если предел существует (справа, слева), предел числителя и знаменателя равен P (сходимость) $\Rightarrow \lim p_n = 1$. □

Замечание 64. Как следует из разобранного примера 6.5.1 произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$ бесконечное произведение расходится, но при этом $p_n = 1 + \frac{1}{n} \to 1$. Следовательно разобраный признак не может быть достаточным условием.

Теорема 6.5.2 (критерий сходимости бесконечного произведения). *Пусть* $p_n > 0$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$. *Тогда бесконечное произведение* $\prod\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ *сходится* $\Leftrightarrow$ *сходится ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln p_n$.

Доказательство. Вытекает из равенства $\prod\limits_{n=1}^{N} p_n = \exp(\sum\limits_{n=1}^{N} \ln p_n)$ и непрерывности функции e^x. □

Теорема 6.5.3. *Пусть* $p_n > 0$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$, $p_n = 1 + \alpha_n$.

1. **критерий сходимости бесконечного произведения.** *Если последовательность* $\{\alpha_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *знакопостоянна, т.е. например* $\alpha_n \geqslant 0$. *Тогда бесконечное произведение* $\prod\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ *— сходится тогда и только тогда, когда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ *— сходится.*
2. **достаточное условие сходимости бесконечного произведения.** *Если ряды* $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n, \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$ *— сходятся, то сходится и бесконечное произведение* $\prod\limits_{k=1}^{\infty} p_k$.
3. *Если один из рядов* $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$ *— сходится, а второй расходится, то расходится и бесконечное произведение* $\prod\limits_{k=1}^{\infty} p_k$.

Доказательство. Если предположить, что p_n не стремиться к единице (или, что тоже самое, что $\alpha_n \not\to 0$ при $n \to +\infty$), то в силу необходимых признаков сходимости будет вытекаеть, что как ряд, так и бесконечное произведение будут расходиться. Поэтому будем считать, что выполняется равенство $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$, т.е. $\alpha_n = o(1)$, $n \to \infty$

1. Утверждение вытекает из равенства
$$\ln(1+\alpha_n) \sim \alpha_n, \ n \to \infty.$$
Действительно, из знакопостоянства α_n вытекает, что ряды $\sum \ln(1+\alpha_n)$ и $\sum \alpha_n$ — сходятся (или расходятся) одновременно.
2. Данное утверждение вытекает из равенства
$$\ln(1+\alpha_n) = \alpha_n - \frac{\alpha_n^2}{2}\left(1+o(1)\right), \ n \to \infty.$$

Действительно, из сходимости ряда $\sum \frac{\alpha_n^2}{2}$ вытекает сходимость ряда $\sum \frac{\alpha_n^2}{2}(1+o(1))$ (по признаку сравнения для знакопостоянных рядов), ряд $\sum \alpha_n$ сходится по условию. Следовательно ряд, составленный из членов вида $\ln(1+\alpha_n) = \alpha_n - \frac{\alpha_n^2}{2}(1+o(1))$ также сходящийся.

3. Доказывается аналогично предыдущему утверждению.

□

П р и м е р 6.5.2. Исследуем на сходимость бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\sin n}{n}\right)$. Поскольку оба ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2}$$

сходятся (первый по признаку Дирихле, а второй по признаку сравнения, что вытекает из оценки $\frac{\sin^2 k}{k^2} \leqslant \frac{1}{k^2}$), то в силу предыдущей теоремы можем утверждать то, что исходное бесконечное произведение сходится.

П р и м е р 6.5.3. Покажем, что второе условие в теореме 6.5.3 является только достаточным. Покажем, что существует ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ такой, что $\lim_{n\to+\infty}\alpha_n = 0$ оба ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2$ расходятся, но тем не менее бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+\alpha_n)$ сходится.

Доказательство. Положим

$$\alpha_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n}.$$

Тогда из равенств

$$\frac{\alpha_n^2}{2} = \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right), \quad \alpha_n^3 = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right), \quad n \to +\infty$$

вытекает, что оба ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2$ расходятся, но из разложения

$$\ln(1+\alpha_n) = \alpha_n - \frac{\alpha_n^2}{2} + \frac{\alpha_n^3}{3}(1+o(1)) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),\ n\to\infty$$

следует сходимость бесконечного произведения $\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n$. □

Определение 6.5.2. Пусть $p_n > 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Тогда бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty}p_n$ называется *абсолютно* сходящимся, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\ln p_n|$. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\ln p_n$ условно сходится, то говорят, что бесконечное произведение *условно* сходится.

П р и м е р 6.5.4. Бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ условно сходится. Действительно, это вытекает из равенств

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+o(1)}{2n^2}, \quad \left|\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)\right| \sim \frac{1}{n}, \quad n\to+\infty.$$

Определение 6.5.3. Рассмотрим уравнение $f(z)=0$. Точка z_0 — *корень кратности* n данного уравнения, если $f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$, $f^{(n)}(z_0) \neq 0$. Говорят, что z_0 — простой нуль, если z_0 - однократный корень.

П р и м е р 6.5.5. Найдём кратности корней у следующих функций:

1. У функции $f(z) = (z-2)^4$ корень уравнения $f(z)=0$ четырёхкратный вытекает из того, что $f(2) = f'(2) = f''(2) = f'''(2) = 0$, но $f^{(4)}(z) = 4! \neq 0$.

2. Рассмотрим функцию $f(z) = z - \sin z$. Тогда из равенств
$$f'(z) = 1 - \cos z, \quad f''(z) = \sin z, \quad f'''(z) = \cos z$$
вытекает $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$, но $f^{(3)}(z) = 1 \neq 0$. Следовательно корень $z = 0$ уравнения $z - \sin z = 0$ — трёхкратный.

Определение 6.5.4. Функцию $f(z)$ будем называть *аналитической во всей комплексной области* $\mathbb{C}$ (или *целой*) и обозначать $f(z) \in A(\mathbb{C})$, если справедливо равенство $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ для всех точек комплексной области $\mathbb{C}$ с некорыми константами $c_n \in \mathbb{C}$.

П р и м е р 6.5.6. Приведём несколько примеров целых функций:
$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots +;$$
$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots;$$
$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

Определение 6.5.5. Положим $M_f(r) = \max_{|z|\leqslant r} |f(z)|$. Будем говорить, что функция $f(z) \in A(\mathbb{C})$ имеет *порядок* ϱ, если
$$\varrho = \overline{\lim}_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r}.$$

П р и м е р 6.5.7. Порядки целых функций e^{z^n}, $\sin z$, $\cos z$, $\frac{\sin z}{z}$, $\cos\sqrt{z}$, $\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ и e^{e^z}, равны, соответственно n, 1, 1, 1, 1/2, 1/2 и ∞.

Теорема 6.5.4 (Вейерштрасса)**.** *(Без доказательства). Пусть функция $f(z) \in A(\mathbb{C})$ имеет порядок 1, $f(0) \neq 0$ и $f(z)$ имеет только простые нули a_n. Тогда*
$$f(z) = f(0) \cdot \exp\left(\frac{z \cdot f'(0)}{f(0)}\right) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \cdot \exp\left(\frac{z}{a_n}\right).$$

Следствие 6.5.1 (разложение для $\sin z$ и $\cos z$)**.**
$$\sin z = z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(\pi n)^2}\right),$$
$$\cos z = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^2}\right).$$

Доказательство. Докажем первое равенство. Применяем теорему Вейерштрасса для аналитической функции
$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \ldots,$$
для которой $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$. Легко проверить, что у функции $\sin z$ нули вида πn, $n \in \mathbb{Z}$ только простые. Тот факт, что уравнение $\sin z = 0$ кроме чисел πn не имеет других корней мы оставим без доказательства.

Второе равенство (для функции $\cos z$) предлагается читателя провести самостоятельно. $\square$

Следствие 6.5.2 (формула Валлиса)**.**

$$\frac{\pi}{2}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{2N+1}\left(\frac{(2N)!!}{(2N-1)!!}\right)^2\right).$$

Доказательство. 1)Подставим $x=\frac{\pi}{2}$ в разложение функции $\sin z/z$.

2) $\prod=\lim\limits_{N\to\infty}P_N,\ P_N=\prod\limits_{n=1}^{N}\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{2^2}{1\cdot3}\cdot\frac{4^2}{3\cdot5}\cdot\ldots\cdot\frac{(2N)^2}{(2N-1)(2N+1)}$. □

Теорема 6.5.5 (формула Стирлинга)**.**

$$n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\alpha_n,$$
$$\alpha_n=1+o(1),\ n\to\infty.$$

Доказательство. Введем $a_n=\frac{n!\cdot e^n}{n^{n+\frac12}},\ n\in\mathbb{N},\ a_0=1$. Справедливо $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{N\to\infty}\prod\limits_{n=1}^{N}\frac{a_n}{a_{n-1}}=A$. Чтобы показать, что бесконечное произведение сходится, докажем, что сходится соответствующий ряд. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=\exp\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)\right)$, поскольку

$$\ln\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)=\ln\left(\frac{e\cdot n(n-1)^{n-\frac12}}{n^{n+\frac12}}\right)=\ln\left(\frac{e\cdot n}{n-1}\left(1-\frac1n\right)^{n+\frac12}\right).$$

Теперь используя разложение

$$\left(1-\frac1n\right)^{n+\frac12}=\exp\left(\left(n+\frac12\right)\ln\left(1-\frac1n\right)\right)=\exp\left(\left(n+\frac12\right)\left(-\frac1n-\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right)=$$
$$=\exp\left(-1-\frac1n+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

С учётом последнего соотношения, продолжим

$$\ln\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)=\ln\left(\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\exp\left(-\frac1n+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)=\ln\left(\left(1+\frac1n+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1-\frac1n+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)=$$
$$\ln\left(1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Мы доказали, что сходимость логарифма равносильна сходимости ряда $\sum\frac{1}{n^2}$, что очевидно. Таким образом мы доказали, что справедливо $n!=A\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot(1+o(1))$, с некоторой константой A. Вычислим константу A. Для этого преобразуем выражение из формулы Валлиса:

$$\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2=\frac{1}{2n+1}\left(\frac{((2n)!!)^2}{(2n)!}\right)^2=\frac{1}{2n+1}\left(\frac{2^{2n}\cdot(n!)^2}{(2n)!}\right)^2.$$

Теперь подставив в полученное выражение, уже доказанные равенства

$$n!=A\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot(1+o(1)),\quad (2n)!=A\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\cdot(1+o(1)),$$

получаем

$$\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 = \frac{1}{2n+1}\left(\frac{2^{2n}A^2 n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}(1+o(1))}{A\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2n+1}\left(\frac{A}{\sqrt{2}}\sqrt{n}(1+o(1))\right)^2 = \frac{1}{2n+1}\cdot\frac{A^2}{2}n(1+o(1)) = \frac{A^2}{4}(1+o(1)).$$

Из формулы Валлиса вытекает $\frac{A^2}{4} = \frac{\pi}{2}$. Откуда $A = \sqrt{2\pi}$. □

Замечание 65. На самом деле справедливо разложение

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} - \frac{571}{2488320n^4} + O\left(\frac{1}{n^5}\right)\right),\ n\to\infty.$$

Контрольные вопросы.

1. Дайте определение сходимости бесконечного произведения.
2. Сформулируйте необходимый признак сходимости бесконечного произведения.
3. Сформулируйте критерий сходимости теорему бесконечного произведения в терминах суммы ряда.

Упражнения к 6.5

Упражнение 6.5.1. *Найдите кратность корня $z_0 = 0$ для следующих функций:*

$$(a)\quad z - z^3; \qquad (b)\quad \cos z - 1 + \frac{z^2}{2!}; \qquad (c)\quad \ln(1-z^5); \qquad (d)\quad z^{11}(5 - z + z^3);$$

Упражнение 6.5.2. *Исследуйте на сходимость следующие бесконечные произведения:*

$$(a)\ \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n^{3/4}}\right); \quad (b)\ \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{|\sin n|}{n}\right); \quad (c)\ \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right); \quad (d)\ \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n\ln n}\right);$$

$$(e)\ \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}; \quad (f)\ \prod_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}; \quad (g)\ \prod_{n=1}^{\infty}\sqrt[n^2]{n}; \quad (h)\ \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)^p.$$

Ответы: 6.5.1 (a) 1; (b) 4; (c) 5; (d) 11. **6.5.2** Сходятся в (a), (f), (g), (h) при любом p; расходятся — (b), (c), (d); расходится к нулю — (e).

6.6 Методы суммирования рядов

Теорема 6.6.1 (Теплица).

$$\begin{pmatrix} p_{11} & & & \\ p_{21} & p_{22} & & \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

$p_{nk} \in \mathbb{R},\ 1) p_{nk} \geqslant 0,\ 2) \sum\limits_{k=1}^{n} p_{nk} = 1,\ 3) \lim\limits_{n\to\infty} p_{nk} = 0,\ 4) \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$. *Тогда* $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} p_{nk}x_k = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Доказательство. Последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$, $\{x_n - a\}_{n=1}^{+\infty}$ сходятся, поэтому существует $M > 0$ такая, что $\forall n \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства $|x_n| \leqslant M,\ |x_n - a| \leqslant M$.

Для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ существует $N_1 : \forall n > N_1\ |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Для фиксированного (уже выбранного) $\varepsilon > 0$ существует $\exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n > N_2\ |p_{nk}| < \frac{\varepsilon}{2N_1 M}$ для всех $k = 1, \ldots N_1$. Без ограничения общности будем считать, что $N_2 > N_1$. Тогда для всех $n > N_2$ справедливо

$$\left|\sum_{k=1}^{n} p_{nk}x_k - a\right| = [2)] = \left|\sum_{k=1}^{n} p_{nk}(x_k - a)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{N_1} p_{nk}|x_k - a| + \sum_{k=N_1+1}^{n} p_{nk}|x_k - a| \leqslant M\sum_{k=1}^{N_1} p_{nk} + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=N_1+1}^{n} p_{nk} \leqslant$$
$$\leqslant M \cdot N_1 \cdot \frac{\varepsilon}{2N_1 M} + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=1}^{n} p_{nk} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Теорема доказана. □

Определение 6.6.1. Последовательность $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ - суммируема к S при помощи k-х чезаровских средних - (C, k) - суммирование, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n^k}{A_n^k} = S,$$

где $S_n^0 = S_n,\ S_n^k = \sum\limits_{j=0}^{n} S_j^{k-1};\ A_n^0 = 1,\ A_n^k = \sum\limits_{j=0}^{n} A_j^{k-1}$.

Определение 6.6.2. Ряд $\sum a_n$ называется суммируемым к S, если $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ — суммируема методом (C, k) к S.

Определение 6.6.3. Метод суммирования называется регулярным, если ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится к числу S и этим методом ряд суммируем к тому же числу S.

Замечание. Если метод суммирования регулярен, то полученная с помощью этого метода последовательность сходится к S.

Опишем метод $(C, 1)$:

$$S_n^1 = \sum_{j=0}^{n} S_j = (n+1)a_0 + na_n + \cdots + a_n,$$
$$A_n^1 = \sum_{j=0}^{n} 1 = n + 1.$$

Таким образом частичная сумма для метода $(C, 1)$ принимает вид:

$$a_0 + \frac{n}{n+1}a_1 + \cdots + \frac{n+1-k}{n+1}a_k \cdots + \frac{1}{n+1}a_n.$$

Опишем метод $(C, 2)$:

$$S_n^2 = \sum_{j=0}^{n} S_j^1 = (n+1)S_0 + nS_1 + \cdots + S_n =$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}a_0 + \frac{n(n+1)}{2}a_1 + \cdots + \frac{(n-k+1)(n-k+2)}{2}a_k + \cdots + 3a_{n-1} + a_n,$$
$$A_n^2 = \sum_{j=0}^{n} A_j^1 = (n+1)(n+2)/2.$$

Таким образом частичная сумма для метода $(C,2)$ принимает вид:

$$a_0 + \frac{n}{n+2}a_1 + \dots + \frac{(n+1-k)(n+2-k)}{(n+1)(n+2)}a_k \dots + \frac{6}{(n+1)(n+2)}a_{n-1} + \frac{2}{(n+1)(n+2)}a_n.$$

П р и м е р 6.6.1. Исследуем на сходимость ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n$.

Поскольку $\lim_{n\to+\infty}|a_n| = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1 \neq 0$, то данный ряд расходится. Исследуем на сходимость при помощи метода $(C,1)$. Для этого найдём частичные суммы:

$$\begin{array}{ll}
S_0 = 1; & S_1 = 1-1 = 0; \\
S_2 = 1-1+1 = 1; & S_3 = 1-1+1-1 = 0; \\
S_4 = 1-1+1-1+1 = 1; & S_5 = 1-1+1-1+1-1 = 0; \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots; & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots; \\
S_{2n} = 1; & S_{2n+1} = 0.
\end{array}$$

Следовательно

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{S_0+S_1+\ldots+S_n}{n+1} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом исходный ряд расходится в обычном смысле, но в смысле метода $(C,1)$ суммируем к $1/2$.

Теорема 6.6.2. *Методы $(C,1),(C,2)$ - регулярные методы суммирования.*

Доказательство. **1.** Рассмотрим $(C,1)$ метод суммирования. Рассмотрим числа p_{nk} заданные таблицей:

$$\begin{pmatrix}
1 & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
\frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+1} & \dots & \dots & \frac{1}{n+1}
\end{pmatrix}.$$

Тогда справедливо $p_{nk} \geqslant 0$, $\sum\limits_{k=0}^{n} p_{nk} = 1$. Следовательно из теоремы Теплица следует

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} p_{nk}S_k = \lim_{n\to\infty}\frac{S_0+\ldots+S_n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

2. Рассмотрим $(C,2)$ метод суммирования. Числа p_{nk} зададим таблицей:

$$\begin{pmatrix}
1 & & & & \\
\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & & & \\
\frac{3}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
\frac{n+1}{(n+1)(n+2)/2} & \dots & \dots & & \frac{1}{(n+1)(n+2)/2}
\end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что все условия теоремы Теплица выполняются. Откуда

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} p_{nk}S_k = \lim\frac{(n+1)S_0+nS_1+\ldots+2S_{n-1}+S_n}{(n+1)(n+2)/2} = \lim S_n.$$

□

Замечание 66. Метод (C,k) — регулярный метод суммирования. Доказательство можно провести при помощи индукции. Замечание доказано.

Теорема 6.6.3 (метод суммирования при помощи среднего гармонического). $a_n > 0$, $\frac{n}{\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\ldots+\frac{1}{S_n}}$ - *регулярный.*

Доказательство. Числа p_{nk} зададим таблицей:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ \frac{1/S_1}{1/S_1+1/S_2} & \frac{1/S_2}{1/S_1+1/S_2} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{1/S_1}{1/S_1+\ldots+1/S_n} & \ldots & & \frac{1/S_n}{1/S_1+\ldots+1/S_n} \end{pmatrix},$$

Последовательность S_n сходится по предположению, условия теоремы Теплица выполняются. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} p_{nk}S_k = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{S_1}+\ldots+\frac{1}{S_n}} = \lim S_n.$$

□

Замечание 67. Метод среднего геометрического тоже регулярен. поскольку известна оценка: для положительных $S_1, S_2, \ldots, S_n$ выполнены неравенства:

$$\frac{n}{\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\ldots+\frac{1}{S_n}} \leqslant \sqrt[n]{S_1\cdot S_2\cdot\ldots\cdot S_n} \leqslant \frac{S_1+S_2+\ldots+S_n}{n}.$$

Определение 6.6.4 (метод суммирования по Абелю). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\forall x \in (0,1)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ - сходится и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to 1-}\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = S \in \mathbb{R}$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ суммируем методом Абеля к S.

Теорема 6.6.4. *Метод суммирования по Абелю регулярен.* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S \Rightarrow$ *ряд суммируем по Абелю к* S.

Доказательство. $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, в точках $x = 0;\ 1$ - ряд сходится. По 2ой теореме Абеля ряд сходится равномерно на $[0,1] \Rightarrow f(x) \in C[0,1]$. Следовательно справедливо $f(1-0) = f(1)$, т.е. $\lim\limits_{x\to 1-}\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Теорема доказана. □

6.7 Вычисление некоторых сумм.

Суммы вида $\sum \frac{P_m(n)}{Q_l(n)}$, где $P_m(n), Q_l(n)$ - многочлены, вычисляются с помощью разложения на простые дроби и нахождения всех полученных сумм.

Суммы вида $\zeta(2k) = \sum_{k=1}^{\infty} 1/n^{2k}$ вычисляются следующим методом. Вычислим для 2 -ой и 4 -ой степени. Рассмотрим следующее выражение

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{(\pi n)^2}\right).$$

Прологарифмируем последнее равенство:

$$\ln\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1 - \frac{x^2}{(\pi n)^2}\right).$$

Откуда в окрестности нуля получаем

$$\left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \ldots\right) - \frac{\left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \ldots\right)^2}{2} + O(x^6) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{x^2}{(\pi n)^2} - \frac{x^4}{2(\pi n)^4} + O(x^6)\right).$$

Далее приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях для x^2 и x^4 имеем

$$x^2: \quad -\frac{1}{6} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\pi n)^2} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6};$$
$$x^4: \quad \frac{1}{120} - \frac{1}{72} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2(\pi n)^4} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Рассуждая аналогично мы сможем найти и последующие значения сумм $\zeta(2k)$:

$$\zeta(6) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}; \quad \zeta(8) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8} = \frac{\pi^8}{9450}; \quad \zeta(10) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{10}} = \frac{\pi^{10}}{93555}.$$

Замечание. Существует еще один метод суммирования. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. $u_n = \frac{1}{a_n a_{n+1} \ldots a_{n+m}} =$ [d - разность арифметической прогрессии] $= \frac{1}{md}\left(\frac{a_{n+m} - a_n}{a_n a_{n+1} \ldots a_{n+m}}\right) =$ [обозначим $V_n = -\frac{1}{md} \cdot \frac{1}{a_n \ldots a_{n+m-1}}$] $= V_{n+1} - V_n$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = -V_1 + V_\infty$ (метод арифметической прогрессии). $V_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} V_n$.

Глава 7

Ряды Фурье.

7.1 Общие ряды Фурье

Определение 7.1.1 (скалярное произведение в пространстве X)**.** Функция $(\bullet, \bullet) \to C$ называется скалярным произведением если

$$\begin{aligned} &1) \quad (x,y) = \overline{(y,x)};\\ &2) \quad (x_1+x_2, y) = (x_1,y)+(x_2,y);\\ &3) \quad (\alpha x, y) = \alpha(x,y), \forall \alpha \in \mathbb{C};\\ &4) \quad (x,x) \geqslant 0 \quad \text{причём} \quad (x,x)=0 \Leftrightarrow x = 0 \in X. \end{aligned}$$

Замечание 68. Приведём два примера пространств со скалярным произведением:

$$1) \quad X = \mathbb{C}^n: \ (\vec{x}, \vec{y}) = \sum x_i \bar{y}_i, \ \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n), \vec{y} = (y_1, \ldots, y_n).$$

$$2) \quad X = \mathbb{R}_2[-\pi,\pi] \Rightarrow \ \exists \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f|^2\,dx, \ (f,g) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Доказательство. Докажем 5-е свойство для 2). $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx = 0 \Rightarrow f = 0 \in \mathbb{R}_2$. Если предположить, что множество $A: f \neq 0, \ \mu(A) > 0$, то $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx = \int\limits_{A} |f|^2 dx + \int\limits_{[-\pi,\pi]\setminus A} |f|^2 dx \geqslant \varepsilon > 0.$ ☐

Замечание 69. Можно доказать то же самое рассматривая $f(x) \in C(x_0)$ на окрестности точки $x_0 \in A$.

Определение 7.1.2. Функционал $\|f\| = \sqrt{(f,f)}$ называется нормой в пространстве X.

Лемма 35 (неравенство Коши-Буняковского)**.** $|(x,y)|^2 \leqslant (x,x)\cdot(y,y)$.

Доказательство.

$$0 \leqslant (x+\lambda y, x+\lambda y) = (x,x) + \bar{\lambda}(x,y) + \lambda\overline{(x,y)} + \lambda\bar{\lambda}(y,y).$$

1) Пусть $(y,y) > 0$, тогда если $\lambda = -\frac{(x,y)}{(y,y)} \Rightarrow |(x,y)|^2 \leqslant (x,x)(y,y)$.

2) Пусть $(x,x) > 0$, аналогично $\lambda = -\frac{(x,y)}{(x,x)}$ в разложение $0 \leqslant (\lambda x + y, \lambda x + y)$.

3)если $(x,x) = (y,y) = 0, \ \lambda = -(x,y) \Rightarrow 0 \leqslant -2|(x,y)|^2 \Rightarrow (x,y) = 0.$ ☐

Лемма 36. *Если задано скалярное произведение, то можно ввести естественную норму* $\|f\| = \sqrt{(f,f)}$ *и метрику* $d(x,y) = \|x-y\|$.

Доказательство. 1)$\|\alpha \cdot f\| = |\alpha| \cdot \|f\|,\ \alpha \in \mathbb{C}$ - очевидно,

2)$\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$. После возведения в квадрат имеем

$$(f+g, f+g) \leqslant (f,f) + (g,g) + 2\sqrt{(f,f)(g,g)}.$$

Оставим квадратный корень в правой стороне неравенства и переместим остальное в левую часть неравенства:

$$(f,g) + \overline{(f,g)} \leqslant 2\sqrt{(f,f)(g,g)},$$

следовательно достаточно доказать: $\mathrm{Re}(f,g) \leqslant \sqrt{(f,f)(g,g)}$. Из неравентв

$$\mathrm{Re}(f,g) \leqslant |(f,g)| \leqslant \sqrt{(f,f)(g,g)},$$

где последнее неравенство справедливо по неравенству Коши-Буняковского, вытекает неравенство треугольника.

3)$\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$ в пространстве X — очевидно, $\forall f \in X\ \|f\| \geqslant 0$. □

Определение 7.1.3. Линейное пространство со скалярным произведением в конечномерное случае называют евклидовым или эрмитовым, когда полем констант является $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ соответственно. Если же линейное нормированное пространство бесконечной размерности, то его называют гильбертовым, если оно полное, и предгильбертовым, если оно не полно по отношению к метрике, индуцированной естественной нормой в нём.

Рассмотрим конечномерный случай. $e_1, \dots, e_n$ - ортонормированная система векторов. Исследуем условия, при которых $f \sim \sum\limits_{i=1}^{n} (f, e_i) e_i$.

Рассмотрим процесс ортогонализации (Гильберта-Шмидта). $f_1, \dots, f_n$ - линейно независимая система векторов, $g_1, \dots, g_n$ - ортонормированная система векторов.

$$\begin{aligned} g_1 &= f_1, \\ g_2 &= \frac{f_2 - (f_2, g_1) g_1}{\|f_2 - (f_2, g_1) g_1\|}, \\ &\dots, \\ g_n &= \frac{f_n - \sum\limits_{k=1}^{n-1} (f_n, g_k) g_k}{\|f_n - \sum\limits_{k=1}^{n-1} (f_n, g_k) g_k\|}. \end{aligned}$$

Определение 7.1.4. Пусть X — евклидово пространство, $x \in X$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(x, e_k) e_k}{(e_k, e_k)}$ - называется разложением в ряд Фурье по ортогональной системе векторов $e_1, \dots, e_n$.

Определение 7.1.5. Если $e_1, \dots, e_n$ ортонормированная система векторов, то разложением будет $\sum\limits_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k$.

Замечание. Теоремы для ортонормированной системы векторов верны для ортогональной.

Лемма 37 (о разложении). *Пусть X — евклидово пространство со скалярным произведением, $e_1, \dots, e_n$ - ортонормированная система векторов, $x_e = \sum\limits_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i \Rightarrow h = x - x_e \perp \pi(e_1, \dots, e_n)$ - получаем коэффициенты Фурье (π - обозначает плоскость).*

Доказательство. $j=\overline{1,n}$, $(x-x_e,e_j)=(x,e_j)-(\sum(x,e_i)e_i,e_j)=(x,e_j)-\sum\limits_{i=1}^{n}(x,e_i)(e_i,e_j)=(x,e_j)-(x,e_j)=0$, $x=x_e+h$, h - ортогонален линейной оболочке $(e_1,\dots,e_n)$. □

Лемма 38 (теорема Пифагора). *Пусть $x_1,\dots,x_n$ — ортогональная система векторов. Пусть $x=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\Rightarrow$ $\|x\|^2=\|x_1\|^2+\ldots+\|x_n\|^2$.*

Доказательство. $\|x\|^2=(x,x)=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i,\sum\limits_{j=1}^{n}x_j\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}(x_i,x_j)=\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i,x_i)=\|x_1\|^2+\ldots+\|x_n\|^2$. □

Лемма 39 (экстремальные свойства рядов Фурье). *Пусть $e_1,\dots,e_n$ — ортонормированная система векторов. $y=\sum\alpha_k e_k$, $x\in X\Rightarrow\|x-y\|\geqslant\|x-x_e\|$.*

Доказательство. $x=x_e+h$, $x-y=(x_e-y)+h$, h - ортогонален (x_e-y) $(h\perp(x_e-y))$. Следовательно справедливо

$$\|x-y\|^2=\|x_e-y\|^2+\|h\|^2\geqslant\|h\|^2=\|x-x_e\|^2.$$

□

Лемма 40 (неравенство Бесселя). *Пусть $e_1,\dots,e_n$ — ортонормированная система векторов в евклидовом пространстве X. $x\in X$; $\sum\limits_{k=1}^{n}|(x,e_k)|^2\leqslant\|x\|^2$.*

Доказательство. $x=x_e+h$, $x_e=\sum\limits_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k$, по теореме Пифагора

$$\|x\|^2=\|x_e\|+\|h\|^2=\sum_{k=1}^{n}|(x,e_k)|^2\cdot\|e_k\|+\|h\|^2\geqslant\sum_{k=1}^{n}|(x,e_k)|^2.$$

□

Лемма 41 (о непрерывности скалярного произведения). *Пусть $e_1,\dots,e_n$ — ортонормированная система векторов. Тогда*

1. (x,y) *— непрерывная функция по обоим аргументам (по совокупности);*

2. $x=\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k\Rightarrow(x,y)=\sum(x_k,y)$*;*

3. $(x,e_k)=x_k$, $(y,e_k)=y_k\Rightarrow(x,y)=\sum x_k\bar{y}_k$.

Доказательство. 1)(x,y) - непрерывна по совокупности $\|(x-x_0,y-y_0)\|^2\leqslant\|x-x_0\|^2\cdot\|y-y_0\|^2$.

2) Вытекает из равенства $(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k,y)+(\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}x_k,y)$ и оценки $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}x_k\longrightarrow0$, $n\to\infty$. Следовательно из 1) следует требуемое.

3) $x=\sum x_k e_k$, $y=\sum y_k e_k$, применяя два раза предыдущее, получаем требуемое. □

Определение 7.1.6. Система $\{x_\alpha,\ \alpha\in A\}$ называется полной в $E\subset X$, если для $\forall x\in E$, $\forall\varepsilon>0$ $\exists$ линейная комбинация векторов x_α; $\exists\sum c_\alpha x_\alpha:\ \|x-\sum c_\alpha x_\alpha\|\leqslant\varepsilon$.

Лемма 42. *1)$e_1,\dots,e_n$ - полная ортонормированная система векторов в $E\subset X$, 2)$\forall x\in E$ $x=\sum(x,e_k)e_k$, 3)выполняется равенство Парсеваля $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|(x,e_k)|^2=\|x\|^2$. Тогда* 1) $\Leftrightarrow$ 2) $\Leftrightarrow$ 3).

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). По экстремальному свойству коэффициентов Фурье $\|x-\sum\limits_{k=1}^{\infty}(x,e_k)e_k\|\leqslant\|x-y\|\longrightarrow0$, $n\to\infty$, $y\in$ линейной оболочке $e_1,\dots,e_n$. 2) $\Rightarrow$ 3). По лемме о непрерывности скалярного произведения. 3) $\Rightarrow$ 1). $\|x-\sum\limits_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k\|^2=\|x_e+h-\sum\limits_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k\|^2=\|h\|^2=\|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}(x,e_k)e_k\|^2=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}|(x,e_k)e_k|^2\longrightarrow0$, $n\to\infty$. □

7.2 Функции ограниченной вариации. Тригонометрический ряд Фурье

7.2.1 Тригонометрический ряд. Ортогональная система.

Лемма 43. *Тригонометрическая система* $\{1, \cos kx, \sin kx; k \in \mathbb{N}\}$ *ортоганальна на отрезке* $[-\pi; \pi]$ *относительно скалярного произведения* $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,dt$.

Доказательство. Действительно, это вытекает из равенств, справедливых для всех $k \in \mathbb{N}$:

$$(1, \cos kx) = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos kt\,dt = \frac{\sin kt}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0;$$

$$(1, \sin kx) = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin kt\,dt = -\frac{\cos kt}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$(\cos kx, \sin kx) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin kt \cos kt\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2kt\,dt = \frac{-\cos 2kx}{4k}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

и равенств для всех $k, n \in \mathbb{N}$, $k \neq n$:

$$(\cos kx, \sin nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \cos kt\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\sin(n+k)t + \sin(n-k)t)\,dt =$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos(n+k)t}{n+k} + \frac{\cos(n-k)t}{n-k}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0;$$

$$(\cos kx, \cos nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos kt\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(n-k)t + \cos(n+k)t)\,dt =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(n-k)t}{n-k} + \frac{\sin(n+k)t}{n+k}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0;$$

$$(\sin kx, \sin nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \sin kt\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(n-k)t - \cos(n+k)t)\,dt =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(n-k)t}{n-k} - \frac{\sin(n+k)t}{n+k}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

□

Определение 7.2.1. *Тригонометрический ряд* — это ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

получаемый на базе тригонометрической системы $\{1, \cos kx, \sin kx; k \in \mathbb{N}\}$. Коэффициенты $\{a_0, a_k, b_k; k \in \mathbb{N}\}$ здесь вещественные или комплексные числа. Частичные суммы тригонометрического ряда — тригонометрические многочлены

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

соответствующей степени n.

Предположим, что тригонометрический ряд равномерно сходится на отрезке $[-\pi; \pi]$ к некоторой функции $f(x)$. Тогда по теореме об интегрируемости функционального ряда можно почленно проинтегрировать ряд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

предварительно умноженный на $\cos kx$. Используя ортогональность тригонометрической системы, приходим к равенству
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt = a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kt \cos kt\,dt = a_k \cdot \pi.$$
Таким образом
$$a_k = a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt, \quad k \in \mathbb{Z}_+ \tag{7.2.1}$$
и аналогично
$$b_k = b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{7.2.2}$$

Определение 7.2.2. Если для функции $f(x)$, определённой на $[-\pi;\pi]$, имеют смысл интегралы (7.2.1), (7.2.2), то сопоставляемый f тригонометрический ряд
$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx)$$
называется *тригонометрическим рядом Фурье* функции f.

Замечание 70. В частности для функции $f, |f| \in \mathcal{R}[-\pi;\pi]$ имеют смысл интегралы (7.2.1), (7.2.2). Поэтому для функций $f, |f| \in \mathcal{R}[-\pi;\pi]$ будем рассматривать тригонометрический ряд Фурье.

П р и м е р 7.2.1. Разложите в ряд Фурье функцию
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi - x}{2}, & x \in (0;\pi], \\ 0, & x = 0, \\ -\frac{\pi + x}{2}, & x \in [-\pi; 0), \end{cases}$$
т.е. найдите тригонометрический ряд Фурье для функции $f(x)$. Исследуйте вопрос о сходимости тригонометрического ряда Фурье.

Решение. Сразу заметим, что
$$a_k = a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt = 0, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$
Последнее равенство вытекает из того, что интеграл от нечётной функции $f(t)\cos kt$ по симметричному

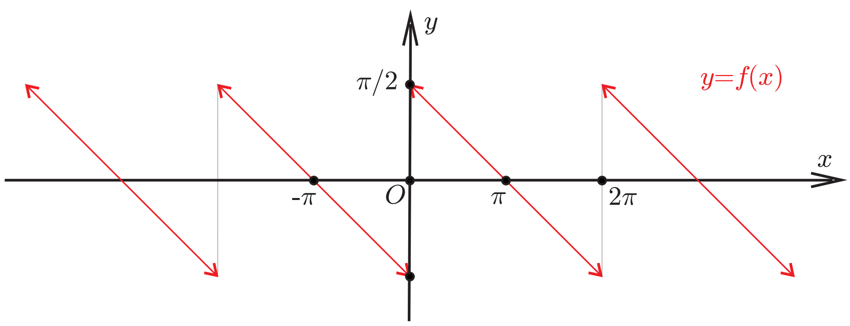


Рис. 7.1: график функции $f(x)$

относительно нуля отрезку равен нулю. Найдём коэффициенты b_k
$$b_k = b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\pi - t}{2}\sin kt\,dt.$$

Здесь мы воспользовались чётностью функции $f(t)\sin kt$. Используя формулу интегрирования по частям получаем

$$b_k = -\frac{2}{\pi k}\int_0^\pi \frac{\pi - t}{2}\, d\cos kt = -\frac{2}{\pi k}\left(\frac{\pi - t}{2}\cdot \cos kt\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos kt\, dt\right) = -\frac{2}{\pi k}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{k}.$$

Таким образом

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin kx}{k}.$$

Если $x \in [-\pi;\pi]\backslash\{0\}$, то функция в этой точке непрерывна вместе со своей производной, поэтому во всех таких точках будет справедливо равенство $f(x) = S_f(x)$, где через $S_f(x)$ мы обозначили тригонометрический ряд Фурье данной функции. В точке $x = 0$ график функции $f(x)$ терпит разрыв первого рода, поэтому (это докажем чуть позже)

$$S_f(0) = \frac{f(0-0)+f(0+0)}{2} = \frac{\pi/2 - \pi/2}{2} = 0 = f(0).$$

Таким образом для всех $x \in [-\pi;\pi]$ нами доказано равенство

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin kx}{k}.$$

□

П р и м е р 7.2.2. Разложите в ряд Фурье функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\pi;\pi]$

$$f(x) = \mathrm{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0;\pi), \\ 0, & x = 0;\ \pm\pi, \\ -1, & x \in (-\pi;0), \end{cases}$$

а далее продолженную с периодом 2π на всю числовую ось. Исследуйте вопрос о сходимости тригонометри-

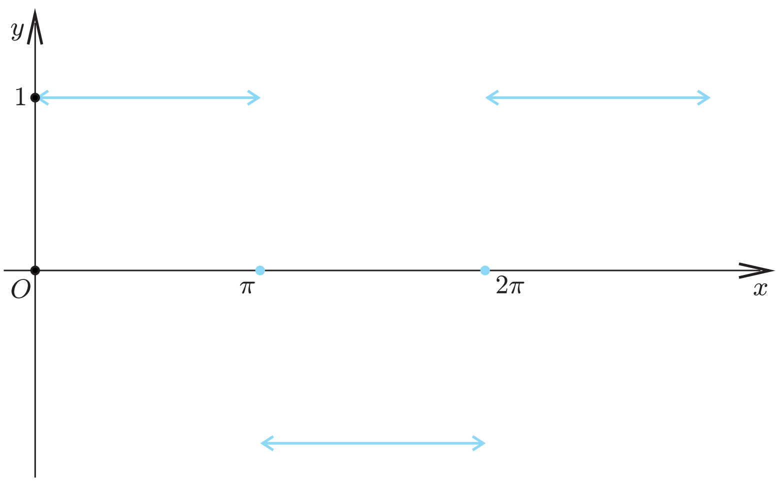


Рис. 7.2: график функции $f(x)$

ческого ряда Фурье.

Решение. Сразу заметим, что

$$a_k = a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\, dt = 0, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Последнее равенство вытекает из того, что интеграл от нечётной функции $f(t)\cos kt$ по симметричному

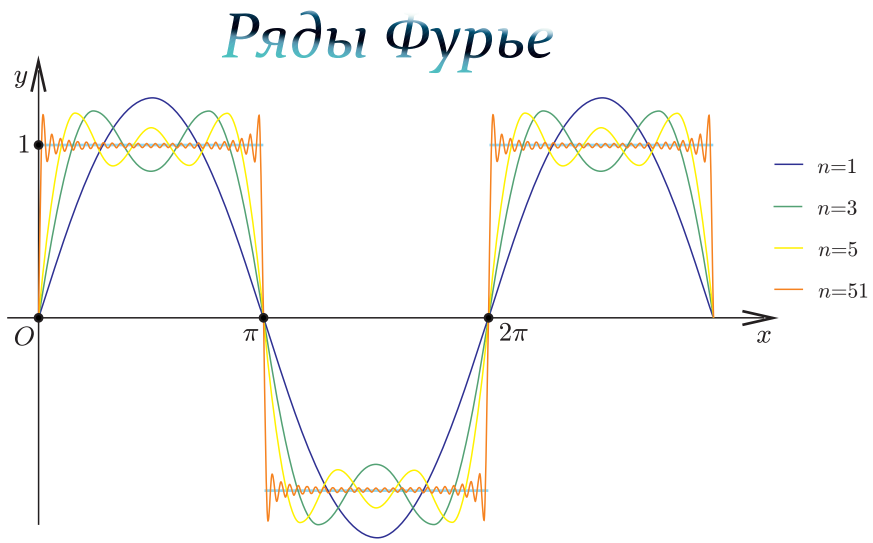


Рис. 7.3: частичные суммы $S_n(f,x)$ ряда Фурье для $f(x)$ при различных n

относительно нуля отрезку равен нулю. Найдём коэффициенты b_k

$$b_k = b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin kt\,dt.$$

Здесь мы воспользовались чётностью функции $f(t)\sin kt$. Далее получаем

$$b_k = -\frac{2}{\pi k}\left(\cos kt\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{2(1-(-1)^k)}{\pi k} = \begin{cases} 0, & k = 2l,\ l\in\mathbb{Z},\\ \frac{4}{\pi(2l-1)}, & k = 2l-1,\ l\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

Таким образом

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi}\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{\sin{(2l-1)x}}{2l-1}.$$

Если $x\in(-\pi;\pi)\backslash\{0\}$, то функция в этой точке непрерывна вместе со своей производной, поэтому во всех таких точках будет справедливо равенство $f(x) = S_f(x)$, где через $S_f(x)$ мы обозначили тригонометрический ряд Фурье данной функции. В точке $x=0$ (и аналогично во всех точках вида $x=\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$) график функции $f(x)$ терпит разрыв первого рода, поэтому (это докажем чуть позже)

$$S_f(0) = \frac{f(0-0)+f(0+0)}{2} = \frac{1-1}{2} = 0 = f(0).$$

Аналогично $S_f(\pi k) = 0 = f(\pi k)$, $k\in\mathbb{Z}$. Таким образом для всех $x\in\mathbb{R}$ нами доказано равенство

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{\sin{(2l-1)x}}{2l-1}.$$

$\square$

Замечание 71. Мы предъявили формулы для функции, заданной на отрезке $[-\pi;\pi]$. По аналогии определяются формулы коэффициентов ряда Фурье для функции $f(x)$, определённой на отрезке $[0;2l]$, такой, что $f, |f|\in\mathcal{R}[0;2l]$

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k(f)\cos\frac{k\pi x}{l} + b_k(f)\sin\frac{k\pi x}{l}\right),$$

где

$$a_k = a_k(f) = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(t)\cos\frac{k\pi t}{l}\,dt, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$
$$b_k = b_k(f) = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(t)\sin\frac{k\pi t}{l}\,dt, \quad k \in \mathbb{N}.$$

П р и м е р 7.2.3. Разложите в ряд Фурье функцию $f(x) = \{x\}$ на всей числовой оси. Исследуйте вопрос

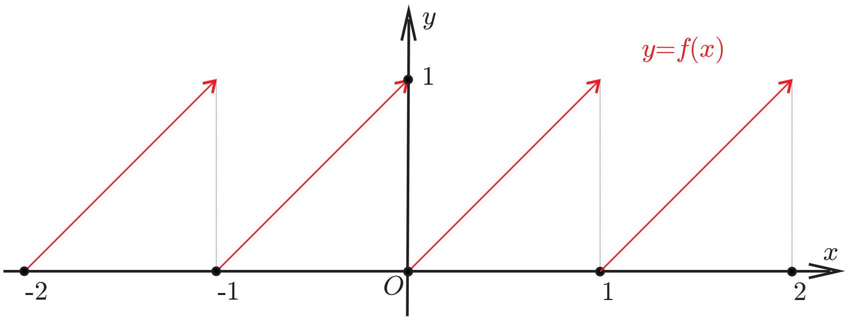


Рис. 7.4: график функции $f(x)$

о сходимости тригонометрического ряда Фурье.

Решение. Сразу заметим, используя интегрирование по частям легко найти:

$$a_k = a_k(f) = 2\int_0^1 f(t)\cos(2\pi kt)\,dt = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$
$$b_k = b_k(f) = 2\int_0^1 f(t)\sin(2\pi kt)\,dt = -\frac{1}{\pi k}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Таким образом

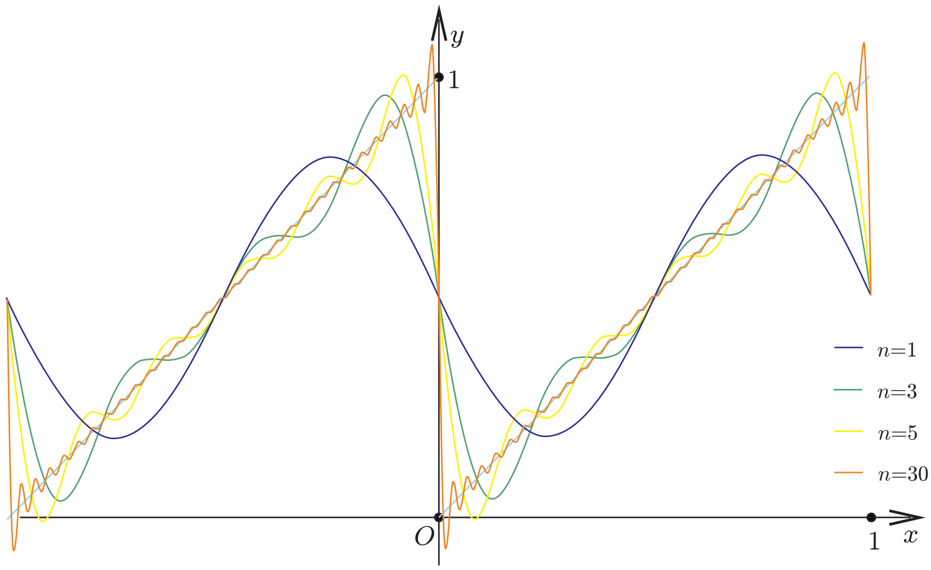


Рис. 7.5: частичные суммы $S_n(f,x)$ ряда Фурье для $\{x\}$ при различных n

$$f(x) \sim \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin 2\pi kx}{\pi k}.$$

Если $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, то функция в этой точке непрерывна вместе со своей производной, поэтому во всех таких точках будет справедливо равенство $f(x) = S_f(x)$, где через $S_f(x)$ мы обозначили тригонометрический ряд Фурье данной функции. В точке $x = n$, $n \in \mathbb{Z}$ график функции $f(x)$ терпит разрыв первого рода, поэтому (это докажем чуть позже)

$$S_f(n) = \frac{f(n-0) + f(n+0)}{2} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом для всех $x \in \mathbb{R}$ нами доказано равенство

$$\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin 2\pi kx}{\pi k} = \begin{cases} \{x\}, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}, \\ \frac{1}{2}, & x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

□

7.2.2 Функция ограниченной вариации

Определение 7.2.3 (Функция ограничена вариацией)**.** Пусть задана функция $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, положим

$$Var_a^b f = \sup_{a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|,$$

где супремум берётся по всем возможным разбиениям $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ отрезка $[a;b]$. Говорят, что функция $f \in Var_a^b$; f имеет конечную вариацию на $[a,b]$, если $Var_a^b f < \infty$. Для краткости будем обозначать $V_a^b f = Var_a^b f$.

Теорема 7.2.1 (о свойствах вариаций)**.** *Справедливы следующие равенства*

1. $V_a^b(\alpha \cdot f) = |\alpha| \cdot V_a^b f$.

2. *Пусть* $c \in (a;b)$. *Тогда* $V_a^c f + V_c^b f = V_a^b f$.

3. *Функция* $V(x) = Var_a^x f$ *— монотонная неубывающая.*

4. *Произвольную функцию ограниченной вариации на отрезке* $[a;b]$ *можно представить в виде* $f = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$, *где* $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ *— монотонные неубывающие функции.*

Доказательство. **1.** Очевидно.

2. Если $\exists x_r = c$, где x_r - точка разбиения, то $\sum\limits_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum\limits_{k=1}^{r} + \sum\limits_{k=r+1}^{n} \leqslant V_a^c f + V_c^b f$. Если такой точки разбиения не нашлось, то добавим точку c в разбиение. Предположим $c \in (x_r; x_{r+1})$ и перенумеруем точки разбиения как показано на рисунке. Т.е. положим $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, $\ldots$, $y_r = x_r$, $y_{r+1} = c$, $y_{r+2} = x_{r+1}$, $\ldots$, $y_{n+1} = x_n$. Из очевидного неравенства $|f(x_r) - f(c) + (f(c) - f(x_{r+1}))| \leqslant |f(x_r) - f(c)| + |f(c) - f(x_{r+1})|$ получаем

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leqslant \sum_{k=1}^{n+1} |f(y_k) - f(y_{k-1})| \leqslant V_a^c f + V_c^b f.$$

Покажем, что справедливо и неравенство в другую сторону. Действительно, зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ тогда существуют точки $x_0, \ldots, x_r$ такие, что

$$\sum_{k=0}^{r} |f(x_k) - f(x_{k-1})| > V_a^c f - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Аналогично существуют точки $x_{r+1}, \ldots, x_n$ такие, что

$$\sum_{k=r+1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| > V_c^b f - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Сложим последнии два неравенства:

$$\sum_{k=0}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|\geqslant V_a^c f+V_c^b f-\varepsilon\Rightarrow V_a^b f\geqslant V_a^c f+V_c^b f.$$

3. Пусть $x_1\geqslant x_2$, тогда $V_a^{x_1}f-V_a^{x_2}f=V_{x_2}^{x_1}f\geqslant 0$.

4. Положим $\varphi(x)=V(x)-f(x)$. Пусть $x_1\geqslant x_2$, из неравенства $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant V_{x_2}^{x_1}f=V(x_1)-V(x_2)$ вытекает

$$\varphi(x_1)-\varphi(x_2)=V(x_1)-V(x_2)-(f(x_1)-f(x_2))\geqslant 0.$$

□

Лемма 44. *Пусть f имеет период 2π, $f\in R[-\pi,\pi]$. Тогда для любой константы $a\in\mathbb{R}$ выполняется*

$$\int\limits_a^{2\pi+a}f(x)dx=\int\limits_0^{2\pi}f(x)dx.$$

Доказательство. $\int\limits_a^{2\pi+a}=\int\limits_a^{2\pi}+\int\limits_{2\pi}^{2\pi+a}=$ [заменим $t=x-2\pi$, $dt=dx$, $f(t)=f(x)$ в последнем интеграле] $=\int\limits_0^{a}+\int\limits_a^{2\pi}=\int\limits_0^{2\pi}$. □

Лемма 45 (Римана-Лебега)**.** *Пусть функции $f,|f|\in R([a;b])$ или хотя бы интегрируемы по Риману в несобственном смысле (либо $f\in L([a;b])$). Тогда $\int\limits_a^b f(x)e^{-i\lambda x}\,dx\longrightarrow 0,\ \lambda\to+\infty$.*

Доказательство. Пусть $\varphi(x)\in C^1[a,b]$. Докажем утверждение леммы для φ. Для этого проинтегрируем по частям

$$\int\limits_a^b\varphi(x)e^{-i\lambda x}dx=-\frac{1}{i\lambda}\left(\varphi(x)e^{-i\lambda x}\Big|_a^b\right)+\frac{1}{i\lambda}\int\limits_a^b\varphi'(x)e^{-i\lambda x}dx=O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\longrightarrow 0,\ \lambda\to+\infty.$$

Из того, что существует[1] функция $\varphi\in C^1[a,b]$, такая, что $\int\limits_a^b|f-\varphi|dx\leqslant\varepsilon$ и равенства $f\cdot e^{-i\lambda x}=(f-\varphi)\cdot e^{-i\lambda x}+\varphi\cdot e^{-i\lambda x}$, получаем

$$\left|\int\limits_a^b f(x)e^{-i\lambda x}\,dx\right|\leqslant\int\limits_a^b|f-\varphi|\,dx+\left|\int\limits_a^b\varphi(x)e^{-i\lambda x}\,dx\right|\leqslant 2\varepsilon,$$

т.к. каждый интеграл $\leqslant\varepsilon$. □

Доказательство. (Другой способ доказательства леммы Римана-Лебега) Докажем утверждение сначала для характеристической функции $f=\chi_{[\alpha,\beta]}(x)$. Тогда

$$\int\limits_\alpha^\beta e^{-i\lambda x}\,dx=\frac{1}{i\lambda}(e^{-i\lambda\beta}-e^{-i\lambda\alpha})\to 0,\quad\lambda\to+\infty.$$

Поскольку выражение $e^{-i\lambda\beta}-e^{-i\lambda\alpha}$ для вещесвенных α, β, λ ограничено.

[1]Например, это вытекает из полноты тригонометрической системы в L_1. Также данный факт вытекает из разобранного примера **??**, где доказано, что многочлены Бернштейна сходятся равномерномерно на отрезке к непрерывной функции.

Далее, по линейности утверждение леммы верно для конечных линейных комбинаций характеристических функций. В общем случае приблизим произвольную функцию f ступенчатой функцией f_ε по норме L_1 с точностью ε^2. Тогда

$$\Big|\int\limits_a^b f(x)e^{-i\lambda x}\,dx\Big| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)-f_\varepsilon(x)|\cdot|e^{-i\lambda x}|\,dx + \Big|\int\limits_a^b f_\varepsilon(x)e^{-i\lambda x}\,dx\Big|$$

Первое слагаемое не превосходит ε, а второе стремится к нулю по уже доказанному. □

Определение 7.2.4. f локально интегрируема $\overset{def}{\Leftrightarrow} f \in R_{loc}(a,b) \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall [c,d]\subset(a,b)\ f\in R[c,d]$.

Определение 7.2.5. Под тором $T=[-\pi,\pi]$ мы будем понимать отрезок $[-\pi,\pi]$ с отождествлёнными концами, т.е. точку $x=-\pi$ будем отождествлять с $x=\pi$.

Замечание 72. Можно ослабить условие интегрируемость: f локально интегрируема (для интеграла Римана) на $[a,b]$, причем $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится также и абсолютно в несобственном смысле.

Доказательство. $\forall\varepsilon>0\ \exists\ [c,d]\subset(a,b)$ $\left|\int\limits_a^b - \int\limits_c^d\right| = \left|\int\limits_a^c + \int\limits_d^b\right| \leqslant \int\limits_a^c |f(x)|dx + \int\limits_d^b |f(x)|dx <\ [\ |e^{i\lambda x}|=1\ ]\ < \varepsilon$, по абсолютной сходимости несобственного интеграла $\left|\int\limits_a^b f(x)e^{i\lambda x}dx - \int\limits_c^d f(x)e^{i\lambda x}dx\right| < \varepsilon$. □

Теорема 7.2.2 (о сходимости ряда Фурье)**.** *Пусть функции $f,|f|\in R(T)$ (либо $f\in L(T)$), $\delta\in(0;\pi]$. Тогда условие сходимости ряда $S_n(x)\longrightarrow s$, $n\to+\infty$. равносильно условию*

$$\int\limits_0^\delta \frac{\sin(n+\frac12)t}{t}\cdot\{f(x+t)+f(x-t)-2s\}\,dt \longrightarrow 0,\ n\to+\infty.$$

Доказательство. $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\begin{pmatrix} \cos kt \\ \sin kt\end{pmatrix} dt.$

Приведём здесь, лишь идею доказательства. Полное доказательство будет дано ниже. $f(x)$; $S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n \sin nx)$, $S_n(f,x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}(a_n\cos kx + b_n\sin kx)$, $s\in R$,

$$S_n(f,x)-s = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{\sin(n+\frac12)t}{2\sin\frac t2}\{f(x+t)+f(x-t)-2s\}\,dt,$$

$$S_n(f,x)-s = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\delta \frac{\sin(n+\frac12)t}{2\sin\frac t2}\{f(x+t)+f(x-t)-2s\}\,dt + o(1),\ n\to\infty$$

$$S_n(f,x)-s = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\delta \frac{\sin(n+\frac12)t}{t}\{f(x+t)+f(x-t)-2s\}\,dt + o(1).$$

[2] Для интегрируемых функций по Лебегу это вытекает из определения, а для интегрируемых по Риману их того, что, например, нижняя сумма Дарбу является конечной комбинацией характеристических функций.

В последнем равенстве мы заменили $\sin\frac{t}{2}$ на $\frac{t}{2}$, т.к. в окрестности нуля данные функции эквивалентны. Если последний интеграл стремиться к нулю, то $S_n(f,x) \longrightarrow s$, $n \to +\infty$ и следовательно ряд Фурье сходится к s. $\square$

7.3 Ядра Дирихле, Фейера, Джексона-Стечкина.

Лемма 46 (о ядре Дирихле). *Для ядра Дирихле* $D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \cos kx$, *справедливо:*

$$a)\quad D_n(x) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}},$$

$$b)\quad D_n(x)\ -\ \textit{четная функция.}$$

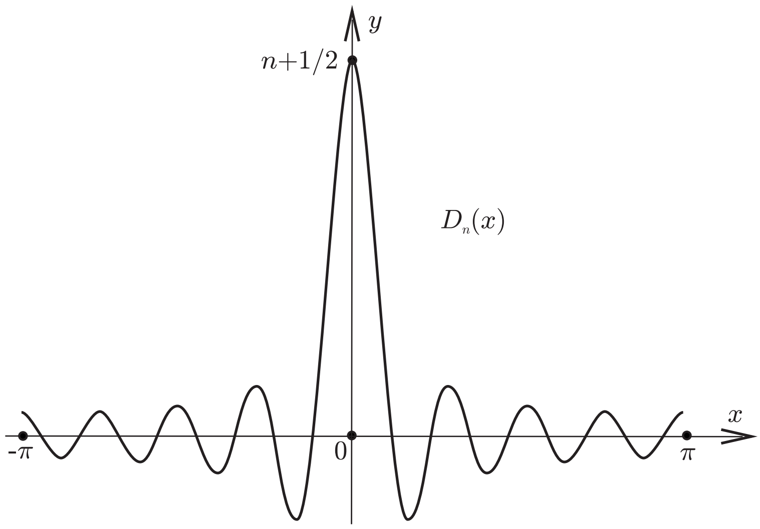


Рис. 7.6: ядро Дирихле

Доказательство. Докажем свойство a). Справедливо

$$2\sin\frac{x}{2}\cdot\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kx\right) = \sin\frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\cos kx =$$
$$= \sin\frac{x}{2} + \left(\sin\frac{3x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right) + \left(\sin\frac{5x}{2} - \sin\frac{3x}{2}\right) + \ldots + \left(\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right) =$$
$$= \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x.$$

Свойство b) — очевидно. $\square$

Лемма 47 (о ядре Фейера). *Для ядра Фейера* $F_{n-1}(x) = \frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)\cos kx$, *справедливо*

$$a)\quad F_{n-1}(x) = \frac{D_0 + D_1 + \ldots + D_{n-1}}{n},$$

$$b)\quad F_{n-1}(x) = \frac{\sin^2\frac{nx}{2}}{2n\sin^2\frac{x}{2}},$$

$$c)\quad F_{n-1}(x) -\ \textit{неотрицательная четная функция.}$$

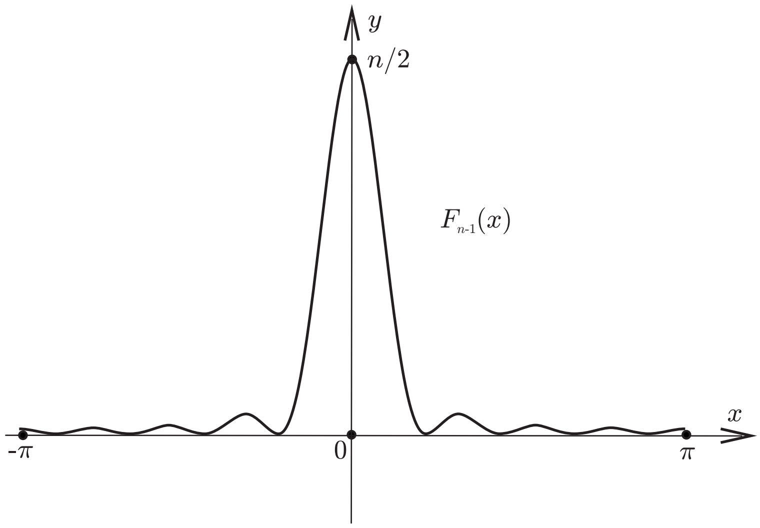


Рис. 7.7: ядро Фейера

Доказательство. Докажем *a*. Из равенств $D_0 = \frac{1}{2}$, $D_1 = \frac{1}{2} + \cos x$, …, $D_{n-1} = \frac{1}{2} + \cos x + \ldots + \cos(n-1)x$, получаем

$$\frac{D_0 + D_1 + \ldots + D_{n-1}}{n} = \frac{1}{2} + \frac{n-1}{n}\cos x + \frac{n-2}{n}\cos 2x + \ldots + \frac{1}{n}\cos(n-1)x = F_{n-1}(x).$$

Докажем пункт b). Справедливо равенство $\sum\limits_{k=0}^{n-1} D_k = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\sin(k+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$. Домножим $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x$ на $2\sin\frac{x}{2}$, получим

$$\begin{aligned} 2\sin\frac{x}{2}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right) &= (1-\cos x) + (\cos x - \cos 2x) + \ldots + (\cos(n-1)x - \cos nx) \\ &= 1 - \cos nx = 2\sin^2\frac{nx}{2}. \end{aligned}$$

Пункт c) получаем из b). ☐

Определение 7.3.1. Будем говорить, что $f(n)$, $g(n)$ — функции одного порядка и писать $f(n) \asymp g(n)$, если существуют такие положительные константы $c_1, c_2 > 0$, что $\forall n > n_0$ выполнены неравенства $c_1 f(n) \leqslant g(n) \leqslant c_2 f(n)$.

Лемма 48 (о ядре Джексона-Стечкина)**.** *Для ядра Джексона-Стечкина* $J_{N,r}(x) = \frac{1}{\Delta_{N,r}}\left(\frac{\sin\frac{N}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\right)^{2r}$, $\Delta_{N,r} = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin\frac{N}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\right)^{2r}dx$, $N, r \in \mathbb{N}$ *справедливо:*

a) $J_{N,r}(x) \geq 0$, *неотрицательная и четная функция,*

b) график такой же как график ядра Фейера, только волны убывают быстрее,

c) $J_{N,r} \in \mathcal{T}_{(N-1)r}$, *т.е.* $J_{N,r}$ *тригонометрический полином порядка не выше, чем* $(N-1)r$,

d) $\Delta_{N,r} \asymp N^{2r-1}$,

e) $\int\limits_0^{\pi} t^k J_{N,r}(t)dt \leq cN^{-k}$, $k = \overline{0, 2r-2}$.

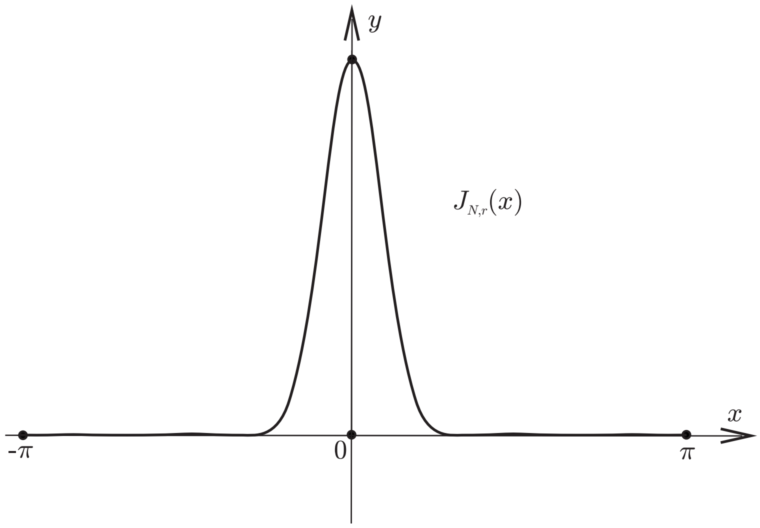


Рис. 7.8: ядро Джексона-Стечкина

Доказательство. a) - очевидно.

c) Вытекает из равенства

$$J_{N,r}(x) = \frac{1}{\Delta_{N,r}} \cdot \left(\frac{\sin \frac{N}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} \right)^{2r} = C \cdot (F_{N-1}(x))^r = C \cdot \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} \left(1 - \frac{k}{N} \right) \cos kx \right)^r =$$
$$= \sum_{k=0}^{(N-1)r} c_k \cos kx.$$

В разложении будут участвовать только косинусы с некоторыми постоянными c_k, поскольку исходная функция чётная.

d) Из равенства $\frac{2x}{\pi} \le \sin x \le x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, получаем

$$\Delta_{N,r} = 2 \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin \frac{N}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} \right)^{2r} dx \asymp \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin \frac{N}{2} x}{x} \right)^{2r} dx \asymp [\text{ замена } \frac{N}{2} x = u] \asymp$$
$$\asymp N^{2r-1} \int_0^{\frac{N\pi}{2}} \left(\frac{\sin u}{u} \right)^{2r} du \asymp N^{2r-1},$$

т.к. интеграл абсолютно сходится: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \le \int\limits_0^{\frac{N\pi}{2}} \le \int\limits_0^{\infty}$.

e) Из оценки

$$\int_0^{\pi} t^k \left(\frac{\sin \frac{N}{2} t}{\sin \frac{t}{2}} \right)^{2r} dt \asymp \int_0^{\pi} \frac{(\sin \frac{N}{2} t)^{2r}}{t^{2r-k}} dt \asymp$$
$$\asymp [\text{ замена } \frac{N}{2} t = u] \asymp \int_0^{\frac{N\pi}{2}} \frac{(\sin u)^{2r}}{u^{2r-k}} du \cdot N^{2r-k-1} \asymp N^{2r-k-1},$$

разделив на $\Delta_{N,r}$ получим требуемое. $\square$

7.4 Критерий сходимости ряда Фурье к s для 2π -периодичных функций

$$S_n(f,x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\cos kt\cos kx+\sin kt\sin kx)\right\}dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)D_n(t-x)dt=[\text{ замена } t-x=u]=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(u+x)D_n(u)du.$$

Итого мы получили представление:

$$S_n(f,x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x+t)D_n(t)dt.$$

Замечание 73. $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}1\cdot D_n(t)dt=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}2\cdot D_n(t)dt=1$, т.к. косинусы ортогональны к единице.

Разобъём интеграл, в представление частичных сумм, на два $S_n(f,x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}$ и сделаем замену переменного во втором интеграле $t^*=-t$

$$S_n(f,x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}f(x+t)D_n(t)dt+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}f(x-t)D_n(t)dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}D_n(t)\{f(x+t)+f(x-t)\}dt.$$

Пусть $f,|f|\in R(T)$ (либо $f\in L(T)$), тогда выполняется соответственно $S_n(f,x)-s=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}D_n(t)\psi_{x,s}(t)dt$, где $\psi_{x,s}(t)\equiv\{f(x+t)+f(x-t)-2s\}$. Вопрос о сходимости ряда $S_n(f,x)$ к числу s сводится к сходимости последнего интеграла к нулю. Пусть $\delta>0$, разобъём интеграл на два

$$S_n(f,x)-s=\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\delta}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi}\right)\frac{\sin{(n+\frac{1}{2})t}}{2\sin\frac{t}{2}}\psi_{x,s}(t)dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\delta}\frac{\sin{(n+\frac{1}{2})t}}{2\sin\frac{t}{2}}\psi_{x,s}(t)dt+o(1),n\to+\infty.$$

Второй интеграл есть o - малое по лемме Римана-Лебега, применимость леммы вытекает из того, что функция f интегрируема, а следовательно и функция $\frac{\psi_{x,s}(t)}{2\sin(t/2)}$ тоже интегрируема.

Лемма 49. *Покажем, что функция*

$$g(t)=\begin{cases}\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{t}, & t\neq0\\ 0, & t=0\end{cases}$$

является непрерывной на отрезке $[0,\pi]$.

Доказательство. При $t \in (0, \pi]$ непрерывность функции $g(t)$ очевидна. Докажем, что функции $g(t)$ непрерывна в нуле. Для этого докажем, что справедливо $g(t) = \frac{t - 2\sin\frac{t}{2}}{2t\sin\frac{t}{2}} \longrightarrow 0$, $t \to 0$. Действительно, это вытекает из следующих оценок $t - 2\sin\frac{t}{2} \sim \frac{t^3}{2^2 \cdot 3!}$, $2t\sin\frac{t}{2} \sim t^2$, $t \to 0$. □

$$S_n(f,x) - s = \left[\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} = \frac{1}{t} + g(t)\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\delta \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}\psi_{x,s}(t)dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\delta \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t \cdot g(t)\psi_{x,s}(t)dt + o(1).$$

Т.к. $g(t) \in C[0;\pi]$, а функция $\psi_{x,s}(t)$ интегрируема, то по лемме Римана-Лебега последний интеграл стремиться к нулю.

Итак нами доказан критерий сходимости ряда Фурье к числу s.

Теорема 7.4.1 (критерий сходимости). *Пусть $\delta \in (0;\pi]$, $f, |f| \in R(T)$ (либо $f \in L(T)$). Тогда ряд Фурье сходится к некоторому числу $s \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, если*

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\delta \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t}\,\psi_{x,s}(t)dt = o(1), \quad n \to \infty,$$

где $\psi_{x,s}(t) \equiv \{f(x+t) + f(x-t) - 2s\}$.

7.4.1 Признаки сходимости

Теорема 7.4.2 (признак Дини). *Если $\exists \delta \in (0;\pi]$, и $f, |f| \in R(T)$, $\int\limits_0^\delta \left|\frac{\psi_{x,s}(t)}{t}\right| dt < +\infty$ (абсолютно сходится) (либо $\frac{\psi_{x,s}(t)}{t} \in L(0,\delta)$, $f \in L(T)$). Тогда $S_n(f,x) = s + o(1)$, $n \to \infty$.*

Доказательство. Пользуемся критерием сходимости и применяем лемму Римана-Лебега. □

Следствие 7.4.1. Если

$a)$ $\exists \lim\limits_{t\to 0+} f(x+t), \lim\limits_{t\to 0-} f(x-t) \in \mathbb{R}$,

$b)$ $\exists \delta > 0 : \int\limits_0^\delta \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t}\,dt, \int\limits_0^\delta \frac{f(x-t) - f(x-0)}{t}\,dt$ – абсолютно сходятся одновременно,

$c)$ $f, |f| \in R(T)$ (либо $f \in L(T)$).

Тогда $S_f(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ (ряд Фурье сходится к полусумме значений).

Доказательство. Положим $s = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$. Тогда $b)$: $\int\limits_0^\delta \frac{f(x+t)-f(x+0)+f(x-t)-f(x-0)}{t}\,dt =$ условие теоремы Дини выполняется $= \int \frac{\psi_{x,s}(t)}{t}\,dt$, $S_n(f,x) = s + o(1)$. □

Определение 7.4.1. Будем говорить, что функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию в точке x, если функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию в некоторой окрестности этой точки. А обозначать будем следующим образом $f \in Var(x)$.

Теорема 7.4.3 (признак Жордана)**.** *$f, |f| \in R(T)$ (либо $f \in L(T)$), $f \in Var(x)$. Тогда $S_f(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.*

Доказательство. Поскольку $f \in Var(x)$, то справедливо представление: $f(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$, где φ_1, φ_2 — монотонные неубывающие функции. Следовательно существуют и конечны $f(x-0)$, $f(x+0)$. Положим $s = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$. Тогда

$$\psi_{x,s}(t) = f(x+t) + f(x-t) - f(x+0) - f(x-0).$$

Чтобы доказать теорему надо проверить равенство:

$$\int\limits_0^\delta \frac{\sin{(n+\frac{1}{2})t}}{t}\,\psi_{x,s}(t)dt = o(1).$$

Поскольку $\psi_{x,s}(t) \in Var(x)$, то из явного вида данной функции вытекат, что $\psi(t) \longrightarrow 0$ при $t \to 0$. Справедливо равенство $\psi(t) = \widetilde{\varphi}_1(t) - \widetilde{\varphi}_2(t)$, где $\widetilde{\varphi}_1(t), \widetilde{\varphi}_2(t)$ — монотонные неубывающие функции. Поскольку $\lim_{t\ \to 0+} \widetilde{\varphi}_1(t) = \lim_{t\ \to 0+} \widetilde{\varphi}_2(t)$, то можно считать, что $\widetilde{\varphi}_1(t), \widetilde{\varphi}_2(t) \longrightarrow 0$ при $t \to 0$, т.к. иначе, в случае, когда данные функции стремяться к константе C можно ввести новые функции $\varphi_{1,2}(t) = \widetilde{\varphi}_{1,2}(t) - C$, которые уже стремяться к нулю при $t \to 0+$.

Воспользуемся второй теоремой о среднем

$$\int\limits_0^\delta \frac{\sin{(n+\frac{1}{2})t}}{t}\,\widetilde{\varphi}_1(t)dt = \widetilde{\varphi}_1(0+)\int\limits_0^\xi + \widetilde{\varphi}_1(\delta)\int\limits_\xi^\delta = \widetilde{\varphi}_1(\delta)\int\limits_\xi^\delta \frac{\sin{(n+\frac{1}{2})t}}{t}dt.$$

Обозначим последний интеграл I_1. Докажем, что $I_1 \to 0$ при $n \to \infty$, $I_1 = \int\limits_{\xi(n+\frac{1}{2})}^{\delta(n+\frac{1}{2})} \frac{\sin u}{u}du$. Ввиду сходимости интеграла $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}du$ из критерия Коши вытекает $I_1 = o(1)$ при $n \to +\infty$, поскольку $\xi, \delta > 0$. Для $\widetilde{\varphi}_2(t)$ равенство

$$\int\limits_0^\delta \frac{\sin{(n+\frac{1}{2})t}}{t}\,\widetilde{\varphi}_2(t)dt = o(1), \quad n \to +\infty$$

доказывается аналогично. $\square$

Замечание 74. Существуют случаи, когда неприменим признак Жордана, но применим признак Дини, и наоборот. Например, функция (см. рис. 7.9)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln(3\pi/x)}, & x \in (0; 2\pi), \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

ограничена и монотонна в окрестности нуля, т.е. применим признак Жордана. Но, интеграл $\int_0^\delta \frac{f(x)}{x}\,dx$ — расходится, т.е. признак Дини неприменим.

Пусть $\alpha \in (0; 1)$, рассмотрим функцию (см. рис. 7.10)

$$g(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\frac{10}{x}, x \in (0; 2\pi), \\ 0, \quad x = 0, \end{cases}$$

интеграл $\int_0^\delta \frac{g(x)}{x}\,dx$ — сходится при $\alpha \in (0; 1)$, т.е. применим признак Дини. Но, у функции $g(x)$ вариация в окрестности нуля не ограничена, т.е. признак Жордана неприменим.

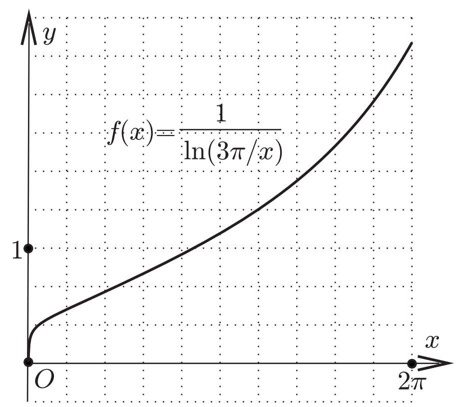


Рис. 7.9:

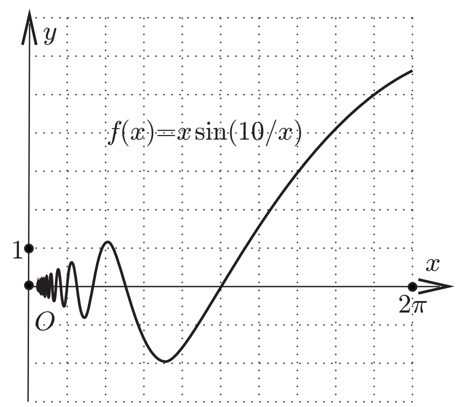


Рис. 7.10:

7.4.2 Критерий сходимости с помощью суммирования методом среднего арифметического $(C,1)$

Определение 7.4.2. $\sigma_n(f,x) = \frac{S_0(f,x)+\ldots+S_{n-1}(f,x)}{n} = \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F_{n-1}(t)f(x+t)dt\right)$, где $S_k(f,x)$ - частичное сумма ряда Фурье.

Теорема 7.4.4. *$f, |f| \in R(T)$ $(f \in L(T))$, $\sigma_n(f,x)$ сходится к $s \Leftrightarrow \exists\delta > 0 : \frac{1}{n}\int\limits_0^\delta \frac{\sin^2\frac{n}{2}t}{t^2}\psi_{x,s}(t)dt = o(1)$, $n \to +\infty$, где $\psi_{x,s} = f(x+t)+f(x-t)-2s$.*

Доказательство. Поскольку $S_k(f,x) - s = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi D_k(t)\psi_{x,s}(t)dt$,

$$\sigma_n(f,x) - s = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1}(S_k(f,x)-s)}{n} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{D_0(t)+\ldots+D_{n-1}(t)}{n}\psi_{x,s}(t)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi F_{n-1}(t)\psi_{x,s}(t)dt = \underset{[0,\delta]}{I_1} + \underset{[\delta,\pi]}{I_2},$$

где

$$|I_2| = \left|\frac{1}{\pi}\int\limits_\delta^\pi \frac{\sin^2\frac{n}{2}t}{2n\sin^2\frac{t}{2}}\psi_{x,s}(t)dt\right| \leqslant \frac{1}{2\pi n}\int\limits_\delta^\pi \frac{|\psi_x(t)|}{\sin^2\frac{t}{2}}dt = o(1), n \to \infty,$$

$$I_1 = \frac{1}{2\pi n}\int\limits_0^\delta \frac{\sin^2\frac{n}{2}t}{\sin^2\frac{t}{2}}\psi_{x,s}(t)dt = \frac{1}{2\pi n}(J_1+J_2),$$

где $J_1 = \int\limits_0^\delta \frac{\sin^2\frac{n}{2}t}{(\frac{t}{2})^2}\psi_{x,s}(t)dt$, $J_2 = \int\limits_0^\delta \sin^2\frac{nt}{2}\psi_{x,s}(t)\left(\frac{1}{\sin^2\frac{t}{2}} - \frac{1}{(\frac{t}{2})^2}\right)dt$. Функция $\psi_{x,s}(t)\left(\frac{1}{\sin^2\frac{t}{2}} - \frac{1}{(\frac{t}{2})^2}\right)$- интегрируема, т.к. $g(t) = \left(\frac{1}{\sin^2 \frac{t}{2}} - \frac{1}{(\frac{t}{2})^2}\right) \in C[-\pi, \pi]$ (по разложению в ряд Тейлора). Следовательно

$$\sigma_n(f, x) - s = \frac{1}{n} \int\limits_0^\delta \frac{\sin^2 \frac{n}{2} t}{t^2} \psi_{x,s}(t)\, dt + o(1), \quad n \to +\infty.$$

□

Следствие 7.4.2. Пусть $f, |f| \in R(T)$ (либо ($f \in L(T)$)) и $f(x+0), f(x-0)$ определены. Тогда ряд Фурье сходится методом $(C, 1)$ к $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

Доказательство. Положим $s \stackrel{def}{=} \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$. Рассмотрим функцию $\psi_{x,s}(t) = f(x+t) + f(x-t) - f(x+0) - f(x-0)$, Для данной функции справедливо $\lim_{t \to 0} \psi_{x,s}(t) = 0$. Следовательно, существует такое $\delta^* > 0$, что $|\psi_{x,s}(t)| \leqslant \varepsilon$ для любого $t \in (0, \delta^*]$. Тогда из равенства

$$\frac{1}{n} \int\limits_0^\delta \frac{\sin^2 \frac{n}{2} t}{t^2} \psi_x(t) dt = I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = \int\limits_0^{\delta^*}, \quad I_2 = \int\limits_{\delta^*}^{\delta},$$

получаем

$$|I_1| \leq \frac{1}{n} \int\limits_0^{\delta^*} \frac{\sin^2 \frac{n}{2} t}{t^2} |\psi_x(t)| dt \leq [\text{ замена } u = nt] \leq \varepsilon \int\limits_0^{n\delta^*} \frac{\sin^2 \frac{u}{2}}{u^2} du \leq \varepsilon \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 \frac{u}{2}}{u^2} du = c_1 \varepsilon,$$

т.к. сходится последний интеграл. Оценка $I_2 \leq \frac{1}{n} \int\limits_{\delta^*}^{\delta} \frac{\sin^2 \frac{n}{2} t}{t^2} \psi_{x,s}(t) dt = o(1)$, $n \to +\infty$, вытекает из того, что подинтегральная функция не превосходит функции $\frac{\psi_{x,s}(t)}{t^2}$, которая интегрируема и не зависит от n. □

7.5 Модуль непрерывности. Теорема Джексона-Стечкина

Определение 7.5.1 (разностный оператор)**.** $\Delta_t f(x) = f(x+t) - f(x)$ - 1го порядка, $\Delta_t^2 f(x) = \Delta_t \Delta_t f(x) = \Delta_t (f(x+t) - f(x)) = f(x+2t) - 2f(x+t) + f(x)$ - 2го порядка, $\Delta_t^r f(x) = \Delta_t \Delta_t^{r-1} f(x) = \sum\limits_{k=0}^{r} C_r^k (-1)^{r-k} f(x+kt)$.

Определение 7.5.2 (модуль непрерывности)**.** $r = 1$. ($r \geq 1$ - модуль гладкости). f - интегрируема по x, положим $\omega_r(f, \delta)_p = \sup\limits_{0 \leq h \leq \delta} \|\Delta_h^r f(x)\|_p$, где $\|f\|_p = \left(\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$.

Справедливы следующие неравенства:
1) неравенство треугольника ($p \in [1, +\infty]$) $\quad \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$,
2) $\left\| \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x, y)\, dy \right\|_p \leq \int\limits_{-\pi}^{\pi} \|f(x, y)\|_p\, dy.$

(f - интегрируема по x). $p = +\infty \Rightarrow$ пространство непрерывных функций; $\| \bullet \|_\infty = \max\limits_{t \in [-\pi, \pi]} |f(t)|$; $p \in [1, +\infty) \Rightarrow$ пространство L_p.

Доказательство. Неравенство 1) было доказано в 1 семетре. Неравенство 2) очевидно для $p = 1; +\infty$. Пусть $1 < p < +\infty$, положим $J(x) = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x,y)|\,dy$ предположим сначала, что $J \in L_p[-\pi;\pi]$, тогда $J^{p-1}(x) \in L_{p'}[-\pi;\pi]$. Использую сначала теорему Фубини, а затем неравенство Гёльдера получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} J^p(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} J^{p-1}(x) \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x,y)|\,dy \right) dx =$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} J^{p-1}(x)|f(x,y)|\,dx \right) dy \leqslant \|J\|_p^{p/p'} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x,y)|^p\,dx \right)^{1/p} dy.$$

Разделив обе части на $\|J\|_p^{p/p'}$ получаем неравенство 2). Пусть теперь $J \notin L_p[-\pi;\pi]$, т.е. $\|J\|_p^p = +\infty$, для $N > 0$ положим:

$$|f(x,y)|_N = \min\{|f(x,y)|, N\}, \quad J_N(x) = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x,y)|_N\,dy.$$

Тогда $J_N \in L_p[-\pi;\pi]$, и по доказанному при любом $N > 0$ справедливо

$$\|J_N\|_p \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} J^{p-1}(x)|f(x,y)|_N\,dx \right) dy \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} J^{p-1}(x)|f(x,y)|\,dx \right) dy.$$

Переходя к пределу $N \to +\infty$ получаем неравенство 2). □

Теорема 7.5.1 (о свойствах $\Delta_t^r f$, $\omega_r(f,\delta)$)**.** *1)* $\Delta_{ht}^r f(x) = \sum\limits_{k_1=0}^{r-1} \ldots \sum\limits_{k_r=0}^{r-1} \Delta_h^r f(x + k_1 h + \ldots + k_r h)$.

2) $\omega_r(f, n\delta)_p \leq n^r \omega_r(f,\delta)_p$, $n \in \mathbb{N}$.

3) $\omega_r(f, \lambda\delta)_p \leq (\lambda+1)^r \omega_r(f,\delta)_p$.

4) Если $\omega_r(f,\delta)_p = o(\delta^r)$, $\delta \to 0 \Rightarrow \omega_r(f,\delta)_p \equiv 0$.

Доказательство. 1) $\Delta_{nh} f(x) = f(x+nh) - f(x) = (f(x+nh) - f(x+(n-1)h)) + (f(x+(n-1)h) - \ldots) + \ldots + (f(x+h) - f(x)) = \sum\limits_{k_1=0}^{r-1} \Delta_h f(x + k_1 h)$. $\Delta_{nh}^2 f(x) = \Delta_{nh} \left(\sum\limits_{k_1=0}^{r-1} \Delta_h f(x+k_1 h) \right) = \sum\limits_{k_1=0}^{r-1} \sum\limits_{k_2=0}^{r-1} \Delta_h f(x + k_1 h + k_2 h)$,и т.д.

2) из 1): $\|\Delta_{nh}^r f(\bullet)\|_p \leq \sum\limits_{k_1=0}^{r-1} \ldots \sum\limits_{k_r=0}^{r-1} \|\Delta_h^r f(\bullet + k_1 h + k_2 h)\|_p = n^r \|\Delta_h^r f(\bullet)\|$, где $(\bullet)$ - то, по чему идет интегрирование.

3) из 2): $\omega_r(f,\lambda\delta)_p \leq \omega_r(f, ([\lambda]+1)\delta)_p \leq ([\lambda]+1)^r \omega_r(f,\delta)_p \leq (\lambda+1)^r \omega_r(f,\delta)_p$.

4) Пусть $\omega_r(f,\delta)_p = o(\delta^r)$, тогда $\omega_r(f,\delta)_p = \omega_r\left(f, m\frac{\delta}{m}\right)_p \leq m^r \omega_r\left(f, \frac{\delta}{m}\right)_p = \delta^r \frac{\omega_r\left(f,\frac{\delta}{m}\right)_p}{\left(\frac{\delta}{m}\right)^r}$, где дробь $\to 0$, $m \to \infty$, $m \in \mathbb{N}$. Теорема доказана. □

Лемма 50. *Пусть* $k, l \in \mathbb{N}$, $l/k \notin \mathbb{N}$, $g, |g| \in R(T)$ *(либо* $g \in L(T)$*),* $\frac{2\pi}{k}$ *— периодичная. Тогда* $\int\limits_0^{2\pi} g(t)e^{ilt}dt = 0$.

Доказательство. Поскольку функция $g(t)e^{ilt}$ имеет $\frac{2\pi}{k}$ период, то

$$I = \int\limits_0^{2\pi} g(t)e^{ilt}dt = \int\limits_{\frac{2\pi}{k}}^{2\pi+\frac{2\pi}{k}} g(t)e^{ilt}dt = [\text{ замена } u = t - \frac{2\pi}{k}] = e^{il\frac{2\pi}{k}} \int\limits_0^{2\pi} g(u)e^{ilu}du = e^{il\frac{2\pi}{k}} \cdot I.$$

Откуда $\left(1 - e^{il\frac{2\pi}{k}}\right) \cdot I = 0$. Поскольку $\frac{1}{k} \neq 0 \Rightarrow 1 - e^{il\frac{2\pi}{k}} \neq 0$, то $I = 0$. □

Теорема 7.5.2 (Джексона-Стечкина)**.** *Пусть* $f, |f| \in R_p(T)$, $p \in [1,+\infty)$ *- интегрируема в p-й степени*

($p = +\infty$ - пространство непрерывных функций) ($f \in L_p(T)$). *Тогда*

$$E_n(f)_p \overset{def}{=} \inf_{t\in\tau_n} \|f-t\|_p \leq c\omega_r(f, \frac{1}{n})_p,$$

где τ_n - множество тригонометрических полиномов порядка n (степень которых не превосходит n).

Доказательство. $S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\Delta_t^r f(x) - (-1)^r f(x))K_{n,r}(t)dt$, где $K_{n,r}(t) = J_{r,N}(t) \in \tau_n$ $\left(N = \left[\frac{n}{r}\right]+1\right)$, $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+kt)\cos ltdt$ = [т.к. ряд Фурье по косинусам, J - четная, замена $u = \frac{x}{k}+t$; $k = \overline{1,r}$, $l = \overline{o,n}$] $= \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(ku)\cos\left(lu + \frac{lx}{k}\right)du = \cos\frac{lx}{k}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(ku)\cos ludu + \sin\frac{lx}{k}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(ku)\sin ludu \in \mathcal{T}_{\frac{l}{k}} \in \mathcal{T}_n$ по лемме. Оценим наилучшее приближение

$$E_n(t)_p \leq \|f(\bullet) + (-1)^r S_n(f,\bullet)\|_p = [f(\bullet) + (-1)^r S_n(f,\bullet) \in \tau_n] = \left\|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Delta_t^r f(\bullet)K_{n,r}(t)dt\right\|_p \leq$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\|\Delta_t^r f(\bullet)\|_p K_{n,r}(t)dt \leq \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\omega_r(f,t)K_{n,r}(t)dt \leq \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}(nt+1)^2\omega_r\left(f,\frac{1}{n}\right)_p K_{n,r}(t)dt =$$

$$\frac{2}{\pi}\omega_r\left(f,\frac{1}{n}\right)_p\int\limits_{0}^{\pi}(nt+1)^r K_{n,r}(t)dt \leq [\text{ по лемме } \int t^k K_{n,r}(t)dt \leq n^{-k}, k = \overline{0,r}] \leq c(t)\omega_r\left(f,\frac{1}{n}\right)_p.$$

Для $p = +\infty$ очевидно.

$\square$

Следствие 7.5.1 (Без доказательства)**.** Пусть $f, |f| \in R_p(T)$, $p \in [1,+\infty]$ ($p = +\infty$ — пространство непрерывных функций) (либо $f \in L_p(T)$ для $p \in [1;+\infty)$), тогда следующие соотношения равносильны

$$E_n(f)_p = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\ n\to+\infty \quad\Longleftrightarrow\quad \omega_r(f,\delta) = O(\delta^\alpha),\ \delta\to 0,\ 0<\alpha<r.$$

Глава 8

Интегралы зависящие от параметра

8.1 Интегралы, зависящие от параметра

Определение 8.1.1. Будем говорить, что семейство функций $f_y(x)$ равномерно сходиться к функции $\varphi(x)$ на множестве E_x при $y \to y_0$, если $\lim\limits_{y \to y_0} \| f_y(.) - \varphi(.)\|_{C(E_x)} = 0$ и будем писать $f_y(x) \underset{E_x}{\rightrightarrows} \varphi(x)$, $y \to y_0$.

Данное определение равносильно следующему: $\lim\limits_{y \to y_0} \sup\limits_{x \in E_x} |f_y(x) - \varphi(x)| = 0$. Преведём критерий раносильный определению:

Лемма 51.

$$\forall y_n \to y_0, y_n \neq y_0 : \|f_{y_n}(.) - \varphi(.)\|_{C(E)} \to 0 \;\Leftrightarrow f_y(x) \underset{E}{\rightrightarrows} \varphi(x),\; y \to y_0$$

Доказательство. Вытекает из равносильности определений предела по Гейне и по Коши. □

П р и м е р 8.1.1. Исследовать на равномерную сходимость семейство $f_y(x) = \cos(yx)$ при $y \to 0$ на множестве a) $X_1 = (0; 1)$ и b) $X_2 = (0; +\infty)$.

Доказательство. Предельная функция при фиксированном $x \in (0; +\infty)$ для $f_y(x) = \cos(yx)$ при $y \to 0$ будет единица. Поэтому будем исследовать равномерную сходимость к функции $\varphi(x) \equiv 1$.

- Поскольку $y \to 0$, то будем считать, что $|y| < \pi/2$. Тогда на множестве $x \in X_1 = (0; 1)$ выполнено

  $$\sup_{x \in (0;1)} |\cos(yx) - 1| \leqslant |\cos y - 1|.$$

  Откуда $\lim\limits_{y \to 0} \sup_{x \in (0;1)} |\cos(yx) - 1| = 0$. Следовательно семейство $f_y(x) = \cos(yx)$ при $y \to 0$ на множестве $X_1 = (0; 1)$ равномерно сходится.

- Покажем, что на множестве $X_2 = (0; +\infty)$ равномерной сходимости уже нет. Действительно, каково бы не было $y \neq 0$ следует $x = \pi/|y| \in (0; +\infty)$. Поэтому

  $$\sup_{x \in (0;+\infty)} |\cos(yx) - 1| = 2$$

  и $\lim\limits_{y \to 0} \sup_{x \in (0;+\infty)} |\cos(yx) - 1| = 2 \neq 0$.

□

Теорема 8.1.1 (Критерий Коши)**.** *Следующие условия равносильны:*

$$\left(f_y(x) \underset{E}{\rightrightarrows} \varphi(x),\; y \to y_0\right) \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \dot{O}_\delta(y_0)\ \forall y_1, y_2 \in \dot{O}_\delta(y_0) :\ \left\|f_{y_1}(.) - f_{y_2}(.)\right\|_{C(E)} \leq \varepsilon.$$

Доказательство.

$$\Rightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\dot{O}_\delta(y_0):\ \forall y \in \dot{O}_\delta(y_0)\ \|f_y(.) - \varphi(.)\| \le \varepsilon \forall y_1, y_2 \in \dot{O}_\delta(y_0): \|f_{y_1} - f_{y_2}\| \le \|f_{y_1} - \varphi\| + \|\varphi - f_{y_2}\| \le 2\varepsilon$$

Теперь докажем в обратную сторону $\Leftarrow$

$$|f_{y_1}(x) - f_{y_2}(x)| \le \|f_{y_1} - f_{y_2}\| \le \varepsilon.$$

По критерию Коши для одного переменного существует предел $\lim\limits_{y\to y_0} f_y(x)$, $\forall x \in E$, таким образом определим функцию $\varphi(x) = \lim\limits_{y\to y_0} f_y(x)$. В последнем неравенстве сделаем предельный переход $y_2 \to y_0$:

$$\|f_{y_1}(.) - \varphi(.)\| \le \varepsilon.$$

$\square$

П р и м е р 8.1.2. Пусть $f \in C\left(\underset{no\ x}{[a,b]} \times \underset{no\ y}{[c,d]}\right)$. Тогда для любого $y_0 \in [c,d]$, справедливо $f_y(x) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f_{y_0}$, при $y \to y_0$.

Доказательство. Напомним определение модуля непрерывности:

$$\omega(f,\delta) = \sup_{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\le\delta} |f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)|.$$

Функция $f \in UC([a,b]\times[c,d])$ равномерно непрерывна, как заданная непрерывная функция на компакте. Следовательно

$$\|f_y(x) - f_{y_0}(x)\| \le \omega\left(f, \sqrt{(x-x)^2 + (y-y_0)^2}\right) = \omega\left(f, |y-y_0|\right) \to 0$$

$\square$

Теорема 8.1.2 (Свойства равномерно сходящихся семейств функций)**.** *Функция $f: E\times A \to \mathbb{R}$. Окрестности $O(x_0) \subseteq E$, $O(y_0) \subseteq A$. Тогда справедливо*

1. *$f_y(x) \underset{O(x_0)}{\rightrightarrows}$, $y \to y_0$. Для любого $y \in \mathring{O}\ (y_0)$ $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$. $\Rightarrow \lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f_y(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f_y(x)$*
2. *$f_y \underset{O(x_0)}{\rightrightarrows} \varphi(x)$, $y \to y_0$ и $\forall y \in \mathring{O}\ (y_0)$, $f_y(x) \in C(x_0) \Rightarrow \varphi(x) \in C(x_0)$*
3. *$f_y(x) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi(x)$, $y \to y_0$ и $\forall y \in \mathring{O}\ (y_0)$, $f_y(x) \in \mathcal{R}\ [a,b] \Rightarrow \varphi(x) \in \mathcal{R}[a,b]$*
4. *$f_y(x), (f_y(x))' \in C([a,b]\times O(y_0))\ (f_y(x))' \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} F(x)$, $y \to y_0$. $f_y(x)$ сходится хотя бы в одной точке x_0, $\forall y \in O(y_0)$, тогда $f_y(x) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi(x)$, $y \to y_0$, $\varphi \in C^1[a,b]$ и $\varphi'(x) = F(x)$.*

Доказательство. Это очевидно из утверждения (перевод по Гейне) (см. выше), а для последовательности всё доказано.

$$\forall y_n \to y_0\ (y_n \ne y_0)\ \varphi_n(x) = f(x,y_n) \rightrightarrows \varphi(x), n \to +\infty.$$

$\square$

Теорема 8.1.3. *Пусть $f(x,y):\ [a,b]\times A \to \mathbb{C}$, $\mathfrak{B}_y$ — база в A. Если*
1) *Функции семейства $f_y(x)$ интегрируемы на $[a,b]$ при любом $y \in A$.*

2) $f_y(x)\underset{[a;b]}{\rightrightarrows}$ при базе $\mathfrak{B}_y$. Тогда предельная функция $f:\ [a,b]\to\mathbb{C}$ тоже интегрируема на отрезке $[a,b]$ и

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\mathfrak{B}_y}\int\limits_a^b f_y(x)\,dx.$$

Доказательство. Пусть $p=(P,\xi)$ — разбиение P отрезка $[a,b]$ с отмеченными точками $\xi=\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}$. Рассмотрим интегральные суммы

$$F_y(p)=\sum_{k=1}^n f_y(\xi_k)\triangle x_k,\quad F(p)=\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\triangle x_k.$$

Поскольку, $f_y(x)\underset{[a;b]}{\rightrightarrows}$ при базе $\mathfrak{B}_y$, для любого $\varepsilon>0$ можно найти такой элемент B базы $\mathfrak{B}_y$, что при любом $y\in B$ в любой точке $x\in[a,b]$ будет выполнено неравенство $|f(x)-f_y(x)|<\varepsilon/(b-a)$. Следовательно

$$|F(p)-F_y(p)|=\left|\sum_{k=1}^n (f(\xi_k)-f_y(\xi_k))\triangle x_k\right|\leqslant\sum_{k=1}^n |f(\xi_k)-f_y(\xi_k)|\triangle x_k<\varepsilon.$$

Последняя оценка справедлива при любом $y\in B$ и любом разбиении p из множества $\mathcal{P}=\{(P,\xi)\}$ разбиений отрезка $[a,b]$ с отмеченными точками. Таким образом $F_y\underset{\mathcal{P}}{\rightrightarrows}F$ при базе $\mathfrak{B}_y$. Остаётся в качестве $\mathcal{P}$ взять базу $\lambda(P)\to 0$ и воспользоваться теоремой 8.1.2 о перестановке пределов у семейства параметрических функций:

$$\lim_{\mathfrak{B}_y}\int\limits_a^b f_y(x)\,dx=\lim_{\mathfrak{B}_y}\lim_{\lambda(P)\to 0}F_y(p)=\lim_{\lambda(P)\to 0}\lim_{\mathfrak{B}_y}F_y(p)=\lim_{\lambda(P)\to 0}F(p)=\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

□

Лемма 52. *Пусть $f(x,y)\in C([a,b]\times[c,d])$. Тогда функция $\Phi(u,v,y)=\int_u^v f(x,y)dx\in C\left([a,b]^2\times[c,d]\right)$.*

Доказательство. Проведём оценку

$$\begin{aligned}&|\Phi(u+\triangle u,v+\triangle v,y+\triangle y)-\Phi(u,v,y)|\le\\ &\quad\le|\Phi(u+\triangle u,v+\triangle v,y+\triangle y)-\Phi(u+\triangle,v+\triangle,y)|+|\Phi(u+\triangle u,v+\triangle v,y)-\Phi(u,v,y)|=\\ &\qquad=I_1+I_2,\end{aligned}$$

Оценим по отдельности I_1, I_2.

$$I_1\le\int\limits_{u+\triangle u}^{v+\triangle v}|f(x,y+\triangle y)-f(x,y)|\,dx\le\omega\left(f,|\triangle y|\right)\cdot|b-a|\to 0,$$

$\omega(f,t)\to 0$, $t\to 0$, т.к. функция $f(x,y)$ равномерно непрерывна.

$$\begin{aligned}I_2&=\left|\left(\int\limits_{u+\triangle u}^{v+\triangle v}-\int\limits_u^v\right)f(x,y)dx\right|=\left|\left(\int\limits_{u+\triangle u}^{u}+\int\limits_v^{v+\triangle v}\right)f(x,y)dx\right|\le\\ &\le\left|\int\limits_{u+\triangle u}^{u}f dx\right|+\left|\int\limits_v^{v+\triangle v}f dx\right|\le C\left(|\triangle u|+|\triangle v|\right)\to 0.\end{aligned}$$

Последнее неравенство вытекает из того, что функция $f(x,y)$ непрерывная на компакте, а следовательно и ограниченная. □

Теорема 8.1.4. *Пусть* $f(x,y) \in C([a,b]\times[c,d])$. *Тогда* $F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx \in C[c,d]$ *и* $\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx\right)dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right)dx$.

Доказательство. Первое утверждение о непрерывности вытекает из предыдущей леммы, а второе из теоремы Фубини. □

Теорема 8.1.5. *Пусть* $f'_y(x,y),\ f(x,y) \in C([a,b]\times[c,d])$, *тогда* $F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx \in C^1[c,d]$ *и* $F'(y) = \int\limits_a^b f'_y(x,y)dx$.

Доказательство.

$$\left|\frac{F(y+h)-F(y)}{h} - \int\limits_a^b f'_y(x,y)dx\right| = \left|\int\limits_a^b \left(\left(\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}\right) - f'_y(x,y)\right)dx\right|$$

По теореме Лагранжа существует константа $\theta \in (0,1)$, такая что

$$\left|\frac{F(y+h)-F(y)}{h} - \int\limits_a^b f'_y(x,y)dx\right| = \left|\int\limits_a^b \left(f'_y(x,y+\theta h) - f'_y(x,y)\right)dx\right| \leq$$
$$\leq \int\limits_a^b \left|f'_y(x,y+\theta h) - f'_y(x,y)\right| dx \leq \omega\left(f'_y, |\theta h|\right)|b-a| \to 0.$$

Последняя оценка вытекает из того, что функция f'_y непрерывная на компкакте, а следовательно и равномерно непрерывна на этом компакте. По предыдущей теореме функции $F(y)$, $F'(y)$ непрерывны. □

Теорема 8.1.6 (формула Лейбница). *Пусть* $f'_y(x,y),\ f(x,y) \in C([a,b]\times[c,d])$ $\psi,\varphi : [c,d] \to [a,b]$, $\in C^1[c,d]$, $F(y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx$. *Тогда* $F(y) \in C^1[c,d]$ *и*

$$F'(y) = f(\psi(y),y)\psi'(y) - f(\varphi(y),y)\varphi'(y) + \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x,y)dx.$$

Доказательство. Положим

$$\Phi(u,v,y) = \int\limits_u^v f(x,y)dx.$$

Функция $\Phi(u,v,y)$ определена на множестве $[a,b]^2\times[c,d]$. Функция $\Phi'_v = f(v,y)$ — непрерывна, $\Phi'_u = -f(u,y)$ — непрерывна. $\Phi'_y = \int\limits_u^v f'_y(x,y)dx$ — непрерывна по лемме. Поскольку все частные производные непрерывны, то Φ дифференцируема. По теореме о диф. функции

$$F'(y) = (\Phi(\varphi(y), \psi(y), y))'_y = f(\psi(y), y)\psi'(y) - f(\varphi(y), y)\varphi'(y) + \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x, y)dx.$$

Каждое из слагаемых непрерывно, поэтому непрерывна и сама $F'(y)$. □

П р и м е р 8.1.3. Для $a > 1$ вычислить $F(a) = \int_{a^2}^{a^3} \frac{\ln ax}{x}\, dx$ как по формуле Лейбница, так и при помощи первообразной.

I. Вычислим по формуле Лейбница. Поскольку все условия теоремы Лейбница выполнены, то

$$F'(a) = 3a^2 \cdot \frac{\ln a^4}{a^3} - 2a \cdot \frac{\ln a^3}{a^2} + \int_{a^2}^{a^3} \frac{1}{ax}\, dx = 6 \cdot \frac{\ln a}{a} + \frac{1}{a} \cdot \left(\ln a^3 - \ln a^2\right) = 6 \cdot \frac{\ln a}{a} + \frac{\ln a}{a} = 7 \cdot \frac{\ln a}{a}.$$

Откуда

$$F(a) = \int_1^a 7 \cdot \frac{\ln a}{a}\, da = \frac{7}{2} \cdot \ln^2 a.$$

II. Найдём функцию $F(a)$ вычислив её первообразную.

$$F(a) = \int_{a^2}^{a^3} \frac{\ln a}{x}\, dx + \int_{a^2}^{a^3} \frac{\ln x}{x}\, dx = \left(\ln a \cdot \ln x + \frac{\ln^2 x}{2}\right)\Bigg|_{a^2}^{a^3} = \ln^2 a + \frac{9-4}{2} \cdot \ln^2 a = \frac{7}{2} \cdot \ln^2 a.$$

8.2 Несобственные интегралы зависящие от параметра

Определение 8.2.1. Пусть ω — произвольное действительное число расширеной числовой оси, т.е. ω может принимать значения $\pm\infty$, $f : [a, \omega) \times A \to \mathbb{R}$. Если для всех параметров $y \in A$ функция $f(\cdot, y)$ интегрируема по Риману в несобственном смысле на полуинтервале $[a; \omega)$, то интеграл $F(y) = \int\limits_a^{\omega} f(x, y)\, dx$ называют несобственным интегралом, зависящим от параметра y.

Определение 8.2.2. Несобственный интеграл $F(y) = \int\limits_a^{\omega} f(x, y)\, dx$ называют равномерно сходящимся на множестве A, если семейство функций $F_b(y) = \int\limits_a^{b} f(x, y)\, dy$ равномерно на A сходится к $F(y)$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists B \in \overbrace{[a; \omega)}^{\text{мн-во по x}}\quad \forall b \in [B; \omega)\ \|F(y) - F_b(y)\|_{C(A)} = \left\| \int_b^{\omega} f(x, \cdot)\, dx \right\|_{C(A)} = \sup_{y \in A} \left| \int_b^{\omega} f(x, y)\, dx \right| \leqslant \varepsilon.$$

Замечание 75. Из данного определения и определения предела вытекает, что условие равномерной сходимости несобственного интеграла $F(y) = \int\limits_a^{\omega} f(x, y)\, dx$ на множестве A равносильно условию

$$\lim_{b \to \omega-} \left\| \int_b^{\omega} f(x, \cdot)\, dx \right\|_{C(A)} = 0.$$

Если данный предел не существует, либо отличен от нуля, то равномерной сходимости нет.

П р и м е р 8.2.1. Исследовать на равномерную сходимость $\int_1^{+\infty} dx/x^{\alpha}$, на множестве a) $\alpha \in (1; +\infty)$; b) $\alpha \in (\alpha_0; +\infty)$, где $\alpha_0 > 1$.

I. Сходимость исходного интеграла при каждом значении $\alpha \in (1; +\infty)$ нам уже известна. Покажем что она не равномерная, т.е. в первом случае $\alpha \in (1; +\infty)$ равномерной сходимости интеграла не будет. Пусть $\varepsilon = 1$. Тогда для любого B существует $b = B$ такое, что для $\alpha^* = 1 + 1/b$ выполнено:

$$\|F(y) - F_b(y)\|_{C(1;+\infty)} = \left\| \int\limits_b^{+\infty} x^{-\alpha}\, dx \right\|_{C(1;+\infty)} \geqslant \left| \int\limits_b^{+\infty} x^{-\alpha^*}\, dx \right| = \frac{b^{1-\alpha^*}}{\alpha^* - 1} = b^{1-1/b} \to +\infty, \quad b \to +\infty.$$

Поскольку пвыражение в последней оценки стремится к $+\infty$, то это выражение с некоторого момента будет больше либо равно ε.

II. Во втором случае справедливо:

$$\|F(y) - F_b(y)\|_{C(\alpha_0;+\infty)} = \left\| \int\limits_b^{+\infty} x^{-\alpha}\, dx \right\|_{C(\alpha_0;+\infty)} \leqslant \left| \int\limits_b^{+\infty} x^{-\alpha_0}\, dx \right| = \frac{b^{1-\alpha_0}}{\alpha_0 - 1} \to +0, \quad b \to +\infty.$$

Откуда следует равномерная сходимость на множестве $\alpha \in (\alpha_0; +\infty)$, где $\alpha_0 > 1$.

Теорема 8.2.1 (Критерий Коши). *Несобственный интеграл, зависящий от параметра* $\int\limits_a^{\omega} f(x,y)\, dx$ *равномерно сходится на множестве* $A \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists B \in [a;\omega) \quad \forall b_1, b_2 \in [B;\omega)$, *что*

$$\left\| \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,y)\, dx \right\|_{C(A)} < \varepsilon$$

Доказательство. Вытекает из критерия Коши равномерной сходимости семейства функций.

$$F_b(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\, dx \ \text{ и } F_{b_2}(y) - F_{b_1}(y) = \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,y)\, dx$$

□

Следствие 8.2.1. Рассмотрим функцию $f : [a,\omega) \times [c,d] \to \mathbb{R}$, $f \in C([a;\omega) \times [c;d])$ для которой справедливо, что $\int\limits_a^{\omega} f(x,y)\, dx$ — расходится в точке $y = c$. Тогда равномерной сходимости на $(c;d)$ нет.

Доказательство. Вспомним Критерий Коши для функции, расходящейся в точке $y = c$.

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0 \quad \forall B \in (a;\omega) \qquad \exists b_1, b_2 \in [B,\omega) \left| \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,c)\, dx \right| > \varepsilon_0.$$

Поскольку $F(y) = \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,y)\, dy \in C([c;d])$, то

$$\left| \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,y)\, dx \right| \geq \frac{\varepsilon_0}{2}$$

в некоторой малой окрестности точке c $\forall y \in [c; c+\delta]$. На основании критерии Коши равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра, теперь заключаем, что рассматриваемый интеграл не может сходиться равномерно ни на каком подмножестве $Y \subseteq [c;d]$, замыкание которого содержит точку c, и в частности, на $(c;d)$. Поскольку

$$\sup_{y\ \in(c;d)} \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,dx \right| \geq \frac{\varepsilon_0}{2}$$

□

Теорема 8.2.2 (Признак Вейерштрасса). *Пусть для функций $g, f : [a;\omega) \times Y \to \mathbb{R}$ выполнено*

1. *Функции f и g интегрируемы на любом $[a,b] \subset [a;\omega)$;*
2. *$|f(x,y)| \leq g(x,y)\ \forall (x,y) \epsilon [a;\omega) \times Y$;*
3. *$\int_a^\omega g(x,y)\,dx$ равномерно сходится на Y.*

Тогда $\int_a^\omega f(x,y)\,dx$ равномерно сходится на Y.

Доказательство. Вытекает из оценки

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,dx \right| \leq \int_{b_1}^{b_2} |f(x,y)|\,dx \leq \int_{b1}^{b2} g(x,y)\,dx,$$

а далее из критерия Коши. □

П р и м е р 8.2.2. Исследовать на равномерную сходимость $\int_1^{+\infty} dx/x^\alpha$, на множестве a) $\alpha \in (1;+\infty)$; b) $\alpha \in (\alpha_0;+\infty)$, где $\alpha_0 > 1$.

В первом случае $\alpha \in (1;+\infty)$ равномерной сходимости, согласно следствию 8.2.1, интеграла не будет, т.к. при подстановки предельной точки $\alpha = 1$ интеграл $\int_1^{+\infty} dx/x$ расходится.

В случае b) равномерная сходимость вытекает из оценки

$$\frac{1}{x^\alpha} \leqslant \frac{1}{x^{\alpha_0}}, \quad x \geqslant 1,\ \alpha > \alpha_0,$$

сходимости интеграла $\int_1^{+\infty} dx/x^{\alpha_0}$ и признака Вейершрасса.

Теорема 8.2.3 (Признак Абеля – Дирихле). *Пусть $f, g : [a,\omega) \times [c;d] \to \mathbb{R}$ и*

- *f, g интегрируемы на $\forall [a;b] \subset [a;\omega)$*
- *$g(x,y)$ — монотонная функцию по $x \in [a;\omega)$ для $\forall y \in [c;d]$.*

Выполнены любые из следующих пар условий (либо условия 1), 2) либо 1'), 2'))

Абель:

1. $\int\limits_a^\omega f(x,y)\,dx \underset{[c;d]}{\rightrightarrows}$;

2. $\sup\limits_{\substack{y\in[c;d]\\ x\in[a;\omega)}} |g(x,y)| \le C$.

Дирихле:

1' $\left\|\int\limits_a^b f(x,\cdot)\,dx\right\| \le C \qquad \forall b\in[a;\omega)$;

2' $\sup\limits_{y\epsilon[c;d]} |g(x,y)| \rightrightarrows 0\,, x\to\omega$.

Тогда $\int\limits_a^\omega f(x,y)\cdot g(x,y)\,dx \underset{[c;d]}{\rightrightarrows}$.

Доказательство. Из интегральной второй теоремы о среднем получаем

$$\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,y)\cdot g(x,y)\,dx = g(b_1+0,y)\int\limits_{b_1}^{\xi} f(x,y)\,dx + g(b_2-0,y)\int\limits_{\xi}^{b_2} f(x,y)\,dx.$$

Утверждение теоремы вытекает из критерия Коши. □

Теорема 8.2.4 (Формула Фруллани)**.** *Пусть* $f\in C[0;+\infty)$, a, $b>0$ *и* $\int\limits_d^{+\infty}\frac{f(x)-C}{x}\,dx$ *сходится для некоторой константы* C *при любом* $d>0$. *Тогда* $\int\limits_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = (f(0)-C)\cdot\ln\frac{b}{a}$.

Доказательство. В следующих интегралах сделаем замену переменного:

$$\int\limits_d^{+\infty}\frac{f(ax)-C}{x}\,dx \overset{t=ax}{=} \int\limits_{ad}^{+\infty}\frac{f(x)-C}{x}\,dx$$

$$\int\limits_d^{+\infty}\frac{f(bx)-C}{x}\,dx \overset{t=bx}{=} \int\limits_{bd}^{+\infty}\frac{f(x)-C}{x}\,dx$$

Вычтем из первого интеграла второй и используем первую теорему о среднем:

$$\int\limits_d^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = \int\limits_{ad}^{bd}\frac{f(x)-C}{x}\,dx = (f(\xi)-C)\int\limits_{ad}^{bd}\frac{dx}{x} = (f(\xi)-C)\ln\frac{b}{a},$$

где $\xi\in[ad;bd]$ далее предельный переход $d\to 0$ завершает доказательство. □

Замечание 76. Константу C чаще выбирают либо 0, либо $f(+\infty)$.

П р и м е р 8.2.3. Для $a, b > 0$ вычислить $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arcctg}(-ax)-\operatorname{arcctg}(-bx)}{x}\,dx$.

Покажем, что интеграл $\int\limits_d^{+\infty} \frac{\operatorname{arcctg}(-x)-\pi}{x}\,dx$ сходится при любом $d > 0$. Действительно,

$$\pi - \operatorname{arcctg}(-x) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}(-x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}, \quad x \to +\infty.$$

Следовательно $C = \pi$ и справедливо

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arcctg}(-ax) - \operatorname{arcctg}(-bx)}{x}\,dx = \left(\frac{\pi}{2} - \pi\right) \cdot \ln\frac{b}{a} = -\frac{\pi}{2} \cdot \ln\frac{b}{a}.$$

Теорема 8.2.5. *Пусть задана функция $f(x, y) : [a, \omega) \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ и выполнены условия*

1. $\int\limits_a^{\omega} f(x, y)\,dx \quad \exists$ *как несобственный интеграл* $\forall y \in Y$*;*
2. $f(x, y) \rightrightarrows \varphi(x)$ *на любом отрезке вида* $[a, b] \subset [a, \omega)$ *при базе* $\mathfrak{B}_y$*,(например, могло бы быть* $y \to y_0 \in Y$*);*
3. $\int\limits_a^{\omega} f(x, y)\,dx \underset{\mathfrak{B}_y}{\rightrightarrows}$.

Тогда

$$\lim_{\mathfrak{B}_y} \int\limits_a^{\omega} f(x, y)\,dx = \int\limits_a^{\omega} \varphi(x)\,dx.$$

Доказательство. Обозначим $F_b(y) = \int\limits_a^b f(x, y)\,dx$. Напишем цепочку равенств (обоснование приведём ниже).

$$\lim_{\mathfrak{B}_y} \int\limits_a^{\omega} f(x, y)\,dx = \lim_{\mathfrak{B}_y} \lim_{b\to\omega} \int\limits_a^{b} f(x, y)\,dx =$$

$$\lim_{\mathfrak{B}_y} \lim_{b\to\omega} F_b(y) = \lim_{b\to\omega} \lim_{\mathfrak{B}_y} F_b(y) =$$

$$\lim_{b\to\omega} \lim_{\mathfrak{B}_y} \int\limits_a^{b} f(x, y)\,dx = \lim_{b\to\omega} \int\limits_a^{b} \varphi(x)\,dx = \int\limits_a^{\omega} \varphi(x)\,dx$$

Пояснить требуется третье и пятое равенство. Третье равенство вытекает из теоремы 8.1.2 о свойствах равномерной сходимости параметрических семейств. Действительно,

- из второго условия теоремы и теоремы 8.1.3 вытекает, что существует $\lim\limits_{\mathfrak{B}_y} F_b(y)$;
- из третьего условия теоремы вытекает $F_b(y)$ равномерно сходится на базе $\mathfrak{B}_y$ при $b \to \omega$.

Пятое равенство следует из теоремы для собственного интеграла. □

Теорема 8.2.6. *Для функции $f(x, y) : [a, \omega) \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$ справедливо*

1. $f, f'_y(x, y) \in C([a, \omega) \times [c, d])$*;*

2. $\int\limits_a^{\omega} f'_y(x,y)\,dx \underset{[c;d]}{\rightrightarrows}$

3. $\int\limits_a^{\omega} f_y(x,y_0)\,dx$*- сходится при* $y_0 \in [c,d]$.

Тогда $F(y) = \int\limits_a^{\omega} f(x,y)\,dx \in C^1[c,d]$ *и* $F'(y) = \int\limits_a^{\omega} f'_y(x,y)\,dx$.

Доказательство. Обозначим $F_b(y) = \int\limits_a^{b} f(x,y)\,dx$. Тогда по теореме 8.1.5 о дифференцируемости собственного интеграла, зависящего от параметра, из условий $f'_y(x,y), f(x,y) \in C[a,b]\times[c,d]$, для любого $b \in [a,\omega)$ вытекает, что $F'_b(y) = \int\limits_a^{b} f'_y(x,y)\,dx$.

Поскольку

- $F_b(y) \in C^1[c,d]$ (вытекает из свойств собственного интеграла);
- $F'_b(y) = \int\limits_a^{b} f'_y(x,y)\,dx \underset{[c,d]}{\rightrightarrows} \Phi(y),\ \ b \to \omega$ — равномерно сходится по условию;
- $F_b(y_0) = \int\limits_a^{b} f(x,y_0)\,dx$ — сходится при $b \to \omega$ по условию.

Следовательно по теореме 8.1.2 четвёртого утверждения $F_b(y) \underset{[c,d]}{\rightrightarrows} F(y),\ \beta \to \omega$ и $F'(y) = \Phi(y)$ □

Теорема 8.2.7 (Непрерывность). *1)* $f \in C([a,\omega)\times[c,d])$
2) $\int\limits_a^{\omega} f(x,y)\,dx \underset{[c,d]}{\rightrightarrows}$
Тогда $F(y) = \int\limits_a^{\omega} f(x,y)\,dx \in C[c,d]$

Доказательство. Положим $F_b(y) = \int\limits_a^{b} f(x,y)\,dx$.

1. $F_b \in C[c,d]$.

2. $F_b(y) \underset{[c,d]}{\rightrightarrows} \Rightarrow$ по принципу семейств параметрических функций.

□

Теорема 8.2.8 (Об интегрируемости (для несобственного интеграла (особенность одна)). *Пусть* $f \in C([a,\omega)\times[c,d])$ *и* $\int\limits_a^{\omega} f(x,y)\,dx \underset{[c,d]}{\rightrightarrows}$. *Тогда* $F(y) = \int\limits_a^{\omega} f(x,y)\,dx \in R[c,d]$ *и*

$$\int\limits_c^{d}\left(\int\limits_a^{\omega} f(x,y)dx\right)dy = \int\limits_a^{\omega}\left(\int\limits_c^{d} f(x,y)dy\right)dx.$$

Доказательство. $\int\limits_c^{d}\left(\int\limits_a^{b} f(x,y)\,dx\right)dy = \int\limits_a^{b}\left(\int\limits_c^{d} f(x,y)\,dy\right)dx$ – верно для собственного интеграла

Для доказательства теоремы достаточно получить равенство

$$\lim_{b\to\omega-}\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right)dx=\int\limits_c^d\lim_{b\to\omega-}\left(\int\limits_a^b f(x,y)\,dx\right)dy. \tag{8.2.1}$$

Пусть $F_b(y)=\int\limits_a^b f(x,y)dx$. Тогда, если мы докажем равенство

$$\lim_{b\to\omega-}\int\limits_c^d F_b(y)\,dy=\int\limits_c^d\lim_{b\to\omega-}F_b(y)\,dy,$$

то будет доказано оценка (8.2.1) и теорема.

1. $F_b(y)=\int\limits_a^b f(x,y)dx\underset{[c,d]}{\rightrightarrows},\ \beta\to\omega$

2. $F_b\in\ C[c,d],\,\forall b\in[a,\omega)\Rightarrow$ по теореме о параметрических семействах.

□

Теорема 8.2.9 (Об интегрируемости (для несобственного интеграла: особенность по каждой переменной)**.** *Пусть выполнены условия*

1. $f\in C([a,\omega)\times[c,\varpi])$,

2. $\Phi(x)=\int\limits_c^\varpi f(x,y)\,dy\underset{\forall[a,b]\subset\ [a,\omega)}{\rightrightarrows}$
   $F(y)=\int\limits_a^\omega f(x,y)\,dx\underset{\forall[c,d]\subset\ [c,\varpi)}{\rightrightarrows}.$

3. *Если один из интегралов сходится:*

$$\int\limits_a^\omega\left(\int\limits_c^\varpi|f(x,y)|dy\right)dx,\quad\int\limits_c^\varpi\left(\int\limits_a^\omega|f(x,y)|dx\right)dy.$$

Тогда

$$\int\limits_a^\omega\left(\int\limits_c^\varpi f(x,y)dy\right)dx\ =\int\limits_c^\varpi\left(\int\limits_a^\omega f(x,y)dx\right)dy.$$

Доказательство. Без ограничения общности будем предполагать, что сходиться интеграл $\int\limits_a^\omega\left(\int\limits_c^\varpi|f(x,y)|dy\right)dx$. Приведём обоснование того, что равенство

$$\lim_{d\to\varpi}\int\limits_c^d\left(\int\limits_a^\omega f(x,y)dx\right)dy\ =\int\limits_a^\omega\lim_{d\to\varpi}\left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right)dx,$$

справедливо.

Положим $\Phi_d(x)=\int\limits_c^d f(x,y)\,dy$. Тогда

- $\Phi_d(x)\underset{[a,b]\subset\ [a,\omega)}{\rightrightarrows},\ \ d\to\varpi-$ по условию 2;

- $|\Phi_d(x)| \leqslant \int\limits_c^{\varpi} |f(x,y)|\,dy = G(x)$;
- $\int\limits_a^{\varpi} G(x)\,dx$ — сходится.

Следовательно по признаку Вейерштрасса $\int\limits_a^{\omega} \Phi_d(x)\,dx \rightrightarrows$. Следовательно по теореме 8.2.5 справедливо равенство

$$\lim_{d\to\varpi}\int_a^{\omega}\Phi_d(x)\,dx = \int_a^{\omega}\lim_{d\to\varpi}\Phi_d(x)\,dx$$

Что и доказывает теорему. □

Следствие 8.2.2 (об интегрируемости (по две особственности в каждом из интегралов))**.** Пусть выполнены условия

1. $f \in C((\omega_1,\omega_2)\times(\varpi_1,\varpi_2))$;
2. $\Phi(x) = \int\limits_{\varpi_1}^{\varpi_2} f(x,y)\,dy \underset{\forall[\alpha,\beta]\subset\ (\omega_1,\omega_2)}{\rightrightarrows}$,
   $F(y) = \int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} f(x,y)\,dx \underset{\forall[c,d]\subset\ (\varpi_1,\varpi_2)}{\rightrightarrows}$;
3. Сходится один из интегралов
   $\int\limits_{\omega_1}^{\omega_2}\left(\int\limits_{\varpi_1}^{\varpi_2}|f(x,y)|dy\right)dx$ либо $\int\limits_{\varpi_1}^{\varpi_2}\left(\int\limits_{\omega_1}^{\omega_2}|f(x,y)|dx\right)dy.$

Тогда

$$\int\limits_{\omega_1}^{\omega_2}\left(\int\limits_{\varpi_1}^{\varpi_2} f(x,y)\,dy\right)dx = \int\limits_{\varpi_1}^{\varpi_2}\left(\int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} f(x,y)\,dx\right)dy.$$

Доказательство. Достаточно разбить на несколько интегралов и применить предыдущую теорему. □

П р и м е р 8.2.4 (Интеграл Эйлера-Пуассона)**.**

$$I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \ = \ \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Доказательство. $I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du \ = \ \int\limits_0^{+\infty} ye^{-x^2y^2}\,dx$, $u = xy$ для $y > 0$.

$$I^2 = \int\limits_0^{+\infty} e^{-y^2}\ dy\int\limits_0^{+\infty} ye^{-x^2y^2}\,dx \overset{?}{=} \int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_0^{+\infty} ye^{-y^2(1+x^2)}dy\right)dx \ = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} \ = \frac{\pi}{4}$$

Обоснование перехода, помеченного меткой (?):

1. $f(x,y) \ = ye^{-y^2(1+x^2)} \ \in C(R^2)$;

2. Докажем, что есть равномерная сходимость: $\int_0^{+\infty} ye^{-y^2(1+x^2)}\ dy \underset{x\in\mathbb{R}}{\rightrightarrows}$. Действительно, равномерная сходимость на множестве $x\in\mathbb{R}$ вытекает из оценки $ye^{-y^2(1+x^2)} \leqslant \ ye^{-y^2}$ и признака Вейрштрасса.
При исследовании на равномерную сходимость по переменной $y\in(0;+\infty)$ возникает две особенности:

в нуле и на бесконечности. Пусть $y \in [c,d] \subset (0,+\infty)$ из неравенства $ye^{-y^2(1+x^2)} \leqslant\ d\ e^{-c^2(1+x^2)}$ и признака Вейерштрасса вытекает, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\ ye^{-y^2(1+x^2)}\ dx$ равномерно сходится по переменной y из произвольного множества $[c,d] \subset (0,+\infty)$.

3. $\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_0^{+\infty}\ |ye^{-y^2(1+x^2)}|dy\right)\ dx$ — сходится (и мы его даже вычислили).

$\square$

П р и м е р 8.2.5 (Интеграл Дирихле).

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin(\alpha x)}{x}\ dx\ = \frac{\pi}{2}\operatorname{sign}(\alpha).$$

Доказательство. Обозначим $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin(\alpha t)}{t}\,dt$. Случай $\alpha = 0$ — очевиден, т.к. $I(\alpha) = 0$. Случай $\alpha < 0$ — сводится к $\alpha > 0$, т.к. $I(\alpha) = -I(-\alpha)$. Поэтому разберём оставшийся случай, т.е. $\alpha > 0$. Сделаем замену переменного $t = \alpha x$:

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin(\alpha x)}{x}\,dx = \int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt, \quad \alpha > 0.$$

Вычислим последний интеграл. Введём обозначение:

$$F(\beta) = \int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\ e^{-\beta t}\,dt\ \ \beta \geqslant 0.$$

Покажем, что функцию $F(\beta)$ можно дифференцировать при $\beta \geqslant \beta_0 > 0$. Проверим, что выполнены условия позволяющие дифференцировать несобственный интеграл.

- $f(t,\beta) = \frac{\sin t}{t}\ e^{-\beta t}\ \in C(\mathbb{R}^2),\ \ f'_\beta = -\sin t\, e^{-\beta t} \in C(\mathbb{R}^2)$.
- $-\int\limits_0^{+\infty}\sin t\, e^{-\beta t}\ dt \underset{[\beta_0,+\infty)}{\rightrightarrows}$ сходится по Вейерштрассе так как: $|-\sin(t)\ e^{-\beta t}| \leqslant e^{-\beta_0 t}$, а интеграл от функции $e^{-\beta_0 t}$ сходится на луче $(0;+\infty)$.
- $F(1)$ сходится.

Согласно этим трём пунктам функцию $F(\beta)$ можно дифференцировать на множестве $\beta \geqslant \beta_0 > 0$. Но постоянную β_0 можно выбирать произвольной положительной величиной. Следовательно, производную функции $F(\beta)$ можно найти для произвольного $\beta > 0$. Найдём её.

$$F'(\beta) = -\int\limits_0^{+\infty}\sin t\, e^{-\beta t}\ dt\ \ =\ \Im\int\limits_0^{+\infty}\ e^{-(\beta+i)t}\ dt\ \ =\ \Im\frac{1}{\beta+i}\ \ = \Im\left(\frac{\beta - i}{\beta^2+1}\right) = -\frac{1}{\beta^2+1}$$

Откуда получаем: $F(\beta) = -\operatorname{arctg}(\beta) + C$.

Докажем, что функция $F(\beta)$ непрерывна на $[0;+\infty)$. Для этого надо доказать, что интеграл равномерно сходится по параметру $\beta \in [0;+\infty)$ (непрерывность подинтегральной функции мы уже отмечали). Действительно $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt$ сходится по признаку Дирихле, а так как данный интеграл от β не зависит, то сходится равномерно на любом множестве по переменной β. Остаётся заметить, что $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,e^{-\beta t}\,dt$ сходится равномерно по признаку Абеля, так как $|e^{-\beta t}| \leqslant 1$ при $\beta, t \geqslant 0$ и $e^{-\beta t}$ монотонна по переменной t при любом $\beta \in [0,+\infty]$.

Таким образом функция $F(\beta)$ непрерывна на $[0;+\infty)$. Найдём константу C в равенстве $F(\beta) = -\operatorname{arctg}(\beta) + C$.

$$\lim_{\beta\to+\infty} F(\beta) = 0 = -\frac{\pi}{2} + C.$$

Откуда $C = \pi/2$. Т.е. мы доказали равенство

$$F(\beta) = -\operatorname{arctg}(\beta) + \frac{\pi}{2}.$$

Остаётся воспользоваться непрерывность функции $F(\beta)$ в нуле справа.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \lim_{\beta\to 0+} F(\beta) = -\operatorname{arctg}(0) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

□

Другой способ нахождения интеграла Дирихле вытекает из того, что в интеграле

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\left(\int_0^{\beta}\cos(tx)\,dt\right)dx, \quad \alpha \geqslant 0,\ \beta\in\mathbb{R},$$

можно поменять порядки интегрирования местами при $\alpha \in [\alpha_0; +\infty)$, где $\alpha_0 > 0$. А далее из непрерывности исходной функции по $\alpha \in [0; +\infty)$ находим интеграл Дирихле. Предлагаем это проделать читателю самостоятельно.

8.3 Гамма-функция

Рассмотрим бету и гамму функции. Они часто называются эйлеровыми интегралами. Гамма функцию[1] Л. Эйлер ввёл в 1729 году, как обобщение факториала на всю комплексную область при помощи формулы

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^z}{1+\frac{z}{n}}, \quad z\in\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}.$$

Также из этой формулы было получено интегральное представление на $(0; +\infty)$. Здесь, ввиду краткости курса, мы начнём сразу с интегрального представления.

Начнём с гамма-функции: $\Gamma(x) = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$. Данная формула определена при всех $x > 0$, что вытекает из сходимости интеграла. Для всех $x\in\mathbb{R}$ гамма функция определена следующим равенством:

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt, & x > 0; \\ \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}\left(e^{-t} - \sum_{m=0}^{k}\frac{(-t)^m}{m!}\right)dt = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}\left(\sum_{m=k+1}^{+\infty}\frac{(-t)^m}{m!}\right)dt, & x\in(-(k+1);-k),\ k\in\mathbb{Z}_+. \end{cases}$$

Бета-функция определяется следующим образом: $B(x,y) = \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$. Бета-функция определена при всех $x, y > 0$, что вытекает из сходимости интеграла.

---

[1] Можно было бы определить гамма функция через следующую формулу (**формула Вейерштрасса**)

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}},$$

где γ — константа Эйлера. Если $z\in\mathbb{Z}_-$, то произведение расходится к нулю, т.е. в целых неположительных точках у $\Gamma(z)$ полюса. Корректность данного определения вытекает из абсолютной сходимости бесконечного произведения в точках $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_-$. А далее доказать, что для данной функции справедливо интегральное представление.

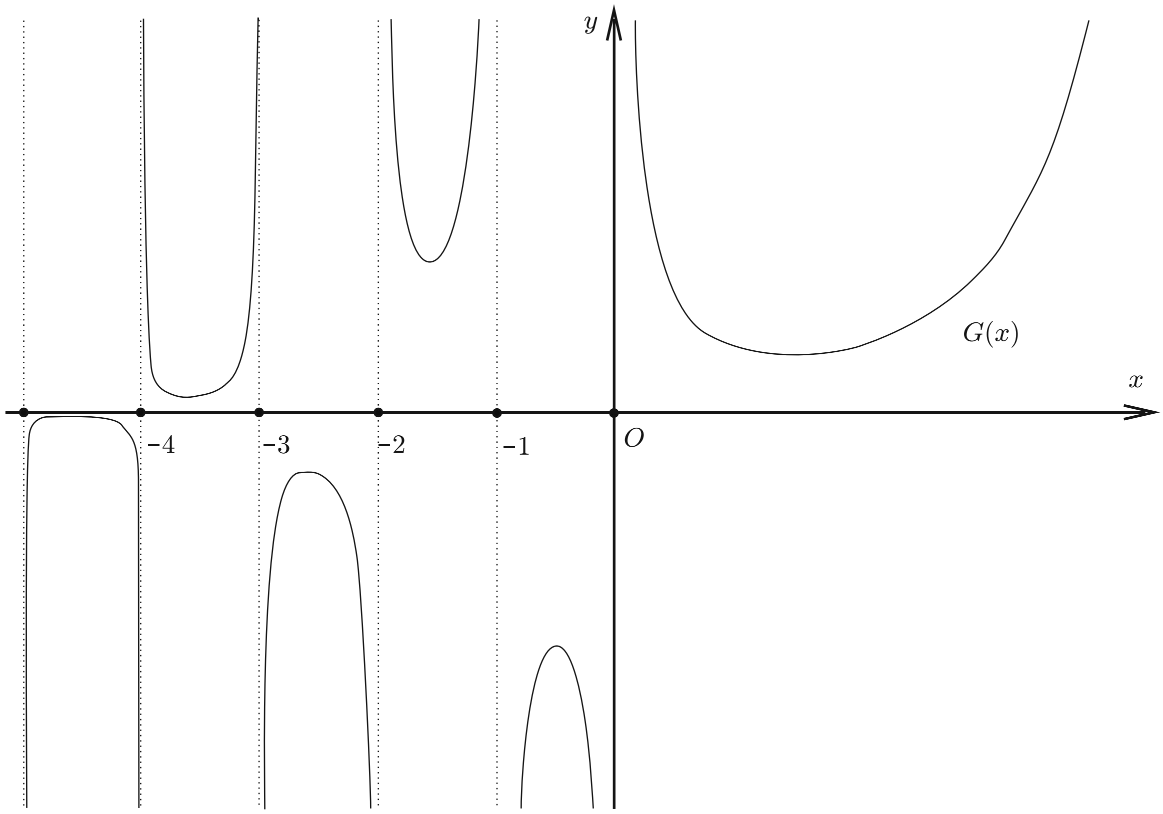


Рис. 8.1: Гамма функция

Теорема 8.3.1. *Перечислим важные свойства гамма-функции:*

1. $\Gamma(x)$ *определена при* $x > 0$, $B(x, y)$ *определена при* $x, y > 0$.
2. $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$.
3. $B(x, y) = B(y, x)$
4. $\Gamma(n + 1) = n!$
5. $B(x, y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}\,dt}{(1+t)^{x+y}}$.
6. $B(x, y) = \frac{x-1}{x+y-1} B(x - 1, y)$, $x > 1$, $y > 0$.
7. $B(x, y) = \frac{y-1}{x+y-1} B(x, y - 1)$, $x > 0$, $y > 1$.
8. $B(n, x) = \frac{(n-1)!}{x(x+1)\ldots(x+n-1)}$, $n \in \mathbb{N}$, $x > 0$.
9. $B(m, n) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(n+m-1)!} = \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)}$, $n, m \in \mathbb{N}$.
10. $\Gamma(x) = \int\limits_0^1 \ln^{x-1}(\frac{1}{u})\,du$.
11. *(Формула Эйлера-Гаусса)* $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} n^x B(x, n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^x (n-1)!}{x(x+1)\ldots(x+n-1)}$.

12. (Формула дополнения) $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$, $x \in (0,1)$.

13. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

14. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^\alpha x \cos^\beta x \, dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}\right)$.

15. $B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$, $\alpha,\beta > 0$.

Доказательство. Первое свойство вытекает из сходимости интегралов в нуле и на бесконечности для гамма-функции и в нуле и единице для бета-функции. Докажем второе свойство:

$$\Gamma(x+1) = -\int\limits_0^{+\infty} t^x de^{-t} = x \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt = x\Gamma(x).$$

Для доказательства третьего свойства достаточно сделать замену $z = t - 1$.
Свойство 4 вытекает из того, что $\Gamma(1) = 1$ и второго свойства.
Пятое свойство получаем, сделав замену переменного при интегрировании $t = \frac{z}{z+1}$.
Свойство 6. Интегрированием по частям получаем:

$$B(x,y) = \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} \, dt = -\frac{1}{y} \int\limits_0^1 t^{x-1} \, d(1-t)^y =$$

$$= \frac{x-1}{y} \int\limits_0^1 t^{x-2} \left((1-t)^{y-1} - t(1-t)^{y-1}\right) \, dt = \frac{x-1}{y} B(x-1,y) - \frac{x-1}{y} B(x,y).$$

Последнее равенство даёт возможность выразить $B(x,y)$ через $B(x-1,y)$.
Свойство 7. Вытекает из уже доказанных свойств 6 и 3.
Свойство 8. Из равенства $B(1,x) = 1/x$ и свойства 6 вытекает

$$B(n,x) = \frac{n-1}{x+n-1} B(n-1,x) = \dots = \frac{(n-1)!}{(x+n-1)\dots(x+1)} B(1,x) = \frac{(n-1)!}{x(x+1)\dots(x+n-1)}.$$

Свойство 9 вытеает из свойств 4 и 8. Действительно,

$$B(n,m) = \frac{(n-1)!}{m(m+1)\dots(m+n-1)} = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!} = \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(m+n)}.$$

Свойство 10 получаем, сделав замену переменного $t = \ln(1/u)$ или что равносильно $u = e^{-t}$.
Свойства 11, 12 и 15 докажем позже.
Свойство 13 получаем из формулы дополнения. Достаточно положить $x = 1/2$.
Свойство 14 получаем, сделав замену переменного $t = \sin^2 x$. □

Лемма 53. *(Формула Эйлера-Гаусса)*

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} n^x B(x,n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x (n-1)!}{x(x+1)...(x+n-1)}.$$

Перед доказательством формулы Эйлера-Гаусса рассмотрим замечание.

Замечание 77. Напомним, что функция h принадлежит классу Липшиц α на множестве A с константой C (т.е. $h \in Lip_\alpha C$, если $|h(x) - h(y)| \le C|x-y|^\alpha$ $\forall x,y \in A$. Справедливо простое утверждение. Если $(h \in Lip_1 \, C)$, то

$$f_n(u) \overset{A}{\rightrightarrows} g(u) \ (n \to +\infty) \Rightarrow h\left(f_n(u)\right) \overset{A}{\rightrightarrows} h(g(u)) \ (n \to +\infty).$$

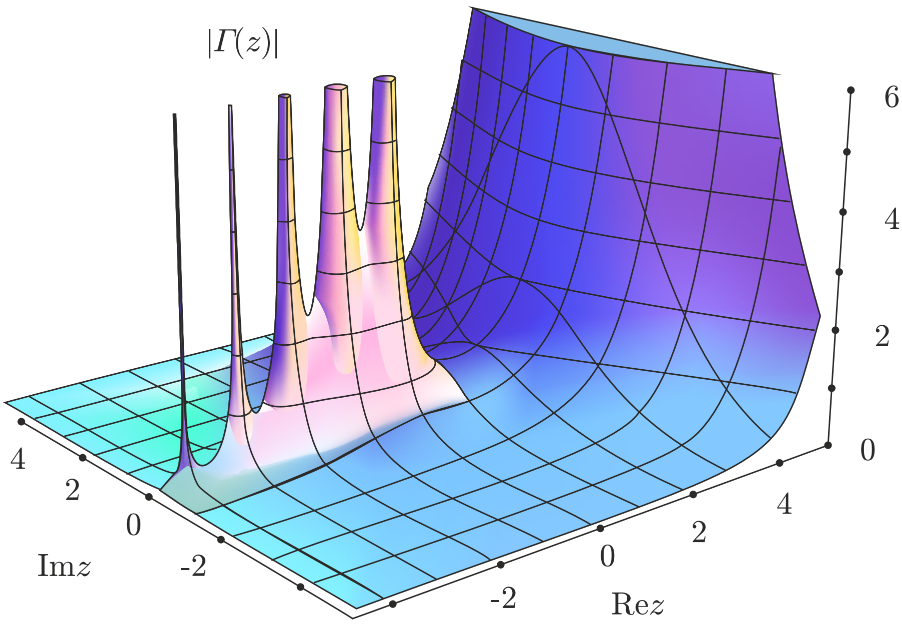


Рис. 8.2: Модуль гамма функции в комплексной области

Действительно, данное замечание справедливо ввиду

$$|h(f_n(u)) - h(g(u))| \le \; C\,|f_n(u) - g(u)|\,.$$

Доказательство. (Формулы Эйлера-Гаусса). Докажем

$$f_n(u) = n\left(1 - u^{\frac{1}{n}}\right) \underset{[\varepsilon;1]}{\rightrightarrows} \ln\left(\frac{1}{u}\right), \; n \to +\infty, \forall \varepsilon \in (0;1). \tag{8.3.2}$$

Из равенства $e^x = 1 + x + \frac{e^c \cdot x^2}{2}$, где c лежит между x и 0, вытекает

$$u^{1/n} = 1 + \frac{\ln u}{n} + \frac{\ln^2 u}{2n^2} \cdot e^c, \quad c \in \left(\frac{\ln u}{n}; 0\right), \; u \in [\varepsilon; 1], \; n \in \mathbb{N}.$$

Последнее равенство даёт оценку

$$n(1 - u^{\frac{1}{n}}) = \ln\left(\frac{1}{u}\right) - \frac{e^c}{2n} \cdot \ln^2 u, \quad c \in \left(\frac{\ln u}{n}; 0\right), \; u \in [\varepsilon; 1], \; n \in \mathbb{N}. \tag{8.3.3}$$

и доказывает равенство (8.3.2):

$$\Big| f_n(u) - f(u) \Big| = \frac{\ln^2 u}{2n} \cdot e^c \le \frac{\ln^2 \varepsilon}{2n} \to 0, \; n \to +\infty.$$

Из равенства (8.3.3) получаем

$$0 \leqslant f_n(u) = n(1 - u^{\frac{1}{n}}) \leqslant \ln\left(\frac{1}{u}\right) = f(u), \quad u \in (0; 1], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Откуда для $\gamma = x - 1 \geqslant 0$ справедливо

$$0 \leqslant f_n^\gamma(u) \leqslant f^\gamma(u), \quad u \in (0; 1], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку последняя оценка справедлива при всех натуральных n, то из сходимости интеграла $\int_0^1 f^\gamma(u)\,du$ при фиксированном $\gamma > 0$ (действительно, сделав замену пременного $t = -\ln u$ $(u = e^{-t})$ замечаем, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} t^\gamma e^{-t}\,dt$ — сходится) по теореме Вейерштрасса вытекает равномерная сходимость на множестве $n \in \mathbb{N}$ интеграла $\int_0^1 f_n^\gamma(u)\,du$.

Подведём итог. При $x > 2$, ($\gamma = x - 1 > 1$) справедливо:

1'. $f_n^\gamma(u) = \left[n(1-u^{\frac{1}{n}})\right]^\gamma_{[\varepsilon;1]} \rightrightarrows \ln^\gamma \frac{1}{u}$, сходимость равномерная при $n \to +\infty$ на произвольном множестве $[\varepsilon;1]$, $\varepsilon > 0$ (вытекает из замечания 77, для функции $h(t) = t^\gamma,\ \gamma \geq 1$[2].)

2. $x \geq 1$ $\int\limits_0^1 (f_n(u))^{x-1}\,dx \underset{n\in\mathbb{N}}{\rightrightarrows}$ (в частности, будет равномерная сходимость при $n \to +\infty$).

3. $[f_n(u)]^\gamma \in \mathcal{R}[0;1],\ \forall n$, в несобственном смысле.

Следовательно возможен предельный переход

$$\Gamma(x) = \int\limits_0^1 \ln^{x-1}\left(\frac{1}{u}\right)du = \lim_{n\to+\infty}\int\limits_0^1\left[n^{x-1}\left(1-\underbrace{u^{\frac{1}{n}}}_{u=v^n}\right)^{x-1}\right]du =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n^x \int\limits_0^1 v^{n-1}(1-v)^{x-1}dv = \lim_{n\to+\infty} n^x B(n,x)$$

Мы доказали формулу для $x > 2$, но из формул понижения вытекает справедливость для $x \in (1;+\infty)$ и аналогично для $x \in (0;+\infty)$. Действительно, последнее замечание вытекает из равенств (используя равенство $B(n,x+1) = B(n,x)\frac{x}{n+x}$)

$$\Gamma(x+1) = \lim_{n\to+\infty}\left[n^{x+1}\mathrm{B}(n,x+1)\right],\ x>1;$$

$$x\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty}\left[n^{x+1}\mathrm{B}(n,x)\left(\frac{x}{n+x}\right)\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[x\,n^x\,\mathrm{B}(n,x)\left(\frac{n}{n+x}\right)\right];$$

$$x\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} x\,n^x\,B(n,x),\ x>1.$$

Таким образом проверена справедливость равенства $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} n^x B(n,x)$, при $x > 1$, рассуждая аналогично приходим к выводу о том, что последне равенство справедливо и при $x > 0$. □

Лемма 54. *Докажем формулу дополнений (свойство 12).*

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)},\ x \in (0;1)$$

Доказательство.

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \lim_{n\to+\infty}\left[n^x\frac{(n-1)!}{x(x+1)...(x+n-1)} \times \frac{n^{1-x}(n-1)!}{(n-x)(n-1-x)...(1-x)}\right] =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{x(1+\frac{x}{1})...(1+\frac{x}{n-1})} \times \frac{1}{(1-\frac{x}{n-1})...(1-\frac{x}{1})} \times \frac{n}{(n-x)}\right] =$$

$$= \frac{1}{x}\frac{1}{\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)} = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

Последнее равенство написано ввиду того, что

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right).$$

□

[2] Функция $h(t)$ из класса Липшица, вытекает, например, из оценки $h'(t) = \gamma t^{\gamma-1}$

15. Докажем формулу, связывающую гамма и бета функции сначала в предположении, что α, $\beta > 2$. В определении $\Gamma(\alpha+\beta) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha+\beta-1}e^{-t}\,dt$, сделаем замену переменного $t = (1+y)x$. Тогда получаем

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{(1+y)^{\alpha+\beta}} = \int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha+\beta-1}e^{-(1+y)x}dx.$$

Следовательно

$$\Gamma(\alpha+\beta)\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \int\limits_0^{+\infty} \Gamma(\alpha+\beta)\frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}}\,dy =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha+\beta-1}e^{-(1+y)x}dx\right)y^{\alpha-1}dy = ??? = \int\limits_0^{+\infty} x^{\beta-1}e^{-x}\underbrace{\left(\int\limits_0^{+\infty}(yx)^{\alpha-1}e^{-yx}d(yx)\right)}\,dx = \Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta).$$

Обоснование изменение пределов интегрирования:

1. $f(x,y) = x^{\alpha+\beta-1}y^{\alpha-1}e^{-(1+y)x} \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^2)$;

2. $\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_0^{+\infty}|f(x,y)|dy\right)dx = \Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)$ сходится при $\alpha,\beta > 0$;

3. Докажем, что $\int\limits_0^{+\infty} f(x,y)dy$ — сходится равномерно по $x \in (0,+\infty)$. Для этого покажем, что

$$\lim_{b\to+\infty}\sup_{x\in[0;+\infty)} x^{\beta-1}e^{-x}\int\limits_b^{+\infty}(xy)^{\alpha-1}e^{-yx}d(yx) = 0.$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Обозначим $F = x^{\beta-1}e^{-x}\int\limits_{bx}^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt$, где $t = xy$. Выберем x_0 из следующего условия: $\sup\limits_{x\in[0,x_0]} x^{\beta-1}e^{-x} < \varepsilon/\Gamma(\alpha)$.

$$0 \le \sup_{x\in[0,+\infty)} F \le \sup_{x\in[0,x_0]} F + \sup_{x\in[x_0,+\infty)} F = I_1 + I_2$$

$$I_1 \le \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt = \varepsilon,$$

$$I_2 \le \left(\max_{[0,+\infty)}(x^{\beta-1}e^{-x})\right)\int\limits_{bx_0}^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt \ - \ \text{сходится, а } x_0 \text{ фиксированно.}$$

Положим $C(\beta) = \left(\max\limits_{[0,+\infty)}(x^{\beta-1}e^{-x})\right)$. Тогда

$$\lim_{b\to+\infty}\sup_{x\in[0,+\infty)}|F| \le \varepsilon + C(\beta)\left(\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{bx_0}^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}\right)dt = \varepsilon.$$

3'. Докажем, что равномерно сходится $\int\limits_0^{+\infty} f(x,y)dx$ по $y \in (0,+\infty)$. Справедливо

$$\int\limits_b^{+\infty}(e^{-yx}(xy)^{\alpha-1})x^{\beta}e^{-x}\,dx \le (\max_{[0,+\infty)}(t^{\alpha-1}e^{-t}))\int\limits_b^{+\infty} x^{\beta}e^{-x}\,dx.$$

Откуда

$$\lim_{b\to+\infty}\sup_{y\in[0,+\infty)}\Big|\int\limits_b^{+\infty} f(x,y)dx\Big| \le \lim_{b\to+\infty}\big(\max_{t\in[0,+\infty)}(t^{\alpha-1}e^{-t})\big)\int\limits_b^{+\infty} x^\beta e^{-x}dx = 0.$$

Итог: $B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},\ \alpha,\beta\ge 2$. Покажем, как при помощи формул понижения получить данную формулу для $\alpha,\ \beta>0$. Действительно, равенство

$$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},\ \alpha,\beta>2,$$

равносильно

$$B(\alpha+1,\beta+1)=\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)},\ \alpha,\beta>1.$$

при помощи формул понижения, получаем:

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta+1}\frac{\beta}{\alpha+\beta}B(\alpha,\beta)=\frac{\alpha\cdot\beta\cdot\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

После сокращений приходим к нужной формуле, но уже для $\alpha,\ \beta>1$. Повторив выкладки прийдём к формуле для любых $\alpha,\ \beta>0$.

Контрольные вопросы.

1. Чему равны значения $\Gamma(\frac{5}{2})$, $\Gamma(7)$, $\Gamma(-\frac{1}{2})$?

Упражнения к 8.3

Упражнение 8.3.1. *Найдите* $\Gamma(-\frac{1}{2})$, $\Gamma(-\frac{3}{2})$, $\Gamma(\frac{7}{2})$.

Упражнение 8.3.2. *Найдите предел*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x^n}\,dx.$$

Упражнение 8.3.3. *Докажите равенства*

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}+n\right)=\frac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi}=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}=\sqrt{\pi}\cdot\left[\binom{n-\frac{1}{2}}{n}n!\right];$$

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}-n\right)=\frac{(-4)^n n!}{(2n)!}\sqrt{\pi}=\frac{(-2)^n}{(2n-1)!!}\sqrt{\pi}=\sqrt{\pi}/\left[\binom{-\frac{1}{2}}{n}n!\right].$$

Ответы: 8.3.1 $\Gamma(-\frac{1}{2})=-2\sqrt{\pi}$, $\Gamma(-\frac{3}{2})=4\sqrt{\pi}/3$, $\Gamma(\frac{7}{2})=15\sqrt{\pi}/8$. **8.3.2** предел равен 1. **8.3.3** *Указание:* используйте формулу понижения для $\Gamma(x)$.

8.4 Преобразования Фурье

8.4.1 Наводящие соображения

Пусть $f\in Var_x,\ f\in L[-\pi u;\pi u]$. Тогда из теории рядов Фурье известно:

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k\cos\frac{kx}{u}+b_k\sin\frac{kx}{u}\right),$$

где

$$\begin{pmatrix}a_k\\ b_k\end{pmatrix}=\frac{1}{\pi u}\int\limits_{-\pi u}^{\pi u} f(t)\begin{pmatrix}\cos\frac{t}{u}k\\ \sin\frac{t}{u}k\end{pmatrix}dt.$$

Используя известные формулы $\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}$, $\sin\alpha = \frac{i(e^{-i\alpha}-e^{i\alpha})}{2}$, продолжим

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k\cos\frac{kx}{u} + b_k\sin\frac{kx}{u}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, e^{i\frac{x}{u}k},$$

где константы c_k могут быть вычислены следующим образом:

$$\begin{cases} c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi u}\int\limits_{-\pi u}^{\pi u} f(t)\,dt, \\ c_k = \frac{a_k - ib_k}{2} = \frac{1}{2\pi u}\int\limits_{-\pi u}^{\pi u} f(t)e^{-i\frac{t}{u}k}\,dt, \quad k\in\mathbb{N}, \\ c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2} = \frac{1}{2\pi u}\int\limits_{-\pi u}^{\pi u} f(t)e^{i\frac{t}{u}k}\,dt, \quad k\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

Вывод: в комплексной области мы получаем формулу на нахождение коэффициентов c_k:

$$c_k = \frac{1}{2\pi u}\int_{\pi u}^{\pi u} f(t)e^{-i\frac{k}{u}t}\,dt, k\in\ \mathbb{Z}.$$

Предположим, что дополнительно $f\in L(\mathbb{R})$. Введём обозначение $\lambda_k = \frac{k}{u}$, $\varphi(\lambda_k) = \int\limits_{-\pi u}^{\pi u} f(t)e^{i\lambda_k(x-t)}dt$ и устремим $u\to+\infty$.

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i\frac{x}{u}k} = \frac{1}{2\pi u}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\pi u}^{\pi u} f(t)e^{i\frac{k}{u}(x-t)}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(\lambda_{k+1}-\lambda_k)\,\varphi(\lambda_k) \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\lambda)d\lambda =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt\right)e^{i\lambda x}\,d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_f(\lambda)e^{i\lambda x}\,d\lambda \tag{8.4.4}$$

Доказательство того, что предельный переход возможен потребует много усилий и проще провести прямое доказательство полученной эвристическим путём формулы, что и будет сделано ниже. Итак, мы подошли к определению преобразования Фурье. Пусть $f, g\in L(\mathbb{R})$.

Преобразования Фурье	
прямое	**обратное**
$F_f(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt$	$F_g^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda$

П р и м е р 8.4.1. Найдём прямое и обратное преобразование для функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x|>1; \\ 0, & \text{если } |x|\leqslant 1. \end{cases}$$

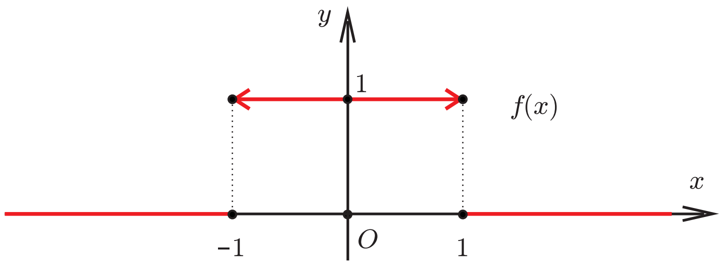


Рис. 8.3:

Доказательство. Вычислим преобразование Фурье для $f(x)$ (см. рис. 8.3)

$$g(\lambda) = F_f(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-1}^{1} e^{-i\lambda t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left. \frac{e^{-i\lambda t}}{-i\lambda} \right|_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{i\lambda} - e^{-i\lambda}}{i\lambda} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sin\lambda}{\lambda}.$$

Теперь обратное преобразование

$$F_g^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) e^{i\lambda x}\, d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sin\lambda}{\lambda} e^{i\lambda x}\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin\lambda \cos\lambda x}{\lambda}\, d\lambda + i \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin\lambda \sin\lambda x}{\lambda}\, d\lambda \right) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin\lambda \cos\lambda x}{\lambda}\, d\lambda.$$

Ниже будет доказано, что если функция $f \in L(\mathbb{R})$ такова, что $f \in \ Var_x$, то

$$F_g^{-1}(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Формулы такого сорта мы будем называть ***формулами обращения***. Возращаясь к исходной функции, найдём обратное преобразование Фурье в точке $x = 1$

$$F_g^{-1}(1) = \frac{f(1+0) + f(1-0)}{2} \iff$$
$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin\lambda \cos\lambda}{\lambda}\, d\lambda = \frac{1}{2} \iff$$
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin\theta}{\theta}\, d\theta = \pi.$$

Откуда снова приходим к интегралу Дирихле $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$. □

П р и м е р 8.4.2. Найдём прямое и обратное преобразование для функции

$$f(x) = e^{-\alpha|x|}.$$

Доказательство. Вычислим преобразование Фурье для $f(x)$ (см. рис. 8.4)

$$g(\lambda) = F_f(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|t|} e^{-i\lambda t}\, dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\alpha t} \cos\lambda t\, dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + \lambda^2}.$$

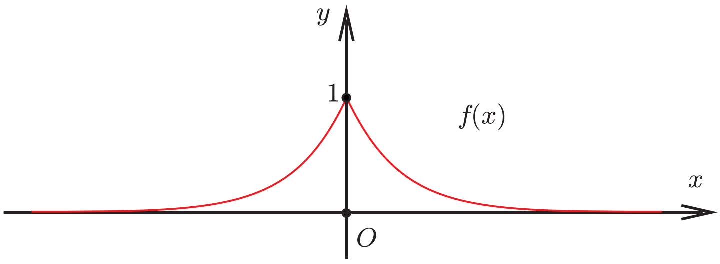


Рис. 8.4:

Теперь обратное преобразование

$$F_g^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) e^{i\lambda x}\, d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2+\lambda^2} e^{i\lambda x}\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\alpha \cos \lambda x}{\alpha^2+\lambda^2}\, d\lambda + i \int_{\mathbb{R}} \frac{\alpha \sin \lambda x}{\alpha^2+\lambda^2}\, d\lambda \right) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\alpha \cos \lambda x}{\alpha^2+\lambda^2}\, d\lambda.$$

Поскольку функция $f \in L(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ такова, что $f \in \ Var_x$, то $f(x) = F_g^{-1}(x)$ или

$$e^{-\alpha|x|} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\alpha \cos \lambda x}{\alpha^2+\lambda^2}\, d\lambda.$$

Т.е. мы представили функцию $f(x)$ *интегралом Фурье*. В частности, полученная формула приводит к интегралу Лапласа

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{\alpha^2+\lambda^2}\, d\lambda = \frac{\pi}{2\alpha} \cdot e^{-\alpha|x|}.$$

$\square$

Теорема 8.4.1 (Свойства преобразований Фурье)**.** *Справедливы следующие равенства*

1. *Пусть $f_1, f_2 \in L(\mathbb{R})$, α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{C}$. Тогда*

$$F_{\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2} = \alpha_1 F_{f_1} + \alpha_2 F_{f_2}.$$

2. *Пусть $f \in L(\mathbb{R})$ и существует почти всюду производная функции $f(x)$ на $\mathbb{R}$ такая, что $f' \in L(\mathbb{R})$. Тогда $F_{f'} = (i\lambda) F_f$.*

3. *Пусть $f, xf(x) \in L(\mathbb{R})$. Тогда $\left[F_{f(x)}(\lambda)\right]'_\lambda = -iF_{xf(x)}(\lambda)$.*

4. *Пусть $f^2, g^2 \in L(\mathbb{R})$, тогда справедливо равенство* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{g(t)} dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_f(\lambda) \overline{F_g(\lambda)}\, d\lambda$.

Доказательство. Первое свойство очевидно. Докажем второе свойство проинтегрировав один раз по частям.

$$F_{f'(x)} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda t} d\, f(t) = i\lambda F_{f(x)}(\lambda).$$

3. дифференцируем по параметру
4. $f^2, g^2 \in L(\mathbb{R})$,

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g(t)} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} F_f(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda \right) \overline{g(t)} dt = \text{без док-ва} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} F_f(\lambda) \left(\overline{\int\limits_{\mathbb{R}} g(t) e^{-i\lambda t} dt} \right) d\lambda = \int\limits_{\mathbb{R}} F_f(\lambda) \overline{F_g(\lambda)}\, d\lambda.$$

$\square$

Для $f \in L(\mathbb{R})$, $f \in \mathrm{Var}_x \cap C(x)$ формула (8.4.4), может быть записана в виде

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i\lambda(x-t)}\, dt \right) d\lambda.$$

Если функция $f(x)$ — вещественнозначная, то представив $e^{i\lambda(x-t)} = \cos\lambda(x-t) + i\sin\lambda(x-t)$ получим два интеграла, причём мнимый интеграл равен нулю. Откуда мы приходим к формуле в действительной области $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} f(t) \cos\lambda(x-t) dt \right) d\lambda$. Эта формула носит названия формулы обращения. Докажем её.

Лемма 55. *Пусть* $f, |f| \in R(\mathbb{R})$, A, $\delta \in (0, +\infty)$, $s \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-A}^{A} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} f(t) \cos\lambda(x-t)\, dt \right) d\lambda \ =$$

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\delta} \frac{\sin A\xi}{\xi} \ \left(f(x+\xi) + f(x-\xi) - 2s \right) d\xi + \ s \ + \ o(1) \ , \ \ A \to +\infty.$$

Доказательство. Приведём обоснование того, что в интеграле, стоящем слева в утверждение леммы, можно поменять порядок интегрирования. Действительно, равномерная сходимость по параметру $\lambda \in [-A, A]$ вытекает из признака Вейерштрасса, условие $f(t) \cos\lambda(x-t) \in C(\mathbb{R}^3)$ здесь не выполняется, но тем не менее поменять порядок интегрирования можно (вытекает из того факта, что множество непрерывных функций всюду плотно для функций интегрируемых по Лебегу в норме пространства $L_1(\mathbb{R})$). Итак,

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-A}^{A} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} f(t) \ \cos\lambda(x-t)\, dt \right) d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{-A}^{A} f(t) \ \cos\lambda(x-t)\, d\lambda \right) dt = \frac{1}{\pi} \ \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\sin A(x-t)}{x-t} \ f(t)\, dt.$$

Зафиксируем произвольное положитльно число ε. Из абсолютной сходимости интеграла вытекает, что существует константа $T > |x| + \delta$ такая, что

$$\int\limits_{T}^{+\infty} |f(t)|\, dt < \varepsilon, \quad \int\limits_{-\infty}^{-T} |f(t)|\, dt < \varepsilon.$$

Продолжим оценку

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-A}^{A} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} f(t) \ \cos\lambda(x-t)\, dt \right) d\lambda = \frac{1}{\pi} \ \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\sin A(x-t)}{x-t} \ f(t)\, dt =$$

$$\frac{1}{\pi} \left(\int\limits_{-\infty}^{-T} + \int\limits_{-T}^{x-\delta} + \int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} + \int\limits_{x+\delta}^{T} + \int\limits_{T}^{+\infty} \right).$$

первое и последнее слагаемые меньше ε, второе и предпоследнее при $|A| < \infty$ по лемме Римана - Лебега стремятся к нулю, т.е.

$$\int\limits_{-T}^{x-\delta} \frac{f(t)}{x-t} \sin A(x-t)\, dt \to 0, A \to +\infty,$$

$$\int\limits_{x+\delta}^{T} \frac{f(t)}{x-t} \sin A(x-t)\, dt \to 0, A \to +\infty,$$

и, наконец, третье (среднее слагаемое) равно:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{\sin A(x-t)}{x-t} f(t)\, dt + o(1) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta} \frac{\sin(A\xi)}{\xi} f(x+\xi)\, d\xi + o(1) =$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\delta} \frac{\sin(A\xi)}{\xi} \left(f(x+\xi) + f(x-\xi)\right)\, d\xi + o(1) =$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\delta} \frac{\sin(A\xi)}{\xi} \left(f(x+\xi) + f(x-\xi) - 2s\right)\, d\xi + \left[\left(\frac{2s}{\pi}\right)\int\limits_{0}^{\delta} \frac{\sin(A\xi)}{\xi}\, d\xi + o(1)\right]$$

преобразуем интеграл квадратных скобках

$$\int\limits_{0}^{\delta} \frac{\sin(A\xi)}{\xi}\, d\xi = \int\limits_{0}^{A\delta} \frac{\sin u}{u}\, du = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, du - \int\limits_{A\delta}^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, du \;=\; \frac{\pi}{2} + o(1), \quad A \to +\infty.$$

$\square$

Теорема 8.4.2 (Признак Жордана). *Пусть функция $f \in L(\mathbb{R})$ и $f \in\ Var_x$. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(t)\cos\lambda(x-t)\, dt\right) d\lambda = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Доказательство. В предыдущй лемме положим $s = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, и устримим $A \to +\infty$. Существует такое $\delta \in (0; +\infty)$, что $f \in\ Var\,(V_\delta(x))$. В теории рядов Фурье было доказано:

$$\int\limits_{0}^{\delta} \frac{\sin(A\xi)}{\xi} \underbrace{\left(f(x+\xi) + f(x-\xi) - 2s\right)}_{\psi_{x,s}(\xi)} d\xi \to 0, A \to +\infty,$$

точнее было доказано для $A = n + 1/2$, при $n \to +\infty$. Но требуемо утверждение доказывается полностью аналогично. $\square$

Теорема 8.4.3 (Признак Дини). *Пусть $f \in L(\mathbb{R})$, $\delta \in (0; +\infty)$ и $\int_0^\delta \frac{\psi_{x,s}(t)}{t}\, dt$ — сходится при некотором $s \in \mathbb{R}$. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(t)\cos\lambda(x-t)\, dt\right) d\lambda = s.$$

Доказательство. Из сходимости интеграла в уловии теоремы и леммы Римана-Лебега, получаем

$$\int\limits_0^\delta \sin(A\xi)\left(\frac{f(x+\xi)+f(x-\xi)-2s}{\xi}\right)d\xi \to 0, A \to +\infty,$$

что и требовалось установить. □

Следствие 8.4.1 (из признака Дини)**.** Пусть $f \in L(\mathbb{R})$, $\delta \in (0;+\infty)$, существуют и конечны односторонние пределы $f(x \pm 0)$ и сходятся интегралы $\int_0^\delta \frac{f(x\pm\xi)-f(x\pm 0)}{\xi}\,d\xi$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(t)\cos(\lambda)(x-t)\,dt\right)d\lambda = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Доказательство. Достаточно положить $s = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ в признак Дини. □

8.5 Решение уравнение теплопроводности

П р и м е р 8.5.1. Пусть $x \in \mathbb{R}$, $t \in [0;+\infty)$, $a \neq 0$, $\psi \in L(\mathbb{R})$. Рассмотрим простейшую задачу теплопроводности:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x,0) = \psi(x). \end{cases}$$

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $a > 0$. Решим задачу теплопроводности. Для этого применим преобразование Фурье к задаче теплопроводности к обоим частям, т.е. умножим оба равенства на $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\lambda x}$ и проинтегрируем по переменной x:

$$\begin{cases} F_{u'_t} = a^2F_{u''_{xx}}, \\ F_{u(x,0)} = F_{\psi(x)}. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (F_u)'_t = -a^2\lambda^2F_u, \\ F_{u(x)}\big|_{t=0} = F_\psi. \end{cases}$$

Решением данного дифференциального уравнения первого порядка будет

$$F_u = F_\psi e^{-a^2\lambda^2 t}.$$

Применим обратное преобразование Фурье к полученному уравнению, т.е. умножим оба равенства на $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\lambda x}$ и проинтегрируем по переменной λ:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} F_\psi e^{-a^2\lambda^2 t}\cdot e^{i\lambda x}\,d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\psi(\xi)e^{-a^2\lambda^2 t+i\lambda x-i\lambda\xi}\,d\xi\right)d\lambda \overset{\text{б/д}}{=}$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\psi(\xi)\int_{\mathbb{R}}e^{-\theta^2(\lambda)}\cdot e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\,d\lambda\,d\xi = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{\mathbb{R}}\psi(\xi)e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,d\xi = \int_{\mathbb{R}}\psi(\xi)G(x,t,\xi)\,d\xi$$

где $\theta(\lambda) = a\sqrt{t}\lambda + \frac{i(\xi-x)}{2a\sqrt{t}}$, а $G(x,t,\xi) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2t}}$ — функция Грина уравнения теплопроводности. □

Если $f(x)$ – чётная, действительнозначначная функция, то:

Определение 8.5.1. Определим прямое и обратное косинус преобразоване Фурье

$$F^c(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} f(t)\cos\lambda t\,dt \text{ — прямое косинус преобразование Фурье,}$$

$$(F^c_g)^{-1}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} g(\lambda)\cos\lambda x\,d\lambda \text{ — обратное косинус преобразование Фурье.}$$

Аналогично вводится прямое и обратное синус преобразоване Фурье

$$F^s(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} f(t)\sin\lambda t\,dt \text{ — прямое синус преобразование Фурье,}$$

$$(F^s_g)^{-1}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} g(\lambda)\sin\lambda x\,d\lambda \text{ — обратное синус преобразование Фурье.}$$

Теорема 8.5.1 (Формула обращения)**.** *Пусть $f \in L(\mathbb{R})$ и $f \in \ \mathrm{Var}_x \bigcap C(x)$. Тогда справедливо*

$$1.\ f(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_0^{+\infty} f(t)\cos\lambda t\,dt \right) \cos\lambda x\,d\lambda$$

$$2.\ f(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_0^{+\infty} f(t)\sin\lambda t\,dt \right) \sin\lambda x\,d\lambda$$

$$3.\ f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\lambda t}\,dt \right) e^{i\lambda x}\,d\lambda.$$

Т.е. иными словами применяя прямое, а затем обратное преобразование Фурье (обычное, косинус или синус преобразование Фурье) к функции $f(x)$ мы получим исходное значение функции f в точке x.

Свойство 3 в теореме обращения в действительной области, при тех же условиях на функцию $f(x)$, аналогично запишется в следующем виде:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \cos\lambda x \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)\cos\lambda t\,dt\,d\lambda + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \sin\lambda x \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)\sin\lambda t\,dt\,d\lambda,$$

что равносильно

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} a(\lambda)\cos\lambda x\,d\lambda + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} b(\lambda)\sin\lambda x\,d\lambda,$$

где

$$a(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)\cos\lambda t\,dt;$$

$$b(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)\sin\lambda t\,dt.$$

Глава 9

Интегральное исчисление функций многих переменных.

9.1 Кратный интеграл. Критерий Лебега.

9.1.1 Определение, условия интегрируемости

Введём понятие многомерного прямоугольника (бруса) в пространстве $\mathbb{R}^d$:

$$I = [\vec{a}, \vec{b}] = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^d : \ a_k \leqslant x_k \leqslant b_k, \ k = 1, \ldots, d\}.$$

Параметр разбиения $\lambda(P)$

$$\lambda(P) = \max_{k=1,\ldots,N} \operatorname{diam}(\Delta_k),$$

где $\operatorname{diam}(\Delta_k) = \sup_{x_1,x_2 \in \Delta k} |\vec{x_1} - \vec{x_2}|$. Объёмом d - мерного прямоугольника назовём величину $\mu(I) = \prod_{k=1}^{d}(b_k - a_k)$. Интегральной суммой функции $f(x)$, определённой на I с разбиением P и отмеченными точками ξ назовём величину:

$$\sigma(f, (P, \xi)) = \sum_{k=1}^{N} f(\vec{\xi_k}) \mu(\Delta_k).$$

Здесь $\xi = (\xi_1, \ldots \xi_N)$, $\xi_k \in \Delta_k$, $k = 1, \ldots, N$.

Определение 9.1.1. Пусть $I \subset \mathbb{R}^d$ будет d -мерный брус.

$$f \in \mathcal{R}(I), \text{ если } \exists \text{ и конечен } \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f, (P, \xi)) = \int\limits_I f(\vec{x}) d\vec{x}$$

Теорема 9.1.1 (Критерий Коши)**.** *Пусть $I \subset \mathbb{R}^d$ будет d -мерный брус.*

$$f \in \mathcal{R}(I) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \ \forall (P_1, \xi_1), (P_2, \xi_2) \ : \ \lambda(P_{1,2}) < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\sigma(f, (P_1, \xi_1)) - \sigma(f, (P_2, \xi_2))| < \epsilon.$$

Теорема 9.1.2 (Необходимый признак интегрируемости)**.** *Пусть $I \subset \mathbb{R}^d$ будет d -мерный брус.*

$$f \in \mathcal{R}(I) \Rightarrow f \text{ - ограничена на } I.$$

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{R}(I)$ и неограничена. Рассмотрим разбиение $I = \bigcup_{k=1}^{N} I_k$. Возьмём произвольный набор точек ξ. Хотя бы на одном I_l функция f — неограничена. Поэтому можно выбрать ξ^* так, чтобы $|f(\vec{\xi_l}) - f(\vec{\xi^*})|\mu(I_l) > 1$. Второй набор $\tilde{\xi}$ определим следующим образом

$$\tilde{\xi} = \begin{cases} \vec{\xi_k}, \ k = 1, \dots, n\backslash\{l\} \\ \vec{\xi^*}, \ k = l \end{cases}$$

Тогда справедливо

$$|\sigma(f,(P,\xi)) - \sigma(f,(P,\tilde{\xi}))| = |f(\vec{\xi_l}) - f(\vec{\xi^*})|\mu(I_l) > 1.$$

Получили противоречие о том, что исходная функция интегрируема (по критерию Коши). □

Определение 9.1.2. A — множество лебеговой меры 0 в $\mathbb{R}^d$, если выполнено
Для любого $\forall\epsilon > 0$ существует не более чем счётный набор d — мерных промежутков $\exists I_k$, $k = 1, \dots,$ таких что

1. $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{+\infty} I_k$.
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_k) < \epsilon$.

Примеры 9.1.1.

1. $A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^d \colon x_k \in \mathbb{Q},\ k = 1, \dots, d\}$,
2. $\Gamma_f = \{(x, f(x)), x \in [a,b]\} \subset \mathbb{R}^d$, $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^{d-1}$ — непрерывная функция на отрезке $[a,b]$. Из $f \in C[a,b] \Rightarrow f \in UC[a,b]$, т.е. $f(x)$ равномерно непрерывная на этом отрезке функция. Т.е. выполнено
$$\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in [a,b], |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon.$$
Для $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_{d-1}(x))$ и разбиения $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ с условием $\max_{k=1,\dots,N} |x_k - x_{k-1}| < \delta$ и произвольного набора $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ введём множества
$$I_k = [x_{k-1}, x_k] \times [f_1(\xi_k) - \epsilon; f_1(\xi_k) + \epsilon] \times \dots \times [f_{d-1}(\xi_k) - \epsilon; f_{d-1}(\xi_k) + \epsilon].$$
Тогда $\Gamma_f \subseteq \bigcup_{k-1}^{N} I_k$, и $\sum_{k=1}^{N} \mu(I_k) \leqslant \delta(2\epsilon)^{d-1}$, т.е. множество Γ_f — множество d - мерной меры нуль.
3. Аналогично можно показать, что множество $\Gamma_f = \{(\vec{x}, f(\vec{x})), \vec{x} \in I^{d-1}\}$ — множество d-мерной лебеговой меры 0, где $f : \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}$ и $f \in C(I^{d-1})$.

Теорема 9.1.3 (Критерий Лебега). *Пусть $I \subset \mathbb{R}^d$ будет d -мерный брус.*

$$f \in \mathcal{R}(I) \Leftrightarrow \begin{array}{l} f \text{ - ограничена на } I \\ f \text{ - непрерывна почти всюду на } I \end{array}$$

Доказательство. Аналогично доказательству для функций одной переменной. □

9.1.2 Суммы Дарбу.

Определение 9.1.3. Пусть P — произвольное разбиение промежутка I. Величины

$$s(f,P) = \sum_{k=1}^{N} m_k \mu(I_k), \qquad S(f,P) = \sum_{k=1}^{N} M_k \mu(I_k),$$

где $m_k = m_k(f) = \inf_{x \in I_k} f(x)$, $M_k = M_k(f) = \sup_{x \in I_k} f(x)$, назовём нижней и верхней интегральной суммой

Дарбу. А величины

$$\underline{J} = \sup_P s(f, P), \qquad \overline{J} = \inf_P S(f, P),$$

назовём нижним и верхним интегралом Дарбу.

Лемма 56. *1.* $s(f,P) = \inf_\xi \sigma(f,(P,\xi)) \leqslant \sigma(f,(P,\xi)) \leqslant \sup_\xi \sigma(f,(P,\xi)) = S(f,P)$.

2. Пусть P — произвольное разбиение, P' — его продолжение. Тогда

$$s(f,P) \leqslant s(f,P') \leqslant \sigma(f,(P',\xi)) \leqslant S(f,P') \leqslant S(f,P).$$

3. Пусть P_1, P_2 — произвольные разбиения. Тогда $s(f,P_1) \leqslant S(f,P_2)$.

Доказательство. Поскольку утверждения 1 и 2 леммы очевидны, то остаётся доказать лишь третье утверждение. Введём продолжение разбиений $P = P_1 \cup P_2$. Тогда $s(f,P_1) \leqslant s(f,P) \leqslant S(f,P) \leqslant S(f,P_2)$. □

Лемма 57. *Пусть $I \subset \mathbb{R}^d$ будет d -мерный брус. Для любой ограниченной функции $f: I \mapsto \mathbb{R}$, например $|f(x)| \leqslant M$, справедливо*

1. *Существует конечный* $\lim_{\lambda(P)\to 0} s(f,P)$ *и* $\lim_{\lambda(P)\to 0} s(f,P) = \underline{J}$.

2. *Существует конечный* $\lim_{\lambda(P)\to 0} S(f,P)$ *и* $\lim_{\lambda(P)\to 0} S(f,P) = \overline{J}$.

Доказательство. Докажем существование предела. Зафиксируем произвольное $\epsilon > 0$, выберем разбиение P_ϵ удовлетворяющие условию $s(f,P_\epsilon) > \underline{J} - \epsilon$. Обозначим через Γ_ϵ — совокупность точек промежутка I, лежащих на границе разбиения P_ϵ. В силу простоты множества Γ_ϵ (задаётся уравнениями вида $x_k = Const$, а следовательно из примера вытекает, что множество Γ_ϵ имеет меру нуль) для любого разбиения $P = \bigcup_{k=1}^N I_k$ существует $\delta_\epsilon > 0$ такое, что из $\lambda(P) < \delta_\epsilon$ вытекает $\sum_{k: I_k \cap \Gamma_\epsilon \neq \emptyset} \mu(I_k) < \epsilon$. Пусть P — произвольное разбиение с $\lambda(P) < \delta_\epsilon$. Положим $P' = P \cup P_\epsilon$. Из свойств сумм Дарбу находим

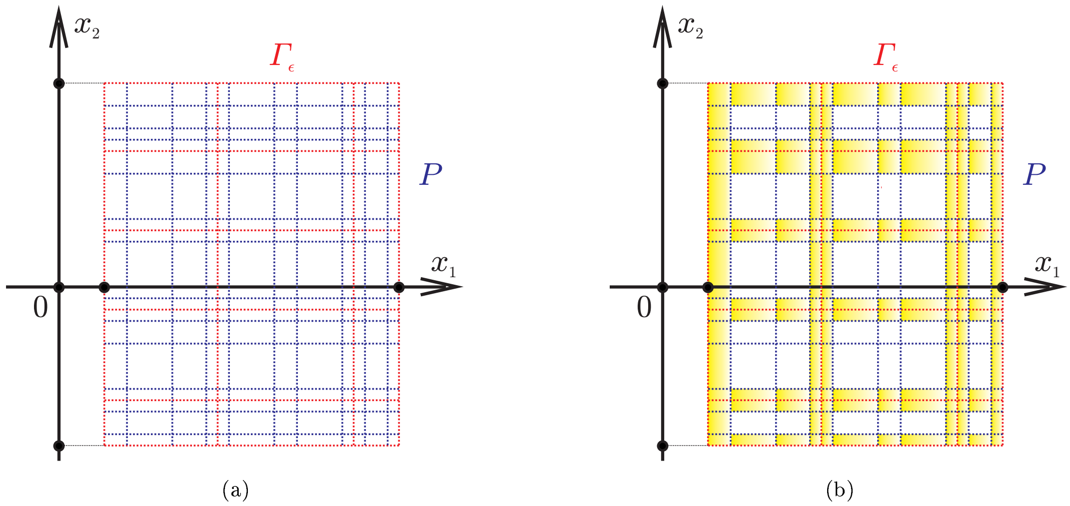


Рис. 9.1: (a): Разбиения Γ_ϵ и P; (b):

$$\underline{J} \geqslant s(f,P') \geqslant s(f,P_\epsilon) > \underline{J} - \epsilon.$$

Т.к. у P' и P все общие промежутки разбиения, кроме промежутков содержащих границу Γ_ϵ (на рисунке 9.1(b) эти промежутки выделены жёлтым цветом), то

$$|s(f,P') - s(f,P)| < 2M\epsilon.$$

Откуда окончательно получаем

$$\underline{J} - s(f,P) = \underline{J} - s(f,P') + s(f,P') - s(f,P) \leqslant (2M+1)\epsilon.$$

Оценка $0 \leqslant \underline{J} - s(f,P) \leqslant (2M+1)\epsilon$ доказывает как существование предела $\lim_{\lambda(P)\to 0} s(f,P)$, так и его равенство $\underline{J}$. Для верхних сумм Дарбу рассуждения проводятся аналогично. □

Теорема 9.1.4 (Критерий интегрируемости в терминах сумм Дарбу)**.** *Пусть $I \subset \mathbb{R}^d$ будет d -мерный брус.*

$$f \in \mathcal{R}(I) \Leftrightarrow f \text{ - ограничена, на } I \text{ и } \underline{J} = \overline{J}$$

Доказательство. $\Rightarrow$**.** Из интегрируемости $f \in \mathcal{R}(I)$ вытекает ограниченность функции на I. Из оценки

$$\inf_{\xi} \sigma(f,(P,\xi)) = s(f,P) \leqslant \underline{J} = \sup_{P} s(f,P) \leqslant \sigma(f,(P,\xi)) \leqslant \overline{J} = \inf_{P} S(f,P) \leqslant S(f,P) = \sup_{\xi} \sigma(f,(P,\xi))$$

вытекает существование и равенство величин $\underline{J}$, $\overline{J}$.

$\Leftarrow$**.** Пусть $\underline{J} = \overline{J}$. Тогда по предыдущей лемме 57 получаем

$$\begin{array}{ccc} s(f,P) & < \sigma(f,(P,\xi)) < & S(f,P) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{J} & & \overline{J} \end{array}$$

А из ограниченности функции f вытекает, что величины $\underline{J} = \overline{J}$ конечны.

□

Определение 9.1.4. Будем говорить, что множество $E \subset \mathbb{R}^d$ — *квадрируемое множество*, если выполнены следующие свойства:
1) E - ограниченное множество;
2) ∂E — множество Лебеговой меры нуль (d-мерная мера).

П р и м е р 9.1.1.
1) Шар: $\{x \in \mathbb{R}^d : |\overrightarrow{x}| \leqslant R\}$
2) Параллелепипед: $\{x \in \mathbb{R}^d : |x_k| \leqslant a_k \ \forall k = 1,\dots,d, \ a_k > 0\}$
3) $\{x \in [0;1]^d : \ x_k \in \mathbb{Q}, k = 1,\dots,d\}$ - не квадрируемое множество

Замечание 78. Поскольку ∂E — замкнутое множество, а в определении квадрируемости требовали ограниченность $\Rightarrow \partial E$ — компакт (если E - квадрируемое множество).

Определение 9.1.5 (Интегрирование по ограниченному множеству Ω)**.** Пусть Ω множество из $\mathbb{R}^d$, а I — произвольный промежуток из $\mathbb{R}^d$ содержащий множество Ω. Тогда

$$\int\limits_{\Omega} f(x)dx = \int\limits_{I} f(x)X_{\Omega}(x)dx,$$

где $X_{\Omega}(x)$ характеристическая функция множества Ω, т.е.

$$X_{\Omega}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega, \\ 0, & x \notin \Omega. \end{cases}$$

Определение 9.1.6 (Мера Жордана)**.** Будем говорить, что множество E *измеримо по Жордану*, если существует конечный интеграл

$$\mu(E) = \int_E 1dx,$$

который мы назовём мерой Жордана.

Определение 9.1.7. Если при $\forall\epsilon > 0$ существует набор прямоугольных параллелепипедов $I_k : k = 1, \dots, n$, таких, что
1) $E \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} I_k$
2) $\sum_{k=1}^{n} \mu(I_k) < \epsilon$
то множество E — *множество меры* 0 *по Жордану.*

Замечание 79. Пусть $E \subseteq I$ некоторое подмножество бруса. Тогда $\int\limits_E dx = \int\limits_I \chi_E(x)dx$ — существует, только если функция $\chi_E(x)$ непрерывна почти всюду, т.к. ограниченность характеристической функции очевидна. Поскольку точки разрыва функции $\chi_E(x)$ совпадают с множеством граничных точек ∂E, то существование интеграла $\int\limits_E dx$ равносильно тому, что мера Лебега ∂E равна нулю. Но поскольку ∂E замкнуто (а следовательно ∂E компакт), то у множества ∂E мера Жордана также равна нулю.

Из сказанного выше вытекает, что множество E — измеримо по Жордану $\Leftrightarrow$ E — ограничено, ∂E имеет лебегову меру нуль.

Теорема 9.1.5.

$$E \text{ - измеримо по Жордану} \Leftrightarrow \begin{array}{l} E \text{ - ограничено в } \mathbb{R}^d \\ \partial E \text{ - Жорданова мера } 0 \end{array}$$

Таким образом квадрируемые множества являются измеримыми по Жордану и наоборот.

Теорема 9.1.6 (Сведение к повторному интегралу (теорема Фубини))**.**

$$I = I_x \times I_y \subset \mathbb{R}^d, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^d,\ x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^{d-m}$$

Если $f \in \mathcal{R}(I)$, тогда

$$\int\limits_I f(x,y)dxdy \quad \int\limits_{I_x} \left(\int\limits_{I_y} f(x,y)dy \right) dx \quad \int\limits_{I_y} \left(\int\limits_{I_x} f(x,y)dx \right) dy$$

$$\exists \text{ и равны между собой}$$

Доказательство. Положим $F(x)=\int\limits_{I_y} f(x,y)dy$.

$$s(f,P)=\sum_{\substack{k_1=1,\dots,n_1\\k_2=1,\dots,n_2}}\inf_{(x,y)\in\Delta_x^{k_1}\times\Delta_y^{k_2}} f(x,y)\mu(\Delta_x^{k_1})\mu(\Delta_y^{k_2})\leqslant\sum_{k_1=1}^{n_1}\inf_{x\in\Delta_x^{k_1}}(\sum_{k_2=1}^{n_2}\inf_{\Delta_y^{k_2}} f(x,y)\mu(\Delta_y^{k_2})\mu(\Delta_x^{k_1}))\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k_1=1}^{n_1}\inf_{x\in\Delta_x^{k_1}}(\underline{\int} f(x,y)dy)\mu(\Delta_x^{k_1})\leqslant\sum_{k_1=1}^{n_1}\inf_{x\in\Delta_x^{k_1}}F(x)\mu(\Delta_x^{k_1})\leqslant\sum_{k_1=1}^{n_1}\sup_{x\in\Delta_x^{k_1}}F(x)\mu(\Delta_x^{k_1})\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k_1=1}^{n_1}\sup_{x\in\Delta_x^{k_1}}(\overline{\int_{I_y}} f(x,y)dy)\mu(\Delta_x^{k_1})\leqslant\sum_{k_1=1}^{n_1}\sup_{\Delta_x^{k_1}}(\sum_{k_2=1}^{n_2}\sup_{\Delta_y^{k_2}} f(x,y)\mu(\Delta_y^{k_2})\mu(\Delta_x^{k_1}))\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k_1=1}^{n_1}\sum_{k_2=1}^{n_2}(\sup_{(x,y)\in\Delta_x^{k_1}\times\Delta_y^{k_2}} f(x,y))\mu(\Delta_y^{k_2})\mu(\Delta_x^{k_1})=S(f,P).$$

Поскольку по критерию Дарбу крайнее выражение в левой и правой части в неравенствах стремится к одному и тому же пределу, а именно интегралу, то и суммы которые являются нижней и верхней суммой Дарбу для $\int\limits_{I_x}\left(\int\limits_{I_y} f(x,y)dy\right)dx$. В другом порядке аналогично. □

Следствие 9.1.1. Пусть D квадрируемое множество в $\mathbb{R}^{d-1}$, $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^d:\ (x\in D)\wedge(\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x))\}$, где $\varphi_{1,2}(x)\in C(D)$. Если $f\in\mathcal{R}(\Omega)$, то

$$\int_\Omega f(x,y)\,dxdy=\int_D dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

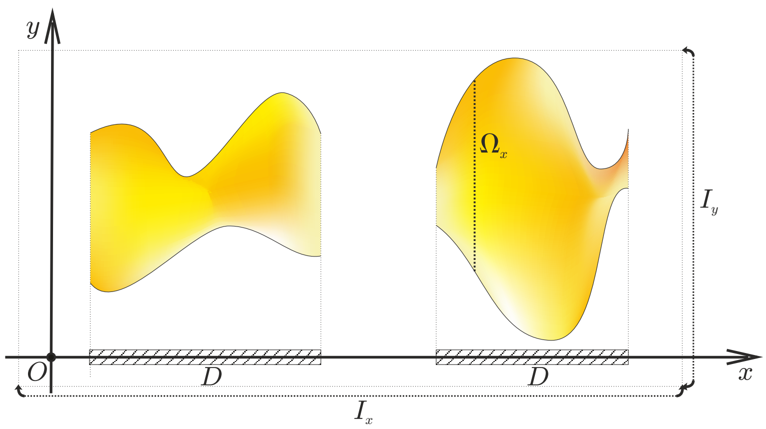


Рис. 9.2: К следствию из теоремы Фубини.

Доказательство. Положим

$$\Omega_x=\begin{cases}\{(x,y)\in\mathbb{R}^d:\ \varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x)\}, & \text{если } x\in D;\\ 0, & \text{если } x\notin D.\end{cases}$$

Из равенства $\chi_\Omega(x,y)=\chi_D(x)\cdot\chi_{\Omega_x}(y)$ и теоремы Фубини получаем:

$$\int_\Omega f(x,y)\,dxdy=\int_{I\supset\Omega} f(x,y)\cdot\chi_\Omega(x,y)\,dxdy=$$
$$=\int_{I_x\supset D}dx\int_{I_y\supset\Omega_x} f(x,y)\cdot\chi_\Omega(x,y)\,dy=\int_{I_x}\left(\int_{I_y} f(x,y)\cdot\chi_{\Omega_x}(y)\,dy\right)\chi_D(x)\,dx=$$
$$=\int_{I_x}\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)\chi_D(x)\,dx=\int_D dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

□

П р и м е р 9.1.2. Найти $\iint_D(x+y)dxdy$, где D — треугольник $\triangle OAB$, заданный своими координатами точек $O(0;0)$, $A(1;0)$, $B(0;1)$ (см. рис. 9.3).

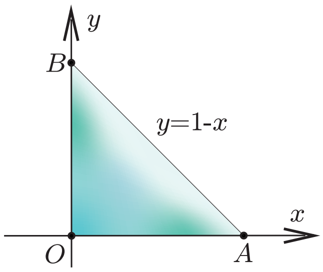


Рис. 9.3: Множество интегрирования.

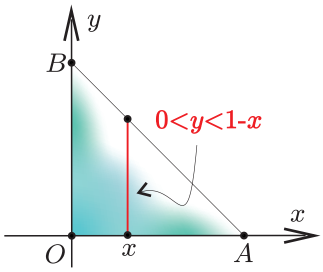


Рис. 9.4: Пределы интегрирования.

Доказательство. В этом случае $a=0$, $b=1$, $\varphi_1(x)=0$, $\varphi_2(x)=1-x$ (уравнение прямой, проходящей через точки A и B имеет вид $y=1-x$ (см. рис. 9.4)). Поэтому

$$\iint_D(x+y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x+y)dy$$

Отдельно вычислим $\int_0^{1-x}(x+y)dy$. Т.к. $\int(x+y)dy=xy+\frac{y^2}{2}+C$, то

$$\int_0^{1-x}(x+y)dy=\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{1-x}=x(1-x)+\frac{(1-x)^2}{2}=x-x^2+\frac{1-2x+x^2}{2}=\frac{1-x^2}{2}.$$

Значит,

$$\int_0^1 F(x)dx=\int_0^1\frac{1-x^2}{2}dx=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}.$$

Итак,

$$\iint_D(x+y)dxdy=\frac{1}{3}.$$

□

П р и м е р 9.1.3. Используя теорему Фубини, свести интеграл $\iint_D f(x,y)dxdy$ к повторному двумя способами: сначала расставив пределы интегрирования в порядке $dx\,dy$, затем $dy\,dx$. Здесь D множество, ограниченное кривыми: $x^2+(y-1)^2=1$, $\frac{x^2}{2^2}+(y-1)^2=1$ расположенное в первом октанте.

Доказательство. Множество D изображенно на рисунке 9.5.

1. Применим теорему Фубини, так, чтобы интегрирование было по переменной y, а затем по переменной x. Определим минимальное и максимальное значение переменной y: это 0 и 2. Зафиксируем произвольное $0<y<2$ (см. рис. 9.6) тогда переменная x меняется в пределах $\varphi_1(y)=\sqrt{1-(1-y)^2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2(1-(1-y)^2)}=\varphi_2(y)$. Таким образом

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_0^2 dy\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\,dx.$$

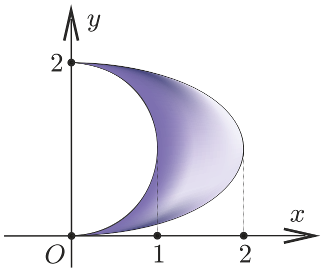


Рис. 9.5: Множество интегрирования.

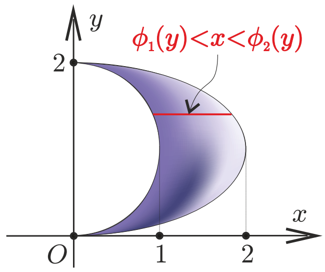


Рис. 9.6: Пределы интегрирования.

2. Теперь применим теорему Фубини, так, чтобы интегрирование было по переменной x, а затем по переменной y. В этой ситуации уже записать одним повторным интегралом не удается (см. рис. 9.7). Обозначим через

$$\psi_1(x) = 1 + \sqrt{1-x^2}, \quad \psi_4(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}, \quad \psi_2(x) = \left(1 + \sqrt{1 - \frac{x^2}{2^2}}\right), \quad \psi_3(x) = \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{2^2}}\right).$$

Тогда исходный интрерграл можно записать через три повторных интеграла в следующем виде:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)\,dy + \int_0^1 dx \int_{\psi_3(x)}^{\psi_4(x)} f(x,y)\,dy + \int_1^2 dx \int_{\psi_3(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

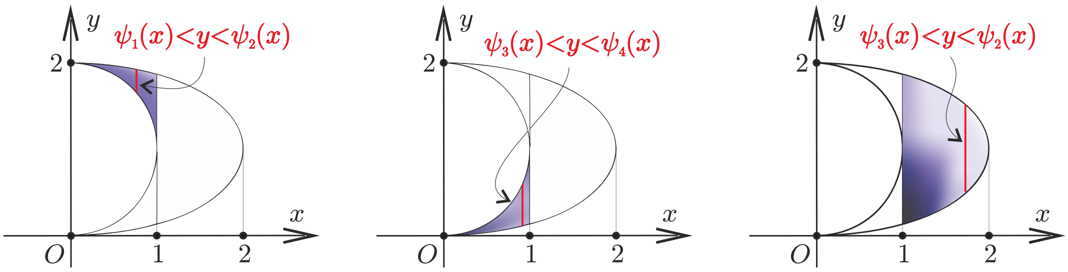


Рис. 9.7: Пределы интегрирования.

□

9.1.3 Замена переменных.

1) Пусть отображение F открытого множества $G_{u,v} \subset R^2_{u,v}$ на открытое множество $G_{x,y} \subset R^2_{x,y}$ являются взаимно-однозначным отображением множеств $G_{x,y}$ и $G_{u,v}$. (это означает, что каждой точке $(u,v) \in G_{u,v}$ соответсвует вполне определяется точка (x,y) и что для каждой точки $(x,y) \in G_{x,y}$ существует единственная точка $(u,v) \in G_{u,v}$ такая, что

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v). \end{cases}$$

2) Отображение непрерывно дифференцируемое

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v). \end{cases} \in C^1(G_{u,v}),$$

т.е. функции $x(u,v)$, $y(u,v)$, $\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)$, $\frac{\partial x}{\partial v}(u,v)$, $\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)$, $\frac{\partial y}{\partial v}(u,v)$ непрерывны в $G_{u,v}$. При данных предположениях функции $x(u,v)$, $y(u,v)$ являются дифференцируемыми в точке (u_0,v_0) внутренней к множеству

$G_{u,v}$

$$\begin{cases} x(u,v) = x(u_0,v_0) + x'_u|_{(u_0,v_0)}(u-u_0) + x'_v|_{(u_0,v_0)}(v-v_0) + o\left(\sqrt{(u-u_0)^2+(v-v_0)^2}\right), \\ y(u,v) = y(u_0,v_0) + y'_u|_{(u_0,v_0)}(u-u_0) + y'_v|_{(u_0,v_0)}(v-v_0) + o\left(\sqrt{(u-u_0)^2+(v-v_0)^2}\right). \end{cases}$$

Рассмотрим вспомогательное отображение $\tilde{F}$:

$$\begin{cases} \tilde{x}(u,v) = x(u_0,v_0) + x'_u|_{(u_0,v_0)}(u-u_0) + x'_v|_{(u_0,v_0)}(v-v_0) \\ \tilde{y}(u,v) = y(u_0,v_0) + y'_u|_{(u_0,v_0)}(u-u_0) + y'_v|_{(u_0,y_0)}(v-v_0) \end{cases}$$

Поскольку данное отображение линейное, то образ любого параллелограмма будет параллелограммом. Рассмотрим квадрат Δ с вершинами в точках A, B, C, D образом которого является параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$ (см.рис. (9.8)). Найдём площадь параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$:

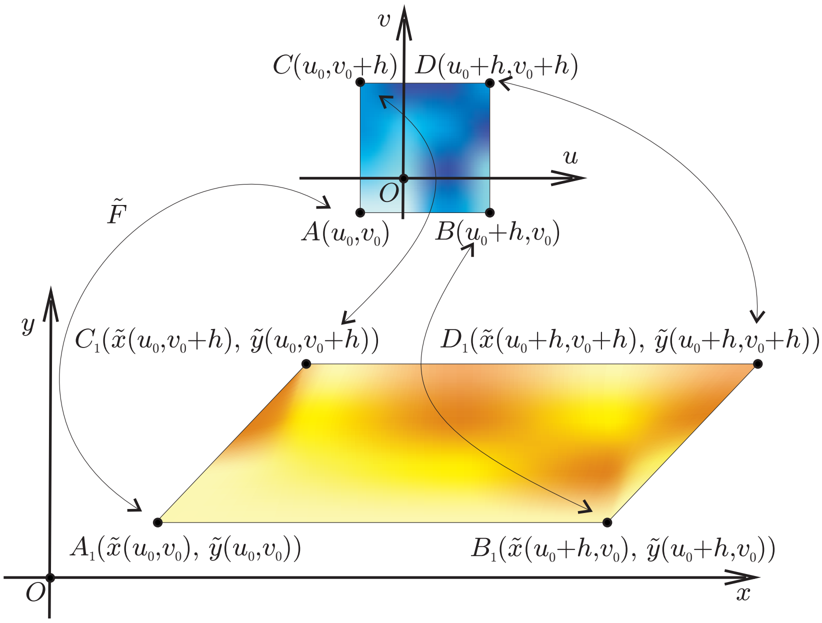


Рис. 9.8: Отображение $\tilde{x}$, $\tilde{y}$.

$$\mu(\tilde{F}(\Delta)) = |\overrightarrow{A_1B_1} \times \overrightarrow{A_1C_1}| = \left|\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}\right|_{(u_0,v_0)} h^2,$$

поскольку $\mu(\Delta) = h^2$, то получаем $\frac{\mu(\tilde{F}(\Delta))}{\mu(\Delta)} = |J|$, где

$$J = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}.$$

Лемма 58. *1) Пусть $G_{u,v} \xrightarrow{F} G_{x,y}$ взаимооднозначное отображение класса C^1 (т.е. непрерывно дифференцируемое отображение) открытых множеств $G_{u,v}$, $G_{x,y}$ друг на друга. Пусть Δ — произвольный квадрат с вершинами $(u_0; v_0)$, $(u_0 + h; v_0)$, $(u_0; v_0 + h)$, $(u_0 + h; v_0 + h)$ такой, что $\overline{\Delta} \subset G_{u,v}$. Тогда для точки (u_0, v_0) внутренней к $G_{u,v}$, справедлива оценка*

$$\frac{\mu(F(\Delta))}{\mu(\Delta)} = |J(u_0,v_0)| + \epsilon(u_0,v_0,h),$$

где функция $\epsilon(u_0, v_0, h)$ равномерно относительно (u_0, v_0) на любом компакте $K \subset G_{u,v}$ стремится к 0 при $h \to 0$ (здесь предполагается, что $\Delta \subset K$).

Данную лемму мы оставим без доказательства.

Теорема 9.1.7 (О замене переменного (переход от переменных (x, y) к переменным (u, v))). *1) Пусть $G_{u,v} \xrightarrow{F} G_{x,y}$ взаимооднозначное непрерывно дифференцируемое отображение открытых множеств $G_{u,v}$, $G_{x,y}$ друг на друга.*
2) Пусть D — квадрируемое и замкнутое множество, причём $\overline{D} \subset G_{u,v}$, D^* — множество полученное при отображении F. Тогда D^* — квадрируемое и замкнутое множество и $\overline{D^*} \subset G_{x,y}$.
3)

$$J = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall (u, v) \in G_{u,v}.$$

4) $f(x, y) \in \mathcal{R}(D^*)$, где $D^* = F(D)$. Тогда

$$\iint\limits_{D^*} f(x, y) dx dy = \iint\limits_{D} f(x(u, v), y(u, v)) \cdot |J| du dv.$$

Замечание 80. Теорема останется верна, если условия взаимной одназначности отображения D на D^* и $J \neq 0$ не будут выполнены для множества точек, лежащих на конечном числе непрерывных кривых.

Доказательство. Рассмотрим разбиение на плоскости $\mathbb{R}^2_{u,v}$ равномерной сеткой по переменным x и y с шагом $h = h_k \to 0, k \to \infty$ $(h_k = \frac{1}{2^k})$. Полученные квадраты обозначим Δ_l. Из $\overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P_2} \in \Delta_l$ следует, что $|\overrightarrow{P_1} - \overrightarrow{P_2}| \leqslant \sqrt{2} h_k$. Обозначим $\overrightarrow{M_1} = F(\overrightarrow{P_1}) = (x_1, y_1)$, $\overrightarrow{M_2} = F(\overrightarrow{P_2}) = (x_2, y_2)$. Тогда

$$|\overrightarrow{M_1} - \overrightarrow{M_2}| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \leqslant \sqrt{\omega^2(x, \sqrt{2}h) + \omega^2(y, \sqrt{2}h)} \to 0, \quad (h \to 0)$$

модуль непрерывности от непрерывной функции стремится к нулю в силу равномерной непрерывности на

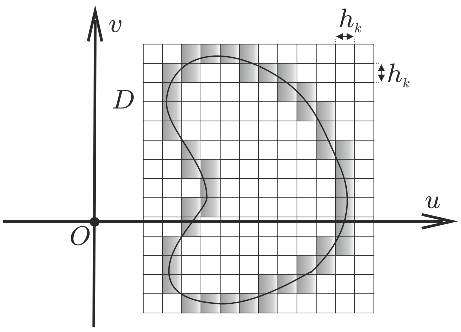


Рис. 9.9: $\Delta_l \cup \partial D \neq \varnothing$

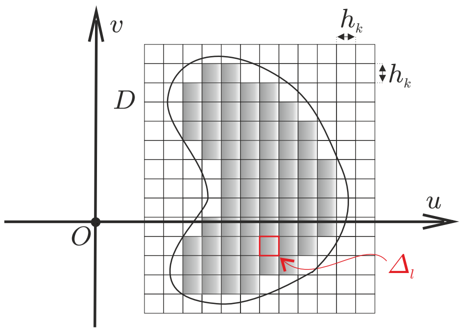


Рис. 9.10: $\Delta_l \subset D$

компакте. Поскольку D — квадрируемое множество, то граница ∂D — множество меры нуль. Следовательно, площадь всех квадратов Δ_l разбиения, пересекающиеся с границей D при увеличении k стремятся к нулю. Поэтому будем рассматривать только те квадраты Δ_l разбиения, целиком лежат в D.

$$\sum_{l:\Delta_l \subset D} f(\xi_l, \eta_l) \mu(\underbrace{F(\Delta_l)}_{\Delta_l^*}) = \sum_{l:\Delta_l^* \subset D^*} f(\xi_l, \eta_l) \mu(\Delta_l^*) \to \iint\limits_{D^*} f(x, y) dx dy, \quad k \to +\infty, (h_k \to 0),$$

где $(u_l, v_l) \in \overrightarrow{\Delta_l}$ и $\begin{cases} \xi_l = x(u_l, v_l), \\ \eta_l = y(u_l, v_l). \end{cases}$. Множество всех квадратов целиком лежащих в D является компактом, поэтому из предыдущей леммы следует.

$$\sum = \sum_{l:\Delta_l \subset D} f(x(u_l,v_l), y(u_l,v_l)) \left(|J(u_l,v_l)|\mu(\Delta_l) + \varepsilon(u_l,v_l,h_k)\mu(\Delta_l)\right) = \sum\nolimits^1 + \sum\nolimits^2 .$$

Оценим каждый из интегралов:

$$\sum\nolimits^1 \to \iint_D f(x(u,v), y(u,v))|J|dudv, \quad k \to +\infty, (h_k \to 0).$$

В силу предыдущей леммы существует такое $L \in \mathbb{N}$, что для любого $k \geqslant L$ будет выполнено $|\varepsilon(u_l,v_l,h_k)| \leqslant \frac{\varepsilon}{C\mu(D)}$, где в качестве константы C выберем константу из неравенства $|f| \leqslant C$. Поэтому

$$|\sum\nolimits^2| \leqslant \sum |f| \cdot |\varepsilon(u_l,v_l,h_k)\mu(\Delta_l)| \leqslant C \sum |\varepsilon(u_l,v_l,h_k)|\mu(\Delta_l) \leqslant \varepsilon \quad \text{при } k \geqslant L.$$

□

П р и м е р 9.1.4. Полярная система координат (см. рис. 9.11). Пусть

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases}$$

где φ — угол, отсчитываемый в направлении против часовой стрелки, от полярной оси (оси Ox), r — расстояние от начала координат. Таким образом $\varphi \in [-\pi;\pi]$, $r \geqslant 0$. Тогда точка на плоскости (x,y) будет задаваться в полярной системе координат (r,φ). Найдём Якобиан данного отображения

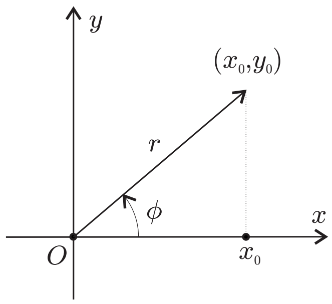


Рис. 9.11: Полярная система координат.

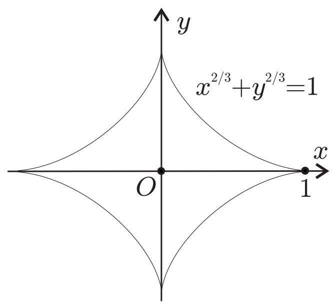


Рис. 9.12: Астроида.

$$\begin{vmatrix} x'_r & y'_r \\ x'_\varphi & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r.$$

Замечание 81. Иногда бывает удобнее вводить обобщённую полярную систему координат заменой вида

$$\begin{cases} x = ar\cos^\alpha\varphi, \\ y = br\sin^\alpha\varphi, \end{cases}$$

где $a, b, \alpha > 0$ с Якобианом равным $J = ab\alpha r\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi$, либо в более общем виде

$$\begin{cases} x = ar^{1/p}\cos^{\alpha/p}\varphi, \\ y = br^{1/q}\sin^{\alpha/q}\varphi, \end{cases}$$

где $a, b, \alpha, p, q > 0$ с Якобианом равным $J = \frac{ab\alpha}{pq} r^{1/p+1/q-1}\cos^{\alpha/p-1}\varphi\sin^{\alpha/q-1}\varphi$.

П р и м е р 9.1.5. Найдём площадь, ограниченную кривой $x^{2/3}+y^{2/3}=1$ (см. рис. 9.12). В обощённой системе координат

$$\begin{cases} x = r\cos^3\varphi, \\ y = r\sin^3\varphi, \end{cases}$$

Якобиан равен $J=3r\cos^2\varphi\sin^2\varphi$, а кривая $x^{2/3}+y^{2/3}=1$ принимает вид $r=1$, $\varphi\in[-\pi,\pi]$. Тогда искомая площадь равна

$$S(D)=\iint_D dx\,dy = 3\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1 r\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi\,dr = 12\int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi\int_0^1 r\,dr =$$
$$= 6\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2(2\varphi)}{2^2}\,d\varphi = \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 4\varphi}{2}\,d\varphi = \frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{8}.$$

П р и м е р 9.1.6. Цилиндрическая система координат (см. рис. 9.13). Пусть (x,y,z) — координаты точки

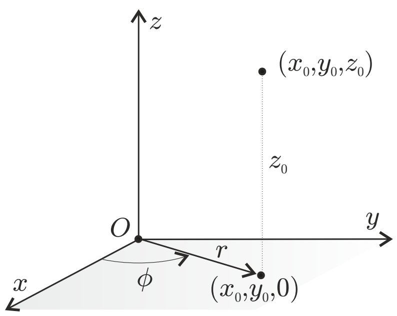


Рис. 9.13: Цилиндрическая система координат.

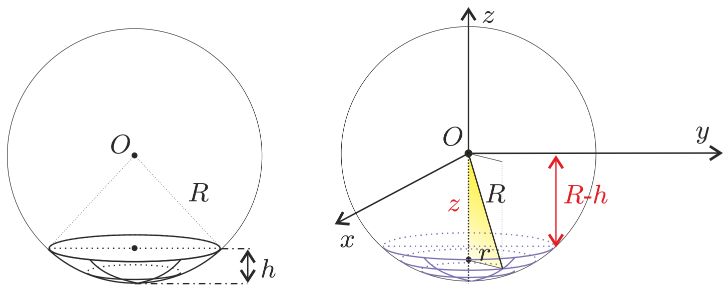


Рис. 9.14: Шаровой сегмент.

в декартовой системе. Положим

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z, \end{cases}$$

где φ — угол между осью Ox, r — расстояние от начала координат до точки $(x,y,0)$ (т.е. расстояние от начала координат до проекции точки (x,y,z) на плоскость Oxy). Таким образом

$$\varphi\in[-\pi;\pi],\quad r\geqslant 0,\quad z\in\mathbb{R}.$$

Тогда точка в пространстве (x,y,z) будет задаваться в цилиндрической системе координат (r,φ,z). Найдём Якобиан данного отображения

$$\begin{vmatrix} x'_r & y'_r & z'_r \\ x'_\varphi & y'_\varphi & z'_\varphi \\ x'_z & y'_z & z'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

П р и м е р 9.1.7. Найдём объём шарового сегмента (см. рис. 9.14). Введём цилиндрическую систему координат. Начало координат поместим в центр шара. В этом случае

$$z\in[-R,-R+h],\quad \varphi\in[-\pi,\pi], r\in[0,\sqrt{R^2-z^2}].$$

Следовательно

$$V=\iiint_V dxdydz = \int_{-R}^{-R+h}dz\int_{-\pi}^{\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} r\,dr = \frac{2\pi}{2}\int_{-R}^{-R+h}(R^2-z^2)dz =$$
$$=\pi\left(R^2z-\frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{-R+h} = \pi\left(R^2h-\frac{1}{3}\left((-R+h)^3-(-R)^3\right)\right)=\pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right).$$

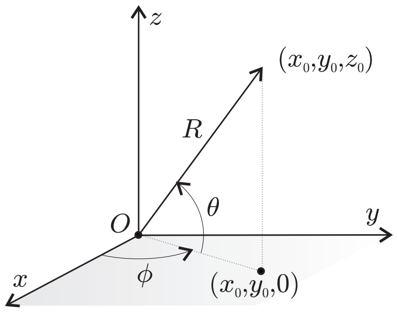


Рис. 9.15: Сферическая система координат.

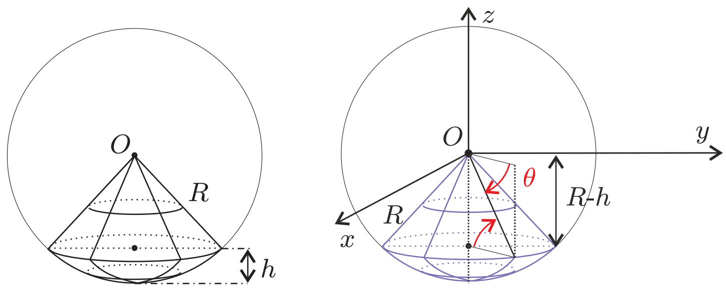


Рис. 9.16: Шаровой сектор.

П р и м е р 9.1.8. Сферическая система координат (см. рис. 9.15). Пусть (x, y, z) — координаты точки в декартовой системе. Положим

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi\cos\theta, \\ y = R\sin\varphi\cos\theta, \\ z = R\sin\theta, \end{cases}$$

где φ — угол между осью Ox, θ — угол между осью Oz радиус вектором, R — расстояние от начала координат. Таким образом

$$\varphi \in [-\pi;\pi], \quad \theta \in [-\pi/2;\pi/2], \quad R \geqslant 0.$$

Тогда точка в пространстве (x, y, z) будет задаваться в сферической системе координат (R, φ, θ). Найдём Якобиан данного отображения

$$\begin{vmatrix} x'_R & y'_R & z'_R \\ x'_\varphi & y'_\varphi & z'_\varphi \\ x'_\theta & y'_\theta & z'_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\theta & \sin\varphi\cos\theta & \sin\theta \\ -R\sin\varphi\cos\theta & R\cos\varphi\cos\theta & 0 \\ -R\cos\varphi\sin\theta & -R\sin\varphi\sin\theta & R\cos\theta \end{vmatrix} = R^2\cos\theta\cdot\begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\theta & \sin\varphi\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ -\cos\varphi\sin\theta & -\sin\varphi\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}.$$

Используя разложение по второй строке найдём последний определитель.

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\theta & \sin\varphi\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ -\cos\varphi\sin\theta & -\sin\varphi\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \sin\varphi\begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\varphi\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} + \cos\varphi\begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\theta & \sin\theta \\ -\cos\varphi\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} =$$

$$= \sin^2\varphi\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} + \cos^2\varphi\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1.$$

Замечание 82. Иногда бывает удобнее вводить обобщённую сферическую систему координат заменой вида

$$\begin{cases} x = aR\cos^\alpha\varphi\cos^\beta\theta, \\ y = bR\sin^\alpha\varphi\cos^\beta\theta, \\ z = cR\sin^\beta\theta, \end{cases}$$

где $a, b, c, \alpha, \beta > 0$ с Якобианом равным $J = abc\alpha\beta R^2\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi\cos^{2\beta-1}\theta\sin^{\beta-1}\theta$, либо в более общем виде

$$\begin{cases} x = aR^{1/p}\cos^{\alpha/p}\varphi\cos^{\beta/p}\theta, \\ y = bR^{1/q}\sin^{\alpha/q}\varphi\cos^{\beta/q}\theta, \\ z = cR^{1/s}\sin^{\beta/s}\theta, \end{cases}$$

где $a, b, c, \alpha, \beta, p, q, s > 0$ с Якобианом равным

$$J = \frac{abc\alpha\beta}{pqs}R^{1/p+1/q+1/s-1}\cos^{\alpha/p-1}\varphi\sin^{\alpha/q-1}\varphi\cos^{\beta/p+\beta/q-1}\theta\sin^{\beta/s-1}\theta.$$

П р и м е р 9.1.9. Найдём объём шарового сектора (см. рис. 9.16). Начало координат поместим в центр шара. В этом случае

$$\varphi \in [-\pi, \pi], \theta \in [-\pi/2, -\arcsin(1-h/R)], r \in [0; R].$$

Следовательно

$$V = \iiint_V dxdydz = \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{-\arcsin(1-h/R)} \cos\theta\, d\theta \int_0^R r^2\, dr =$$

$$= \frac{2\pi}{3} R^3 \sin\theta \Big|_{-\pi/2}^{-\arcsin(1-h/R)} = \frac{2\pi}{3} R^3 \left(-\left(1-\frac{h}{R}\right) - (-1)\right) = \frac{2\pi}{3} R^2 h.$$

Контрольные вопросы.

1. Сформулируйте необходимые и достотачные условия интегрируемости функции на d -мерном брусе.
2. Чему равен Якобиан при переходе от декартовой системы координат к сферической.

Упражнения к 9.1

Упражнение 9.1.1. *Вычислите интеграл*

$$\int_0^1 dy \int_y^1 e^{-x^2}\, dx$$

Ответы: 9.1.1 $\frac{1}{2} - \frac{1}{2e}$. *Указание:* поменяйте порядок интегрирования.

9.2 Несобственный интеграл.

Определение 9.2.1. • Исчерпанием множества $D \subseteq \mathbb{R}^d$ называется последовательность измеримых по Жордану множеств $\{D_n\}_{n=1}^{+\infty}$ обладающих свойствами:

$$1) \quad D_1 \subset D_2 \subset \dots \subset D_n \subset \dots, \quad D_n \subset D,$$
$$2) \quad \forall x \in D : \exists N : x \in D_N, \quad \text{т.е.} \quad D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n.$$

• Будем говорить, что исчерпание $\{D_n\}_{n=1}^{+\infty}$ множества D допустимо для функции $f : D \mapsto \mathbb{R}$, если $f \in R(D_n)$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

П р и м е р 9.2.1. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^2$. Предъявим исчерпания

$$D_n = \{x^2 + y^2 \leqslant n^2\},$$
$$D_n = \{|x| + |y| \leqslant n\},$$
$$D_n = \max\{|x|, |y|\} \leqslant n.$$

Определение 9.2.2. Пусть $\{D_n\}_n^{+\infty}$ — допустимое исчерпание для функции $f(x)$ множества D. Тогда, если существует конечный предел

$$\int\limits_D f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{D_n} f\, dx$$

и предел не зависит от выбора исчерпания, то говорят, что функция $f(x)$ интегрируема в несобственом смысле на множестве D.

Замечание 83. Если найдутся два различных исчерпания D_n, $\tilde{D}_n$ множества D, таких что

$$\begin{matrix} \lim \int\limits_{D_n} f dx = \alpha \\ \lim \int\limits_{\tilde{D}_n} f dx = \beta \end{matrix} \quad \text{и } \alpha \neq \beta,$$

то найдётся такое исчерпание D_n^*, что предел $\lim_{n\to\infty} \int\limits_{D_n^*} f\,dx$ не существует. Поэтому в определении можно заменить условие того, что предел не зависит от выбора исчерпания,на условие того, что нет исчерпания по которому предел не существует.

П р и м е р 9.2.2. Покажем, что определение кратного несобственного интеграла существенно отлично от определения одномерного несобственного интеграла. Определим функцию $f(x)$ таким образом, чтобы площадь на каждом участке $[n; n+1]$ была бы равной нулю (см. рис. (9.17))

$$f(x) = \begin{cases} 1/n, & x \in [n-1, n-1/2), \\ -1/n, & x \in [n-1/2, n), \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Справедливо равенство

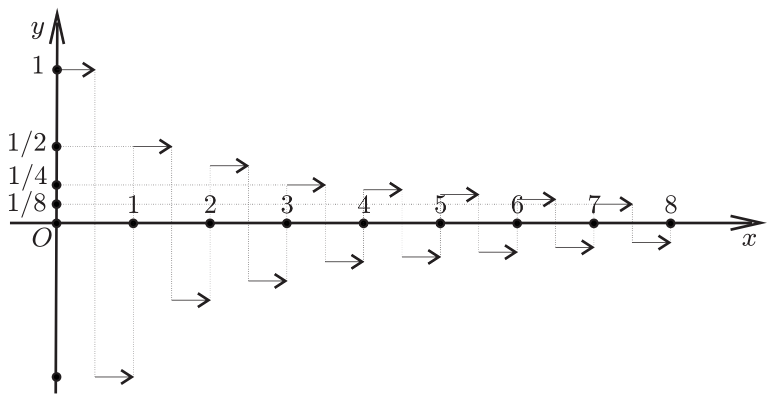


Рис. 9.17: Функция $f(x)$.

$$\int\limits_0^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_0^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \left(\int\limits_0^{[b]} f(x)dx + \int\limits_{[b]}^b f(x)dx \right) = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{[b]}^b f(x)dx = 0,$$

поскольку $|f(x)| = \dfrac{1}{[b]+1}$ $x \in [[b], [b]+1)$. Таким образом функция $f(x)$ интегрируема в несобственом смысле однократного интеграла, причём $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx = 0$. Покажем, что данный интеграл расходится в смысле несобственного кратного интеграла. Предъявим следующее исчерпание оси $[0; +\infty)$:

$$D_n = [0, 2^{2^n}] \bigcup_{k=0}^{2^{2^{n+1}} - 2^{2^n} - 1} [2^{2^n} + k, 2^{2^n} + k + 1/2].$$

Идея выбора данного исчерпания состоит в следующем, что отрезок $[1, 2^{2^n}]$ берём целиком, а далее набираем тольке те множества, где функция $f(x)$ принимает только положительные значения, причём мы набираем достаточно много положительных отрезков, так, чтобы соответствующий интеграл расходился (это возможно ввиду того, что ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} 1/k$ расходится). Также не забываем и про свойство $D_n \subset D_{n+1}$, которое здесь очевидно. Перейдём к аккуратному вычислению:

$$\int\limits_{D_n} f(x)dx = \int\limits_{1}^{2^{2^n}} + \sum_{k=0}^{2^{2^{n+1}}-2^{2^n}-1} \int\limits_{2^{2^n}+k}^{2^{2^n}+k+\frac{1}{2}} \frac{1}{2^{2^n}+k+1}dx = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2^{2^{n+1}}-2^{2^n}-1} \frac{1}{2^{2^n}+k+1} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2} \int\limits_{2^{2^n}+1}^{2^{2^{n+1}}} \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2^{2^{n+1}}}{2^{2^n}+1}\right) \geqslant \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2^{2^{n+1}}}{2^{2^n}\cdot 2}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left(2^{2^{n+1}-2^n-1}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(2^{n+1}-2^n-1\right)\ln 2 = \frac{1}{2}\cdot(2^n-1)\ln 2 \to +\infty.$$

В первом неравенстве использована очевидная оценка $\int_k^{k+1} dx/x \leqslant 1/k$.

Определение 9.2.3. Пусть для функции $f : D \mapsto \mathbb{R}$ существует хотя бы одно допустимое исчерпание множества D, и $|f(x)|$ интегрируема на D в несобственном смысле. В этом случае говорят, что f абсолютно интегрируема на D.

П р и м е р 9.2.3. Рассмотрим функцию

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x, y \in \mathbb{Q} \\ -1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Будет ли функция $f(x,y)$ абсолютно интегрируема в несобственом смысле на множестве $[0,1]^2$ (см. рис. 9.18)?

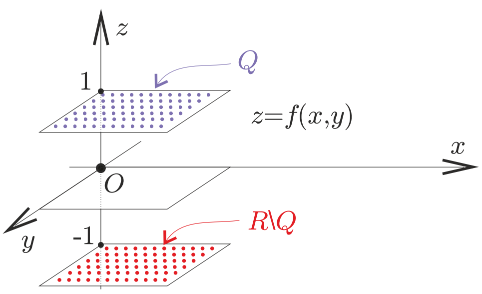


Рис. 9.18:

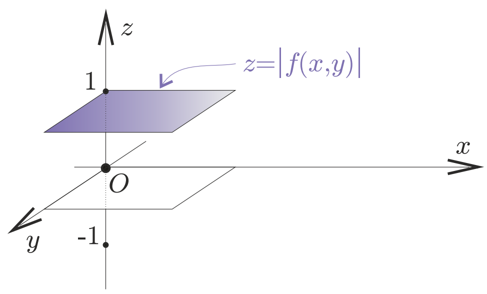


Рис. 9.19:

Доказательство. Казалось бы, что поскольку $|f(x,y)| \equiv 1$ (см. рис. 9.19), то функция $f(x,y)$ будет абсолютно интегрируема в несобственом смысле на множестве $[0,1]^2$, но тем не менее это не так. Связанно это с тем, что у функции $f(x,y)$ нет ни одного допустимого исчерпания. Поскольку в любой сколько угодно малой окрестности существуют точки (x,y) такие, что $x,\ y \in \mathbb{Q}$ и такие, что хотя бы одна из точек x или y иррациональная, то функция $f(x,y)$ будет всюду разрывной, поэтому не будет интегрируема ни в какой окрестности множества $[0,1]^2$. Поэтому в определении абсолютной интегрируемости не будет выполнено условие существования хотя бы одного допустимого исчерпание множества $[0,1]^2$ для функции $f(x,y)$. □

Теорема 9.2.1. *Пусть D — квадрируемое множество. Тогда $f \in \mathcal{R}(D)$ в несобственном смысле $\Leftrightarrow$ f абсолютно интегрируема на D.*

Теорема 9.2.2. *Пусть D — квадрируемое множество. Тогда если и $f \in \mathcal{R}(D_n)$, $f \geqslant 0$ на D и существует хотя бы одно исчерпание, на котором соответствующий $\lim_{n\to+\infty} \int\limits_{D_n} f(x)dx$ сходится и конечен, то интеграл сходится в несобственном смысле.*

П р и м е р 9.2.4. Исследовать вопрос о сходимости

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \sin(x^4 + y^4)\, dx\, dy.$$

Докажем, что данный интеграл расходится двумя способами. Сначала при помощи определения, потом при помощи теорем о сходимости, сформулдированных выше.

- Покажем расходимость интеграла, использую определение. Поскольку подинтегральная функция чётная по переменным x и y, то справедливо $\iint_{\mathbb{R}^2} \sin(x^4 + y^4)\, dx\, dy = 4 \iint_{\mathbb{R}^2_+} \sin(x^4 + y^4)\, dx\, dy$. Исследуем на сходимость последний интеграл. Покажем, что данный интеграл расходится в смысле несобсвенного кратного интеграла. Сделаем замену переменного $x = r^{1/4} \cos^{2/4} \varphi$, $y = r^{1/4} \sin^{2/4} \varphi$. Якобиан отображения равен $J = \frac{1}{8} r^{-1/2} \cos^{-1/2} \varphi \sin^{-1/2} \varphi$.

  Предъявим следующее исчерпание множества $\mathbb{R}^2_+ = [0; +\infty) \times [0; +\infty)$:

$$D_n = \{(\varphi, r) \,:\, \varphi \in [0; \pi/2], r \in C_n\}, \quad C_n = [0, 2^n \pi] \bigcup_{k=0}^{2^{n-1}-1} [(1/4 + 2k + 2^n)\pi; (3/4 + 2k + 2^n)\pi].$$

  Идея выбора данного исчерпания состоит в том, что по переменной r отрезок $[0, 2^n \pi]$ берём целиком, а далее набираем тольке те множества, где $\sin \varphi$ принимает только положительные значения большее либо равные $1/\sqrt{2}$, причём мы набираем достаточно много положительных отрезков, так, чтобы соответствующий интеграл расходился (это возможно ввиду того, что ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} 1/\sqrt{k}$ расходится). Свойство $D_n \subset D_{n+1}$ здесь очевидно выполнено. Перейдём к аккуратному вычислению:

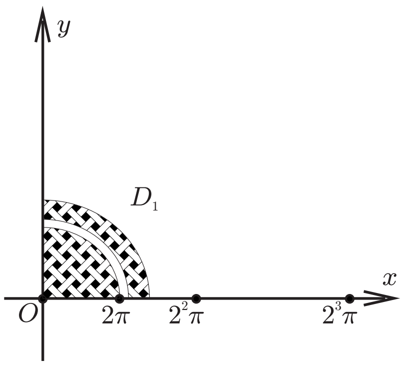


Рис. 9.20: D_1

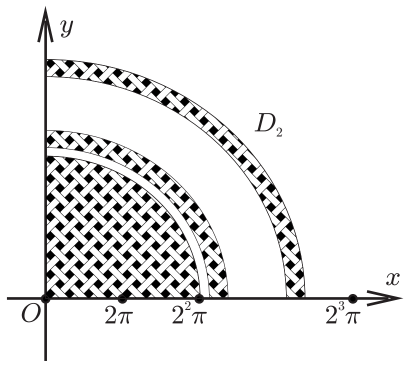


Рис. 9.21: D_2

$$\iint_{D_n} \sin(x^4 + y^4)\, dx\, dy = \frac{1}{4} \int_{[0;\pi/2]} \cos^{-1/2} \varphi \sin^{-1/2} \varphi \, d\varphi \int_{C_n} \frac{\sin r}{\sqrt{r}}\, dr = \frac{1}{8} B\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right) \int_{C_n} \frac{\sin r}{\sqrt{r}}\, dr.$$

  Оценим последний интеграл

$$\int_{C_n} \frac{\sin r}{\sqrt{r}}\, dr = \int_{[0;2^n\pi]} \frac{\sin r}{\sqrt{r}}\, dr + \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \int_{(1/4+2k+2^n)\pi}^{(3/4+2k+2^n)\pi} \frac{\sin r}{\sqrt{r}}\, dr.$$

Первый интеграл положителен, т.к.

$$\int_{[0;2^n\pi]} \frac{\sin r}{\sqrt{r}}\,dr = \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \left(\left(\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} + \int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} \right) \frac{\sin r}{\sqrt{r}}\,dr \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \left(\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \left(\frac{\sin r}{\sqrt{r}} + \frac{\sin(r+\pi)}{\sqrt{r+\pi}} \right) dr \right) = \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \left(\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \sin r \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{r}} - \frac{1}{\sqrt{r+\pi}} \right) dr \right) > 0.$$

Следовательно

$$\int_{C_n} \frac{\sin r}{\sqrt{r}}\,dr > \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \int_{(1/4+2k+2^n)\pi}^{(3/4+2k+2^n)\pi} \frac{\sin r}{\sqrt{r}}\,dr > \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \int_{(1/4+2k+2^n)\pi}^{(3/4+2k+2^n)\pi} \frac{1}{\sqrt{r}}\,dr \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\sqrt{(3/4+2k+2^n)\pi}} \cdot \frac{\pi}{2} > \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \cdot \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\sqrt{2^n+2^n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \cdot \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{2^{n-1}}{2^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \cdot 2^{\frac{n-3}{2}} \to +\infty, \quad (n \to +\infty).$$

Таким образом исходный интеграл расходится.

- Теперь покажем расходимость интеграла при помощи теорем. Опираясь на симметрии, как и ранее приходим к ввыводу, что достаточно исследовать интеграл

$$\iint_{x,y\geqslant 0} \sin(x^4+y^4)\,dx\,dy.$$

Использую свойство, что сходимость равносильна абсолютной сходимости приходим к выводу, что достаточно исследовать на сходимость интеграл:

$$\iint_{x,y\geqslant 0} |\sin(x^4+y^4)|\,dx\,dy.$$

Теперь поскольку подынтегральная функция неотрицательна, то можно провести исследование на сходимость используя, например, следующее исчерпание $D_n^* = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leqslant x, y,\ x^4+y^4 \leqslant n\}$. Сделав замену переменного такую же как и выше, получаем

$$\iint_{x,y\geqslant 0} |\sin(x^4+y^4)|\,dx\,dy = \lim_{n\to+\infty} \iint_{D_n^*} |\sin(x^4+y^4)|\,dx\,dy =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} \sin^{-1/2}\varphi \cos^{-1/2}\varphi\,d\varphi \int_0^n \frac{|\sin r|}{\sqrt{r}}\,dr.$$

Поскольку, интеграл $\int_0^{\pi/2} \sin^{-1/2}\varphi \cos^{-1/2}\varphi\,d\varphi$ сходится, т.к. считается в явном виде, через гамма-функцию, а интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin r|}{\sqrt{r}}\,dr$ — расходится (как одномерный), то можно сделать вывод, что исходный интеграл расходится.

П р и м е р 9.2.5. Вычисление интеграла Эйлера-Пуассона $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi}$.

Рассмотрим величину

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy.$$

Поскольку подинтегральная функция неотрицательна, то, если мы предъявим исчерпание по которому интеграл сходится, то согласно теореме, приведённой выше, интеграл будет сходящимся, а его значение будет равно значению, вычисленному по этому конкретному исчерпанию.

Предъявим исчерпание множества $\mathbb{R}^2 = (-\infty;+\infty) \times (-\infty;+\infty)$:

$$D_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \leqslant R^2\} = \{(\varphi, r) \,:\varphi \in [-\pi;\pi], r \in [0;R]\}.$$

Поскольку

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy = \lim_{R\to+\infty}\iint_{x^2+y^2\leqslant R^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy = \lim_{R\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi\int_0^R re^{-\frac{r^2}{2}}\,dr = 2\pi\lim_{R\to+\infty}\int_0^R re^{-\frac{r^2}{2}}\,dr,$$

то наша задача сводится к вычислениию интеграла $\int_0^R re^{-\frac{r^2}{2}}\,dr$. Найдём его

$$\int_0^R e^{\frac{-r^2}{2}}rdr = \int_0^R e^{-\frac{r^2}{2}}d\left(\frac{r^2}{2}\right) = -\int_0^R e^{-\frac{r^2}{2}}d\left(-\frac{r^2}{2}\right) = -e^{-\frac{r^2}{2}}\Big|_0^R = 1-e^{-\frac{R^2}{2}}.$$

Значит,

$$I^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy = 2\pi\lim_{R\to+\infty}\int_0^R re^{-\frac{r^2}{2}}\,dr = 2\pi\lim_{R\to+\infty}\left(1-e^{-\frac{R^2}{2}}\right) = 2\pi.$$

Поэтому $I=\sqrt{2\pi}$, или, что то же самое

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Контрольные вопросы.

1. Дайте определение сходимости кратного интеграла.
2. Есть ли различия в определениях несобственного интеграла: (a) в случае одной переменной и (b) несобственного интеграла для кратных интегралов в $\mathbb{R}^d$ при $d=1$?

Упражнения к 9.2

Упражнение 9.2.1. *Пусть* $\Omega=\{(x,y):\ 1\leqslant x,\ |y|\leqslant 1\}$. *Исследуйте на сходимость*

$$\int_\Omega \frac{y}{x}\,dx\,dy.$$

Упражнение 9.2.2. *Исследуйте на сходимость* $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$. *(a) в смысле определения сходимости одномерного несобственного интеграла; (b) в смысле определения сходимости кратного несобственного интеграла.*

Ответы: 9.2.1 Расходится. **9.2.2** (a) Расходится; (b) сходится (и равен $\pi/2$).

9.3 Площадь поверхности

В прямой круговой цилиндр радиусом R и высотой H впишем многогранную поверхность (так называемый *сапог Шварца*) следующим образом. Параллельными плоскостями делим цилиндр на m равных цилиндров высотой H/m. Каждую из полученных окружностей — оснований цилиндров — делим на n равных частей так, чтобы точки деления на одной окружности находились над серединами дуг ближайшей окружности (см. рис. 9.22).

Таким образом площадь всей многогранной поверхности будет равна $S_{nm}=2nmS_{ABC}$ (см. рис. 9.23). Найдём площадь треугольника ABC. Найдем $DE=OE-OD=R-R\cos\frac{\pi}{n}=2R\sin^2\frac{\pi}{2n}$.

$$AD^2 = AE^2+DE^2 = \left(\frac{H}{m}\right)^2 + 4R^2\sin^4\frac{\pi}{2n}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot BC\cdot AD = \frac{1}{2}\cdot 2R\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{\frac{H^2}{m^2}+4R^2\sin^4\frac{\pi}{2n}}$$

$$S_{nm} = 2nmR\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{\frac{H^2}{m^2}+4R^2\sin^4\frac{\pi}{2n}} =$$

$$2R\left(\underbrace{n\sin\frac{\pi}{n}}_{\to\pi}\right)\sqrt{H^2+4R^2m^2\sin^4\frac{\pi}{2n}} \to 2R\pi\sqrt{H^2+4R^2m^2\sin^4\frac{\pi}{2n}},\quad n\to+\infty.$$

Но, последнее выражение стремится к $+\infty$ если $m\to+\infty$, $n\to+\infty$ и $\frac{m}{n^2}\to+\infty$, последнее верно, например, при $m=n^3$, $n\to+\infty$.

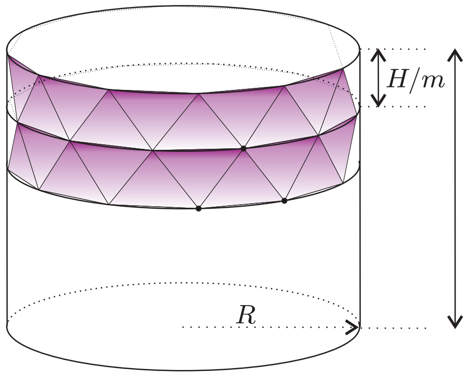


Рис. 9.22: Сапог Шварца.

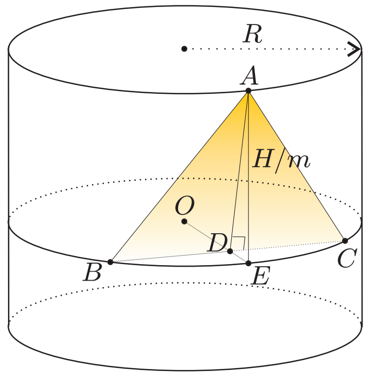


Рис. 9.23: Фрагмент.

Определение 9.3.1. S — гладкая поверхность, если $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ отображение квадрируемого множества D на S, причём выполнены свойства:

1. $x(u, v), y(u, v), z(u, v) \in C^1(D)$;

2. $\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v \neq \vec{0}$, $\forall (u, v) \in D$, $\vec{r} = (x, y, z)$.

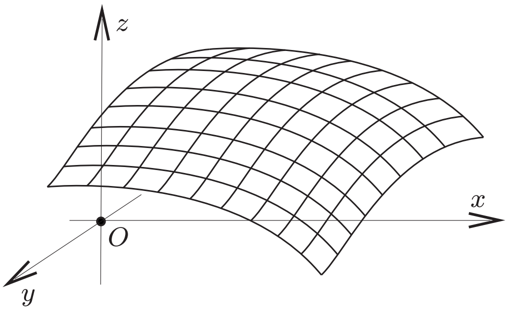


Рис. 9.24:

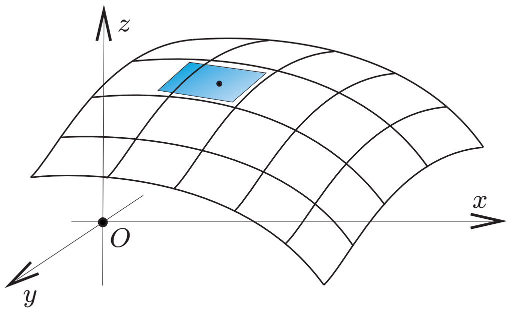


Рис. 9.25:

Определение 9.3.2. Рассмотрим повехность S, полученную $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ отображением квадрируемого множества D. В плоскости переменных (u, v) введём равномерное разбиение по каждой из оси Ou, Ov. Образами данного разбиения будут кривые на поверхности S (см. рис. 9.24). Таким образом получаем разбиение поверхности S на кусочки S_k. Теперь в каждой поверхности S_k выберем произвольную точку и восстановим касательную плоскость в этой точке (см. рис. 9.25).

И так проделаем с каждым элементом поверхности S_k (см. рис. 9.26). В результате получаем "чешуйчатое"множество (см. рис. 9.27) из которого мы выкинем все неограниченные плоскости, такие могут быть только в S_k содержащие краевые точки поверхности (т.е. полученных из образ граничных точек множества D). Но в силу квадрируемости множества D всеми разбиениями имеющими граничные точки можно пренебречь.

Таким образом, если существует и конечен предел

$$\lim_{h \to 0} \sum_{k: \Delta_k \subset D} \sigma_k,$$

то будем называть его *площадью поверхности* S. Здесь за σ_k обозначена площадь соответсвующего куска касательной плоскости в нашем "чешуйчатом"множестве. Поскольку плоскости пересекаются по прямой, то каждый оставшийся σ_k — четырёхугольник, а его площадь нам уже известна. Обозначать площадь поверхности будем следующем образом: $\iint_S dS$.

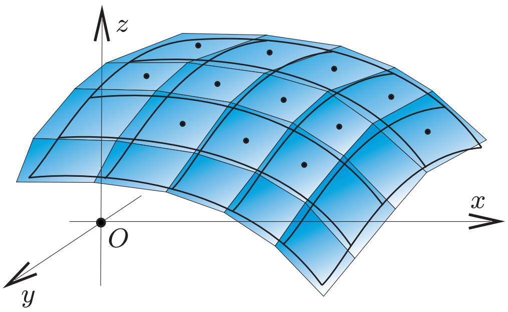


Рис. 9.26:

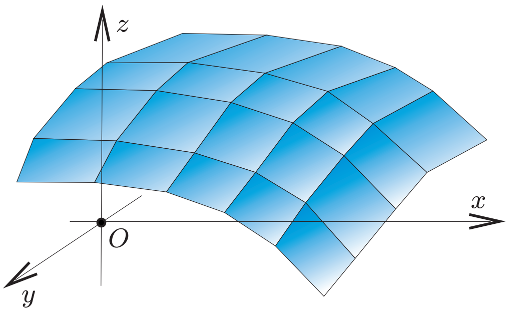


Рис. 9.27:

Теорема 9.3.1. *Пусть*

1. *$D \subset \mathbb{R}^2$ — квадрируемое множество, $S \subset \mathbb{R}^3$ — гладкая поверхность.*
2. *$F : D \mapsto S$ взаимнооднозначное непрерывно дифференцируемое отображение (т.е. $F = (x, y, z)$ и $x(u, v), y(u, v), z(u, v) \in C^1(D)$).*

Тогда площадь поверхности S равна

$$S = \iint\limits_S dS = \iint\limits_D \sqrt{E \cdot F - G^2}\, dudv,$$

где

$$E = (\vec{r}\,'_u, \vec{r}\,'_u), \quad F = (\vec{r}\,'_v, \vec{r}\,'_v), \quad G = (\vec{r}\,'_u, \vec{r}\,'_v),$$
$$\vec{r} = (x, y, z), \quad \vec{r}\,'_u = (x'_u, y'_u, z'_u), \quad \vec{r}\,'_v = (x'_v, y'_v, z'_v).$$

Площадь поверхности можно считать ещё по одной формуле:

$$S = \iint\limits_S dS = \iint\limits_D \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, dudv,$$

где

$$(A, B, C) = \vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v = \left(\frac{D(y, z)}{D(u, v)}; \frac{D(z, x)}{D(u, v)}; \frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right).$$

Доказательство. Приведём здесь основную идею доказательства. Пусть $x(u, v), y(u, v), z(u, v) \in C^1(D)$ отображение квадрируемого множества D на S. Тогда

$$\vec{r}(u, v_k) = \vec{r}(u_k, v_k) + \vec{r}\,'_u(u_k, v_k)h + o(h),$$
$$\vec{r}(u_k, v) = \vec{r}(u_k, v_k) + \vec{r}\,'_v(u_k, v_k)h + o(h).$$

Вектора $\vec{r}\,'_u(u_k, v_k)$, $\vec{r}\,'_v(u_k, v_k)$ лежат в касательной плоскости. Откуда

$$\sigma_k \approx |\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v|\big|_{(u_k, v_k)} h^2 = |\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v| \mu(\Delta_k).$$

Таким образом

$$\lim_{h \to 0} \sum_{k:\Delta_k \subset D} \sigma_k = \iint\limits_D |\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v| dudv = \iint\limits_S dS.$$

Выпишем формулы для нахождения площади поверхности. Пусть $\vec{r}'_u = (x'_u, y'_u, z'_u)$, $\vec{r}'_v = (x'_v, y'_v, z'_v)$. Положим $E = (\vec{r}'_u, \vec{r}'_u)$, $F = (\vec{r}'_v, \vec{r}'_v)$, $G = (\vec{r}'_u, \vec{r}'_v)$. Тогда

$$|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v| = |\vec{r}'_u||\vec{r}'_v|\sin\alpha = |\vec{r}'_u||\vec{r}'_v|\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{(\vec{r}'_u, \vec{r}'_u)(\vec{r}'_v, \vec{r}'_v) - (\vec{r}'_u, \vec{r}'_v)^2} = \sqrt{E \cdot F - G^2}.$$

Найдём векторное произведение

$$\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = \left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}; \frac{D(z,x)}{D(u,v)}; \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right) = (A, B, C).$$

Последнее равенство определяет функции $A(u,v)$, $B(u,v)$, $C(u,v)$. Следовательно

$$dS = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}dudv.$$

Приходим к тождеству, известному как *тождество Лагранжа*

$$A^2 + B^2 + C^2 = EF - G^2.$$

□

Поверхность заданная в явном виде

Рассмотрим частный случай, когда поверхность заданна в явном виде: $z = f(x,y)$. Тогда $\vec{r} = (x, y, f(x,y))$ и

$$\vec{r}_x{}' = (1, 0, f'_x), \quad \vec{r}_y{}' = (0, 1, f'_y).$$

Откуда

$$E = (\vec{r}_x{}', \vec{r}_x{}') = 1 + (f'_x)^2, \quad F = (\vec{r}_y{}', \vec{r}_y{}') = 1 + (f'_y)^2, \quad G = (\vec{r}'_x, \vec{r}'_y) = f'_x f'_y.$$

$$dS = \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}dxdy$$

П р и м е р 9.3.1. Найдём площадь поверхности сферы. Приведём два решения. Одно в параметрическом виде, а другое рассматривая поверхность как заданную в явном виде. Будем рассматривать сферу с радиусом R.

1. Параметризация сферы имеет вид:

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi\cos\psi, \\ y = R\sin\varphi\cos\psi, \\ z = R\sin\psi, \end{cases}$$

где $|\varphi| \leqslant \pi$, $|\psi| \leqslant \pi/2$. Выпишем формулы для нахождения площади поверхности. Пусть $\vec{r} = (x, y, z)$. Тогда

$$\vec{r}'_\varphi = R\,(-\sin\varphi\cos\psi, \cos\varphi\cos\psi, 0), \quad \vec{r}'_\psi = R(-\cos\varphi\sin\psi, -\sin\varphi\sin\psi, \cos\psi),$$
$$E = (\vec{r}'_\varphi, \vec{r}'_\varphi) = R^2\cos^2\psi, \quad F = (\vec{r}'_\psi, \vec{r}'_\psi) = R^2, \quad G = (\vec{r}'_\varphi, \vec{r}'_\psi) = 0.$$

Окончательно,

$$S = \iint_S dS = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^2\cos\psi\,d\varphi\,d\psi = 4\pi R^2.$$

2. Найдём площадь поверхности верхней части сферы $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ см. рис. 9.36, а затем просто удвоим результат.

$$dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,dx\,dy = \sqrt{1 + \left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2}\,dx\,dy = \frac{R}{z}\,dx\,dy.$$

Откуда

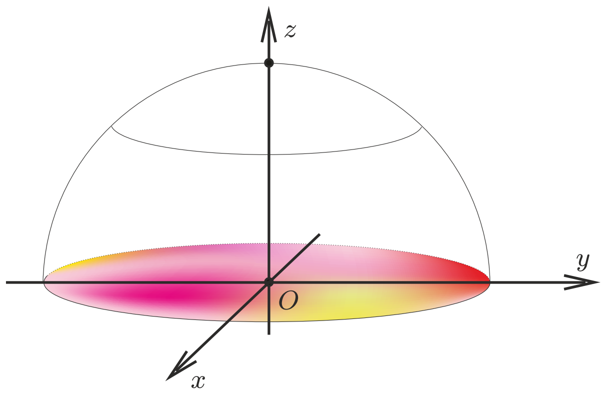


Рис. 9.28: "Верхняя"часть сферы.

$$S = \iint_S dS = R \iint \frac{dx\,dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = 4R \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R \frac{r\,dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} =$$

$$= 2\pi R \int_0^R \frac{1}{(R^2 - r^2)^{1/2}} \cdot \frac{d(R^2 - r^2)}{-2} = -2\pi R\, (R^2 - r^2)^{1/2}\Big|_0^R = 2\pi R^2.$$

Следовательно площадь сферы равна $4\pi R^2$.

П р и м е р 9.3.2. Найдём площадь поверхности конуса. Напомним, что общее уравнение конуса в каноническом виде имеет вид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ (см. рис. 9.29). Приведём два решения. Одно в параметрическом виде, а другое рассматривая поверхность как заданную в явном виде. Будем рассматривать конус с высотой H и радиусом основания равным R (см. рис. 9.30). Данная поверхность не является гладкой, т.к. $\vec{r}'_\varphi \times \vec{r}'_r = \vec{0}$ в точке начала координат. Тем не менее, приведённая выше в теореме 9.3.1, формула будет справедлива, более того можно распрастранить формулу в теореме 9.3.1 на так называемые кусочно-гладкие поверхности.

1. Найдём площадь поверхности конуса $z = \frac{H}{R}\sqrt{x^2 + y^2}$ при $z \in [0, H]$.

$$dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dx\,dy = \sqrt{1 + \left(\frac{Hx}{R\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{Hy}{R\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2}\, dx\,dy = \sqrt{1 + \frac{H^2}{R^2}}\, dx\,dy.$$

Откуда

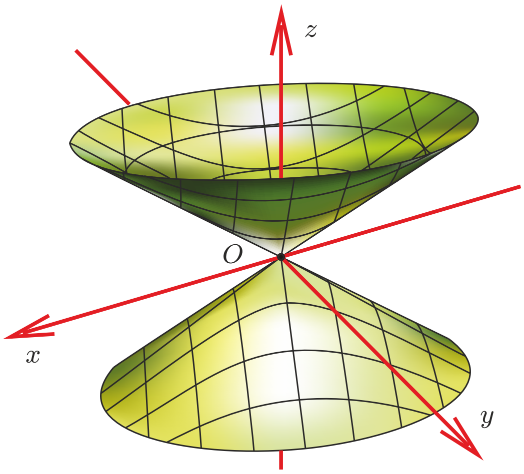


Рис. 9.29: Общее ур. конуса.

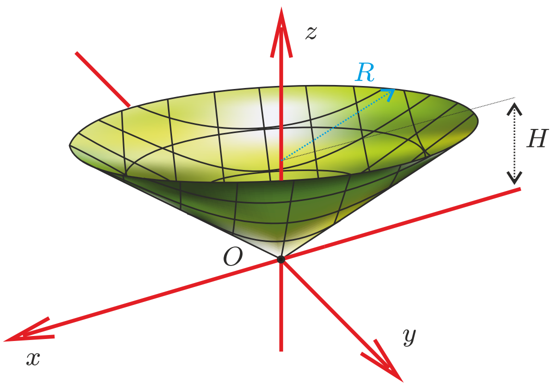


Рис. 9.30: Конус.

$$S = \iint_S dS = \sqrt{1 + \frac{H^2}{R^2}} \iint_{x^2+y^2 \leqslant R^2} dx\,dy = \sqrt{1 + \frac{H^2}{R^2}} \cdot \pi R^2 = \pi R l,$$

где $l = \sqrt{H^2 + R^2}$ — образующая данного конуса. Следовательно площадь боковой поверхности конуса равна $\pi R l$.

2. Параметризация конуса имеет вид:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = \frac{r}{R}H, \end{cases}$$

где $|\varphi| \leqslant \pi$, $r \in [0; R]$. Выпишем формулы для нахождения площади поверхности. Пусть $\vec{r} = (x, y, z)$. Тогда

$$\vec{r}'_\varphi = r\,(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0), \quad \vec{r}'_r = (\cos\varphi, \sin\varphi, H/R),$$

$$E = (\vec{r}'_\varphi, \vec{r}'_\varphi) = r^2, \quad F = (\vec{r}'_r, \vec{r}'_r) = 1 + \frac{H^2}{R^2}, \quad G = (\vec{r}'_\varphi, \vec{r}'_r) = 0.$$

Окончательно,

$$S = \iint_S dS = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^R \frac{r}{R} \cdot \sqrt{1 + \frac{H^2}{R^2}}\, d\varphi\, dr = \pi R l.$$

Определение 9.3.3. Пусть S — произвольная поверхность в $\mathbb{R}^3$, если существует непрерывная функция $\vec{\nu}: S \to \mathbb{R}^3$, заданная в каждой точки поверхности S, такая, что $|\vec{\nu}| = 1$ — единичная нормаль к поверхности, то говорят, что задана *ориентация* на поверхности.

Определение 9.3.4. Если задана поверхность S в $\mathbb{R}^3$ со своей ориентацией $\vec{v}$, то говорят, что поверхность S *ориентированна.*

П р и м е р 9.3.3 (Примеры ориентированных поверхностей)**.** Любая гладкая поверхность будет ориентируемой, поскольку можно положить $\vec{\nu} = \frac{\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v}{|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|}$. В качестве примера может быть сфера, тор (см. рис. 9.31, 9.32) и т.д.

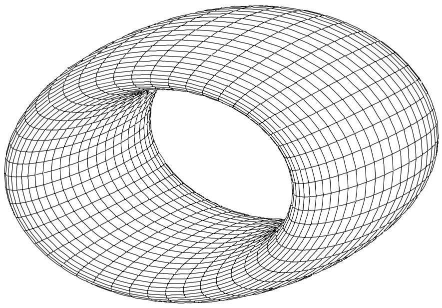


Рис. 9.31: Тор.

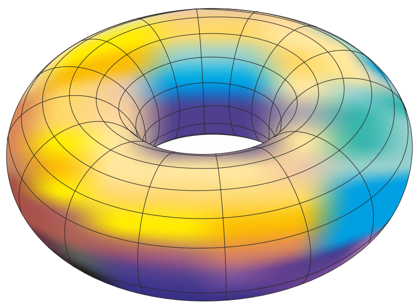


Рис. 9.32: Тор.

П р и м е р 9.3.4 (Примеры неориентированных поверхностей)**.** Лист Мебиуса (см. рис. 9.33-9.34).
Бутылка Клейна (см. рис. 9.35).

Определение 9.3.5. Пусть S гладкая поверхность. Задана непрерывная функция $\tilde{F}(x, y, z)$ на S, т.е.

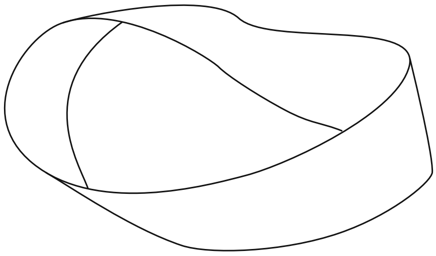


Рис. 9.33: Лист Мёбиуса.

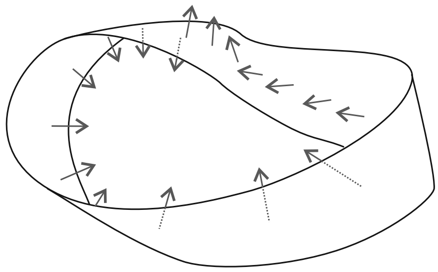


Рис. 9.34: Лист Мёбиуса.

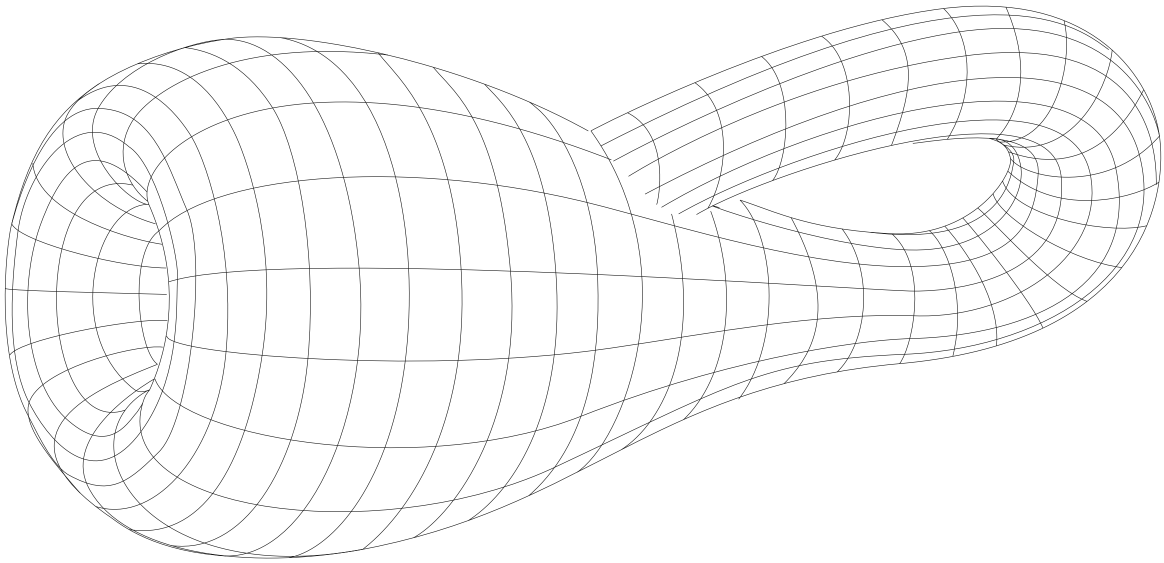


Рис. 9.35: Бутылка Клейна.

$\tilde{F}(x,y,z): S \mapsto \mathbb{R}^1$. Поверхностным интегралом 1-го рода назовём:

$$\iint\limits_S \tilde{F}(x,y,z)dS = \iint\limits_D \tilde{F}(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EF-G^2}\,dudv.$$

Определение 9.3.6. Пусть S гладкая поверхность (следовательно ориентируемая) с единичным вектором нормали $\vec{v} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, т.е. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Непрерывная вектор-функция $\vec{a} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$, задана на S. Поверхностным интегралом 2-го рода назовём:

$$\iint\limits_S \vec{a}\,d\vec{S} = \iint\limits_S \vec{a}\vec{v}\,dS =$$

$$= \iint\limits_S P(x,y,z)\,dydz + Q(x,y,z)\,dzdx + R(x,y,z)\,dxdy = \iint (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS.$$

Здесь как и ранее

$$dS = \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv;$$

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \quad \cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \quad \cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

$$I = \iint\limits_D (PA + QB + RC)\,dudv = \iint\limits_D P(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\,dudv +$$
$$+ \iint\limits_D Q(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\,dudv + \iint\limits_D R(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\,dudv.$$

П р и м е р 9.3.5. Для $a > 0$ вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\iint_{S_-} x^2y^3\,dydz - x^3y^2\,dzdx + a\,dxdy,$$

где S_- часть поверхности сферы: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z < 0$, где вектор нормали образует тупой угол с осью Oz.

Решение. Найдем вектор нормали. Поскольку для неявно заданной функции $F(x, y, z) = 0$ вектор нормали имеет вид $\vec{\nu} = \pm\frac{1}{\sqrt{(F_x')^2+(F_y')^2+(F_z')^2}}(F_x', F_y', F_z')$, то в нашем случае

$$\vec{\nu} = \pm\left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \frac{z}{R}\right).$$

Поскольку угол γ с осью Oz должен быть тупой, значит и косинус с осью Oz должен быть отрицателен, т.е.

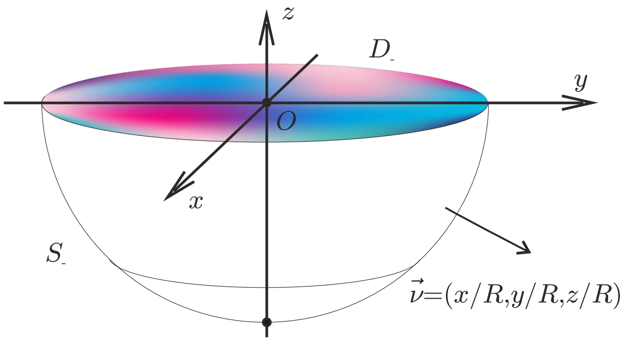


Рис. 9.36: "Нижняя"часть сферы.

$\cos\gamma = \pm\frac{z}{R} < 0$, это возможно, когда мы выбираем знак $+$, т.к. в этом случае $z < 0$. Следовательно,

$$\iint_{S_-} x^2y^3\,dydz - x^3y^2\,dzdx + a\,dxdy = \iint_{S_-} \left(x^2y^3\cos\alpha - x^3y^2\cos\beta + a\cos\gamma\right)\,dS_- =$$
$$= \iint_{S_-} \left(x^2y^3 \cdot \frac{x}{R} - x^3y^2 \cdot \frac{y}{R} + a \cdot \frac{z}{R}\right)\,dS_- = \iint_{S_-} a \cdot \frac{z}{R}\,dS_-.$$

Поскольку для сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ выполнено $z_x' = -\frac{x}{z}$, $z_y' = -\frac{y}{z}$, то

$$dS_- = \sqrt{1 + (z_x')^2 + (z_y')^2}\,dxdy = \frac{R}{|z|}\,dxdy = -\frac{R}{z}\,dxdy.$$

Поскольку проекция поверхности S_- на плоскость Oxy равна $D_- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant R^2\}$, то окончательно получаем:

$$\iint_{S_-} x^2y^3\,dydz - x^3y^2\,dzdx + a\,dxdy = \iint_{S_-} a \cdot \frac{z}{R}\,dS_- = -\iint_{x^2+y^2\leqslant R^2} a\,dxdy = -a\pi R^2.$$

□

Теорема 9.3.2 (Поверхностные интегралы как предел интегральной суммы)**.** Φ — *непрерывная функция на S, S — гладкая поверхность, заданная при помощи квадрируемого множества $D \subset \mathbb{R}^2$. Зададим произвольное разбиение D_k множества D, $D = \cup_{k=1}^{N} D_k$.* [a] *Определим параметр разбиения*

$$\lambda(P) = \max_k \left(\sup_{\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in S_k} |\vec{x}_1 - \vec{x}_2| \right).$$

Тогда справедливо

$$\sigma_1 = \sum_{k: D_k \subset D} \Phi(x(u_k, v_k), y(u_k, v_k), z(u_k, v_k))\mu(S_k) \to \iint_S \Phi dS, \quad \lambda(P) \to 0;$$

$$\sigma_2 = \sum_{k: D_k \subset D} \Phi(x(u_k, v_k), y(u_k, v_k), z(u_k, v_k)) \cos\alpha \cdot \mu(S_k) \to \iint_S \Phi\, dydz;$$

$$\sigma_3 = \sum_{k: D_k \subset D} \Phi(x(u_k, v_k), y(u_k, v_k), z(u_k, v_k)) \cos\beta \cdot \mu(S_k) \to \iint_S \Phi\, dzdx;$$

$$\sigma_4 = \sum_{k: D_k \subset D} \Phi(x(u_k, v_k), y(u_k, v_k), z(u_k, v_k)) \cos\gamma \cdot \mu(S_k) \to \iint_S \Phi\, dxdy.$$

[a] Как и ранее под $\mu(S_k)$ понимаем $\iint_{S_k} dS = \iint_{D_k} \sqrt{EF - G^2}\, dudv$.

Доказательство. Поскольку $\Phi(x, y, z)$ — непрерывная функция, S — гладкая поверхность, а D — квадрируемое множество, то справедливо

$$\left| \iint_S \Phi dS - \sum_k \right| = \left| \sum_{k: D_k \subset D} \iint_{S_k} \Phi dS - \sum_k \Phi(x(u_k, v_k), y(u_k, v_k), z(u_k, v_k))\mu(S_k) + o(1) \right|.$$

Из непрерывности функции $\Phi(x, y, z)$ на компакте S_k, вытекает её равномерная непрерывность на S_k. Таким образом для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $\mu(S_k) < \delta$, то $|\Phi(x, y, z) - \Phi(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)| \leqslant \varepsilon$ для $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in S_k$ и любого $(x, y, z) \in S_k$, т.е. справедлива равномерная оценка

$$\Phi(x, y, z) = \Phi(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) + o(1), \quad \forall (x, y, z) \in S_k, \quad \mu(S_k) \to 0.$$

Откуда

$$\left| \iint_S \Phi dS - \sum_k \right| \leqslant \left| \sum_k (\Phi(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) - \Phi(x(u_k, v_k), y(u_k, v_k), z(u_k, v_k)))\mu(S_k) \right| + o(1) \leqslant$$
$$\leqslant \sum \omega(\Phi, S_k)\mu(S_k) + o(1) \leqslant \omega(\Phi, \lambda(P))\mu(S) + o(1) \to 0, \quad \lambda(P) \to 0.$$

Последнее равенство справедливо в виду того, что функция Φ — непрерывна на компакте, а следовательно равномерно непрерывна на $\cup_{k: D_k \subset D} D_k$ и использовали обозначения

$$\omega(\Phi, \lambda(P)) = \sup_{\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in S;\ |\vec{x}_1 - \vec{x}_2| \leqslant \lambda(P)} |\Phi(\vec{x}_1) - \Phi(\vec{x}_2)|,$$

□

Контрольные вопросы.

1. Можно ли определять площадь поверхности как предельный переход площадей многогранников, диаметр разбиения которых стремится к нулю так.

Упражнения к 9.3

Упражнение 9.3.1. *Найдите площадь поверхности S:*

(a) $S:\ 6x+3y+2z=12$, *заключенной в первой октанте;*

(b) $S:\ z=(x-a)^2+(y-b)^2$, *заключенной внутри цилиндра* $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$;

Упражнение 9.3.2. *Найдите площадь поверхности S, заданной параметрически:*

(a) *тор* $S:\ \vec{r}=((b+a\cos\psi)\cos\varphi,(b+a\cos\psi)\sin\varphi,a\sin\psi),\ \ \varphi,\psi\in[0,2\pi)$;

(b) *геликоид* $S:\ \vec{r}=(r\cos\psi,r\sin\psi,h\psi),\ r\in[0;a],\psi\in(0;2\pi)$;

Упражнение 9.3.3. *Вычислите поверхностный интеграл первого рода, для параметрически заданной поверхности S:*

$$(a)\quad \iint_S \frac{dS}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\ S:\ \vec{r}=(a\cos u,a\sin u,v),\ \ u\in[0,2\pi),0\leqslant v\leqslant H;$$

$$(b)\quad \iint_S \sqrt{1+x^2+y^2}\,dS\ S:\ \vec{r}=(u\cos v,u\sin v,v),\ \ u\in[0;2],\ v\in[0,\pi].$$

Упражнение 9.3.4. *Пусть* $S=\{(x,y,z):\ \ z=f(x,y),\ \ (x,y)\in D\subseteq\mathbb{R}^2\}$, *где D — квадрируемое множество в $\mathbb{R}^2$. Причём $f\in C^1(D)$ и $(f'_x)^2+(f'_y)^2=C>0$, где C — константа. Выразите площадь S через площадь D.*

Ответы: 9.3.1 (a) 14; (b) $\frac{\pi}{6}\left((1+4R^2)^{3/2}-1\right)$. **9.3.2** (a) $4ab\pi^2$; (b) $\pi\left(a\sqrt{a^2+h^2}+h^2\ln\frac{a+\sqrt{a^2+h^2}}{|h|}\right)$. **9.3.3** (a) $2\pi a\cdot\ln\left(\frac{H+\sqrt{a^2+H^2}}{a}\right)$; (b) $14\pi/3$. **9.3.4** $\sqrt{1+C}\cdot\mu(D)$.

9.4 Криволинейный интеграл.

Определение 9.4.1. Кривая ℓ называется гладкой, если $x,\ y,\ z\in C^1[a;b]$ и $(x'_t)^2+(y'_t)^2+(z'_t)^2\neq 0$ для любого $t\in[a;b]$.

Определение 9.4.2 (Криволинейный интеграл первого рода)**.** Пусть ℓ — спрямляемая кривая. Тогда если существует и конечен интеграл

$$\int\limits_{AB}\Phi(x,y,z)d\ell=\int\limits_0^L\Phi(x(\ell),y(\ell),z(\ell))d\ell,$$

то говорим, что функция $\Phi(x,y,z)$ интегрируема по кривой ℓ. А интеграл вида $\int\limits_{AB}\Phi(x,y,z)d\ell$ называется *криволинейным интегралом первого рода.*

Теорема 9.4.1 (Свойства криволинейный интеграл первого рода)**.** *Пусть ℓ — спрямляемая кривая. Функция $\Phi(x,y,z)$ интегрируема по кривой ℓ. Тогда*

1. $\int\limits_{AB}\Phi d\ell=\int\limits_{BA}\Phi d\ell.$

2. *Пусть ℓ — гладкая кривая. Тогда*

$$\int\limits_{AB} \Phi\, d\ell = \int\limits_0^L \Phi(x(\ell), y(\ell), z(\ell))\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}\, dt.$$

Доказательство. 1) Выполним замену переменного $\ell = L - \sigma$ и заметив, что $d\ell = -d\sigma$, получим

$$\int\limits_{AB} \Phi d\ell = \int\limits_0^L \Phi(x(\ell), y(\ell), z(\ell)) d\ell = -\int\limits_L^0 \Phi(x(L-\sigma), y(L-\sigma), z(L-\sigma)) d\sigma =$$

$$= \int\limits_0^L \Phi(x(L-\sigma), y(L-\sigma), z(L-\sigma)) d\sigma = \int\limits_{BA} \Phi d\ell.$$

2) Данный пункт был доказан в теореме 5.13.5. □

Определение 9.4.3 (Криволинейный интеграл второго рода)**.** Пусть ℓ — гладкая кривая, $\vec{\tau}$ — единичный вектор касательной к кривой. Задано векторное поле $\vec{a} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$, $\vec{a} = (P, Q, R)$, где P, Q, R, : $\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^1$. Тогда

$$\int\limits_{AB} \vec{a} d\vec{r} = \int\limits_{AB} P dx + Q dy + R dz = \int\limits_{AB} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) d\ell,$$

где $\vec{\tau} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ — единичный касательный вектор к гладкой кривой ℓ.

Единичный касательный вектор к гладкой кривой ℓ можно найти по формуле

$$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(\frac{x_t'}{\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}}, \frac{y_t'}{\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}}, \frac{z_t'}{\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}} \right).$$

Теорема 9.4.2 (Свойства криволинейный интеграл второго рода)**.** *Пусть ℓ — гладкая кривая. Функция $\vec{a}\vec{\tau}$ интегрируема по кривой ℓ. Тогда*

1. $\int\limits_{AB} \vec{a} d\vec{r} = -\int\limits_{BA} \vec{a} d\vec{r}.$

2. *Пусть ℓ — гладкая кривая. Тогда*

$$\int \overrightarrow{a}\, d\vec{r} = \int\limits_0^L (P x_t' + Q y_t' + R z_t') dt.$$

Доказательство. Первое свойство очевидно ввиду того, что вектор касательной меняет свой направление. Второе свойство вытекает из представления $d\ell = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}\, dt$, доказанного в теореме 5.13.5 и явного вида единичного касательного вектора $\vec{\tau} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. □

Теорема 9.4.3 (Криволинейный интеграл как предел интегральной суммы)**.** *Пусть ℓ — гладкая кривая,*

$\ell = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a; b]$. *Функция* $\Phi \in C(\ell)$. *Тогда*

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n} \Phi(x(\xi_k), y(\xi_k), z(\xi_k))\Delta\ell_k \overset{\max(\Delta\ell_k)\to 0}{\longrightarrow} \int\limits_{AB} \Phi d\ell;$$

$$\sigma_2 = \sum_{k=1}^{n} \Phi(x(\xi_k), y(\xi_k), z(\xi_k))x'_t(\xi_k)\Delta t_k \to \int\limits_{AB} \Phi \cos\alpha d\ell,$$

здесь $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, $\xi_k \in [t_{k-1}; t_k]$.

Доказательство. Доказательство можно провести аналогично доказательству теоремы 9.3.2. Для разнообразия воспользуемся первой теоремой о среднем. При наших предположениях справедливо

$$\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi\, d\ell = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt =$$

$$= \Phi(\eta_k, \theta_k, \zeta_k) \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt = \Phi(\eta_k, \theta_k, \zeta_k)\Delta\ell_k,$$

где $(\eta_k, \theta_k, \zeta_k) = (x(c_k), y(c_k), z(c_k))$, $c_k \in [t_{k-1}; t_k]$.

Докажем для σ_1 :

$$\left|\int\limits_{AB} \Phi d\ell - \sum_{k=1}^{n} \Phi(x(\xi_k), y(\xi_k), z(\xi_k)\Delta\ell_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi d\ell - \Phi(x(\xi_k), y(\xi_k), z(\xi_k))\Delta\ell_k\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} |\Phi(\eta_k, \theta_k, \zeta_k) - \Phi(x(\xi_k), y(\xi_k), z(\xi_k))|\Delta\ell_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} \omega(\Phi, \Delta\ell_k)\Delta\ell_k \leqslant \omega(\Phi, \lambda(P)) \sum \Delta\ell_k \to 0.$$

Последнее переход возможен в силу того, что непрерывная функция Φ рассматривается на компакте ℓ. Мы использовали обозначения

$$\lambda(P) = \max_k \sup_{\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \ell_k} |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|, \quad \omega(\Phi, \lambda(P)) = \sup_{\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \ell;\ |\vec{x}_1 - \vec{x}_2| \leqslant \lambda(P)} |\Phi(\vec{x}_1) - \Phi(\vec{x}_2)|.$$

□

П р и м е р 9.4.1. Найдите криволинейный интеграл 1-го рода

$$\int_L \frac{z\, dl}{\sqrt{3 - (x+y)^2}},$$

контур L получается при пересечении поверхностей $x^2 + y^2 = 1$ и $x + y + z = 1$.

Решение. Найдём параметризацию контура:

$$x(\varphi) = \cos\varphi, \quad y(\varphi) = \sin\varphi, \quad z(\varphi) = 1 - \cos\varphi - \sin\varphi, \quad \varphi \in [0; 2\pi].$$

Поскольку

$$dl = \sqrt{(x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2 + (z'_\varphi)^2}\, d\varphi = \sqrt{(\sin\varphi)^2 + (\cos\varphi)^2 + (\sin\varphi - \cos\varphi)^2}\, d\varphi = \sqrt{2 - \sin 2\varphi}\, d\varphi,$$

то

$$\int_L \frac{z\, dl}{\sqrt{3 - (x+y)^2}} = \int_L \frac{(1 - \cos\varphi - \sin\varphi)\, dl}{\sqrt{3 - (\sin\varphi + \cos\varphi)^2}} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{(1 - \cos\varphi - \sin\varphi)\sqrt{2 - \sin 2\varphi}\, d\varphi}{\sqrt{2 - \sin 2\varphi}} = \int_0^{2\pi} (1 - \cos\varphi - \sin\varphi)\, d\varphi = \int_0^{2\pi} 1\, d\varphi = 2\pi.$$

□

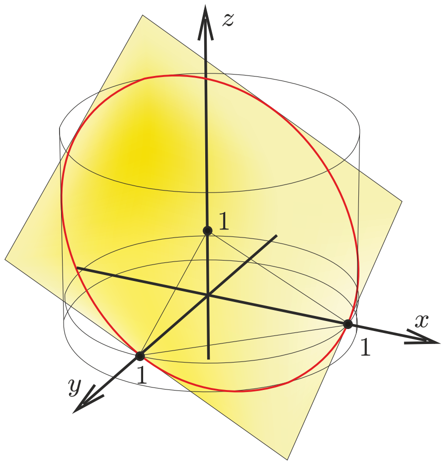


Рис. 9.37:

9.5 Формула Грина.

Определение 9.5.1. Назовём Ω — криволинейной трапецией по отношению к оси Ox, если существуют на $[a, b]$ функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x) \in C^1[a, b]$ такие, что

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b,\ \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\}.$$

Заметим, что стороны данной "трапеции"параллельные оси Oy могут вырождаться в точку.

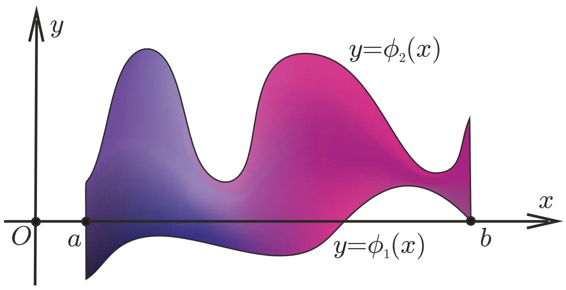


Рис. 9.38: Криволинейная трапеция по отношению к оси Ox

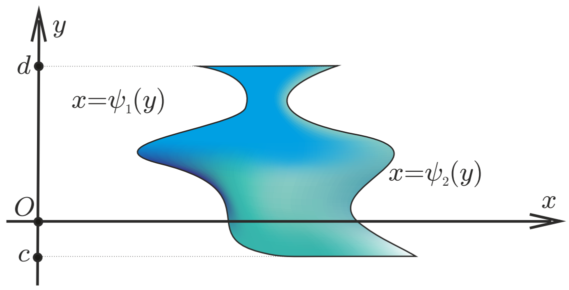


Рис. 9.39: Криволинейная трапеция по отношению к оси Oy

Определение 9.5.2. Назовём Ω — криволинейной трапецией по отношению к оси Oy, если существуют на $[c; d]$ функции $\psi_1(y)$, $\psi_2(y) \in C^1[c, d]$ такие, что

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leqslant y \leqslant d,\ \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)\}.$$

Лемма 59. *При выполнении условий*

1. Ω *— криволинейная трапеция по отношению к оси* Ox*;*
2. $P,\ P'_y \in C(\overline{\Omega})$*;*
3. *в криволинейном интеграле обход границы задан так, чтобы область оставалась слева,*

справедливо:

$$\int\limits_{\partial\Omega} P dx = -\iint\limits_{\Omega} P'_y \, dxdy.$$

Доказательство. С одной стороны по теореме Фубини

$$\iint\limits_{\Omega} P'_y dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} P'_y dy = \int\limits_a^b (P(x,\varphi_2(x)) - P(x,\varphi_1(x)))dx.$$

С другой стороны интеграл по границе $\partial\Omega$ равен

$$\int\limits_{\partial\Omega} P dx = \int\limits_1 + \int\limits_2 + \int\limits_3 + \int\limits_4 = \int\limits_a^b P(x,\varphi_1(x))dx + \int\limits_b^a P(x,\varphi_2(x))dx = \int\limits_a^b P(x,\varphi_1(x))dx - \int\limits_a^b P(x,\varphi_2(x))dx.$$

□

Лемма 60. *При выполнении условий*

1. *Ω — криволинейная трапеция по отношению к оси Oy;*
2. *Q, $Q'_x \in C(\overline{\Omega})$;*
3. *в криволинейном интеграле обход границы задан так, чтобы область оставалась слева,*

справедливо:

$$\int\limits_{\partial\Omega} Q(x,y)\, dy = \iint\limits_{\Omega} Q'_x(x,y)\, dxdy.$$

Доказательство. Аналогично предыдущему. □

Определение 9.5.3. Множество $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — *простое*, если представимо в виде конечного объединения криволинейных трапеций как по отношению к оси Ox и так и по отношению к оси Oy.

Теорема 9.5.1 (Формула Грина)**.** *При выполнении условий*

1. *Ω — простое множество из $\mathbb{R}^2$.*
2. *P, P'_y, Q, $Q'_x \in C^1(\overline{\Omega})$.*
3. *в криволинейном интеграле обход границы задан так, чтобы область оставалась слева,*

справедливо:

$$\int\limits_{\partial\Omega} P dx + Q dy = \iint\limits_{\Omega} \left(Q'_x - P'_y\right)\, dxdy.$$

Доказательство. Поскольку Ω можно разбить на конечное число криволинейных трапеций по Ox, то представим

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_n,$$

где Ω_k, $k = 1, \dots n$ криволинейная трапеция по оси Ox. Тогда по двум предыдущим леммам получаем:

$$
\begin{array}{lrcl}
 & \int\limits_{\partial\Omega_1} Pdx & = & -\iint\limits_{\Omega_1} P'_y dxdy \\
+ & & & \\
 & \int\limits_{\partial\Omega_2} Pdx & = & -\iint\limits_{\Omega_2} P'_y dxdy \\
+ & & \dots & \\
 & \int\limits_{\partial\Omega_n} Pdx & = & -\iint\limits_{\Omega_n} P'_y dxdy \\
\hline
 & \int\limits_{\partial\Omega_1\cup\partial\Omega_2\cup\dots\cup\partial\Omega_n} Pdx & = & -\iint\limits_{\Omega} P'_y \, dxdy
\end{array}
$$

На границах прилегающих участков разбиения интеграл берется 2 раза, но в разных направлениях (см. рис. (9.40)). Поэтому граничные криволинейные интегралы, общие для каких-либо двух криволинейных трапеций, сократятся. Следовательно

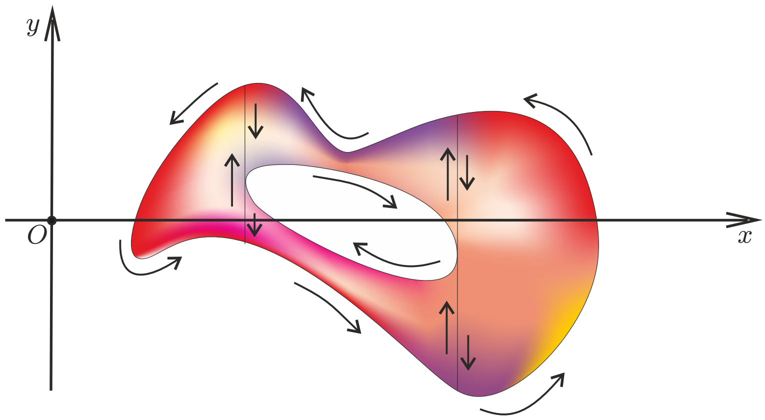


Рис. 9.40:

$$\int\limits_{\partial\Omega} Pdx = -\iint\limits_{\Omega} P'_y \, dxdy.$$

Аналогично, получаем для Q:

$$\int\limits_{\partial\Omega} Q \, dy = \iint\limits_{\Omega} Q'_x \, dxdy.$$

□

Следствие 9.5.1. В условиях теоремы 9.5.1 площадь простого множества Ω можно вычислить

$$S(\Omega) = \int\limits_{\partial\Omega} x \, dy = -\int\limits_{\partial\Omega} y \, dx = \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega} x \, dy - y \, dx = \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega} x^2 \, d\left(\frac{y}{x}\right).$$

Доказательство. Достаточно в формулу Грина поочереди положить сначала $P = 0$, $Q = x$ и получим первое равенство, затем полагая $P = -y$, $Q = 0$ получаем второе равенство, а третье равенство получаем при помощи $P = -y/2$, $Q = x/2$. Четвёртое равенство следствие третьего. □

П р и м е р 9.5.1. Найти площадь, ограниченную кривой второго порядка $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Вероятно, все узнали, что данная кривая это — эллипс.

Введём параметризацию границы

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi, \\ y = b\sin\varphi. \end{cases}$$

Следовательно площадь фигуры, ограниченной эллипсом равна:

$$S(\Omega) = \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega} x\,dy - y\,dx = \frac{ab}{2}\int\limits_0^{2\pi}(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\,d\varphi = \pi ab.$$

Определение 9.5.4. Поле $\vec{a} = (P, Q)$ — *потенциально* в D, если существует функция $U = U(x, y)$ такая, что существуют частные производные U'_x, U'_y на множестве D и более того

$$U'_x(x, y) = P(x, y), \quad U'_y(x, y) = Q(x, y), \quad \forall (x, y) \in D.$$

Определение 9.5.5. Множество D называется *односвязным*, если произвольный замкнутый контур из множества D ограничивает множество целиком лежащие в этом же множестве D. Другими словами: Множество D называется *односвязным*, если любой замкнутый контур, принадлежащий области, можно непрерывным образом стянуть в точку, не покидая пределов области.

На рисунках 9.38, 9.39 — односвязные множества. На рисунке 9.40 — неодносвязное множество.

П р и м е р 9.5.2. Рассмотрим два криволинейных интеграла

$$I_1(\Gamma_p) = \int_{\Gamma_p} y\,dx - x\,dy; \quad I_2(\Gamma_p) = \int_{\Gamma_p} y\,dx + x\,dy,$$

где Γ_p кривая $y = x^p$, $(p > 0)$, соединяющая точки $A(0, 0)$ и $B(1, 1)$, криволинейный интеграл мы считает от точки A к B.

Доказательство. Вычислим оба интеграла и покажем, что первый интеграл зависит от кривой Γ_p, а второй нет. Действительно,

$$I_1 = \int_0^1 (x^p - p\,x^p)\,dx = (1-p)\,\frac{x^{p+1}}{p+1}\bigg|_0^1 = \frac{1-p}{1+p};$$
$$I_2 = \int_0^1 (x^p + p\,x^p)\,dx = (1+p)\,\frac{x^{p+1}}{p+1}\bigg|_0^1 = 1.$$

То, что второй интеграл в нашем примере не зависит от пути интегрирование оказывается не случайное. Теорема ниже показывает, почему так происходит. □

Теорема 9.5.2 (Условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования)**.** *Пусть P, Q, P'_y, $Q'_x \in C(\bar{D})$, D — простое односвязное множество. Тогда (условия эквивалентны):*

1. $\oint\limits_C Pdx + Qdy = 0$ *($\forall$ замкнутого контура, целиком лежащего в D и ограничивающего простую область).*

2. $\int\limits_{A_1A_2} Pdx + Qdy = \int\limits_{A_1A_2}{}^{*} Pdx + Qdy$. *(интеграл не зависит от кривой по которой производится интегрирование).*

3. *поле $\vec{a} = (P, Q)$ - потенциально в D.*

4. $P'_y = Q'_x$ *в D.*

Доказательство. **1.⇒ 2.**

$$\int\limits_{L_1\cup -L_2} Pdx+Qdy=0$$

$$||$$

$$\int\limits_{L_1}-\int\limits_{L_2}=0$$

2.⇒ 3. Определим функцию

$$U(x,y)=\int\limits_{x_0,y_0}^{x,y} Pdx+Qdy,$$

где (x_0,y_0) — произвольная точка множества D, где интегрирование от (x_0,y_0) до (x,y) ведется по произвольному спрямляемому контуру, лежащему в D. Данное определение корректно, поскольку интеграл не зависит от пути интегрирования. Рассмотрим разность

$$U(x+h,y)-U(x,y)=\int\limits_{(x,y)}^{(x+h,y)}\omega=\int\limits_{x}^{x+h}P(t,y)dt=P(x+\theta_x h,y)h,$$

где $(\omega=Pdx+Qdy)$, $\theta_x\in[0;1]$.Тогда

$$U'_x(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{U(x+h,y)-U(x,y)}{h}=P(x,y).$$

Аналогично получаем $U'_y(x,y)=Q(x,y)$.

3.⇒ 4. Из непрерывности функций P'_y, Q'_x вытекает непрерывность смешанных производных U''_{xy}, U''_{yx}, а следовательно равенство $U''_{xy}=U''_{yx}$.

4.⇒ 1. Из формулы Грина вытекает

$$\oint\limits_{C}\omega=\iint\limits_{D^*}(Q'_x-P'_y)dxdy=0,$$

где $D^*\subset D$, $C=\partial D^*$.

□

Контрольные вопросы.

1. Сформулируйте теорему Грина.
2. Как вычислить площадь фигуры по заданной параметризации?
3. Привести условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.

Упражнения к 9.5

Упражнение 9.5.1. *Найдите площадь (кардиоиды), ограниченную кривой* $x=a\cos t\cdot(1+\cos t)$, $y=a\sin t\cdot(1+\cos t)$.

Упражнение 9.5.2. *Найдите площадь петли, ограниченной кривой*

(a) $x=t^2-1,\ y=t^3-t;$ (b) $x=\dfrac{3t}{1+t^3},\ y=\dfrac{3t^2}{1+t^3};$ (c) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^{12}=xy.$

Применяя формулу Грина, вычислите криволинейный интеграл по замкнутой кривой, пробегаемой так, что её внутренность остаётся слева.

Упражнение 9.5.3.

$$\int_G \frac{xdy + ydx}{x^2 + y^2},$$

где G — окружность $x^2 + y^2 = R^2$.

Упражнение 9.5.4.

$$\int_G \sqrt{x^2 + y^2}dx + y(xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}))dy,$$

где G — окружность $x^2 + y^2 = R^2$.

Упражнение 9.5.5.

$$\int_G (x + y)^2 dx - (x - y)^2 dy,$$

где G — граница области, ограниченная отрезком AB, $A(1;1)$, $B(2;6)$ и дугой параболы $y = ax^2 + bx + c$, проходящей через точки A, B, $C(0;0)$.

Упражнение 9.5.6. *Вычислить интеграл*

$$\int_G e^{x-y} \left(((x + y) \cos x + (1 + x + y) \sin x) \, dx + (1 - x - y) \sin x \, dy \right),$$

где G — дуга гиперболы $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ от точки A к B, если гипербола проходит через точки $A(2;3)$, $B(3;2)$, $C(0;-1)$.

Упражнение 9.5.7. *Вычислить интеграл*

$$\int_G e^{x+y} \left((x - y + 1) \cos y \, dx + ((y - x) \sin y + (x - y - 1) \cos y) \, dy \right),$$

где G — дуга гиперболы $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ от точки A к B, если гипербола проходит через точки $A(1;0)$, $B(0;-1)$, $C(2;1/3)$.

Упражнение 9.5.8. *Какому условию должна удовлетворять дифференцируемая функция $F(x, y)$, чтобы криволинейный интеграл*

$$\int_{AB} F(x, y) \left(\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} \right),$$

не зависил от пути интегрирования AB для путей не проходящих через начало координат?

Упражнение 9.5.9. *Найти потенциал $U(x, y)$, если*

$$dU = \frac{2x(1 - e^y)}{(1 + x^2)^2} \, dx + \left(\frac{e^y}{1 + x^2} + 1 \right) \, dy.$$

Ответы: **9.5.1** $3\pi a^2/2$. **9.5.2** (a) $8/15$. (b) $3/2$. (c) $1/30$. *Указание:* докажите, что петля образуется при изменение параметра t от -1 до 1. **9.5.3** 0. **9.5.4** $\pi R^4/4$. **9.5.3** -2. **9.5.6** *Указание:* восстановить потенциал $U = e^{x-y}(x + y) \sin x$. **9.5.7** -2. *Указание:* восстановить потенциал $U(x, y) = e^{x+y}(x - y) \cos y$. **9.5.8** $xF'_x = yF'_y$. **9.5.9** $U = \frac{e^y - 1}{1 + x^2} + y + C$.

9.6 Формула Гаусса-Остроградского.

Определение 9.6.1. Множество $D \in \mathbb{R}^3$ будем называть криволинейным цилиндром по отношению к оси Oz, если

$$D = D_z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x, y) \in \Omega, \ z_1(x, y) \leqslant z \leqslant z_2(x, y)\}.$$

Причём функции $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$ таковы, что ограничивают гладкие поверхности S_1, S_2 и Ω — простая область в $\mathbb{R}^2$. Аналогично определяется криволинейный цилиндр по Oy и Ox.

Определение 9.6.2. $D \in \mathbb{R}^3$ — простое множество, если оно представимо в виде конечного числа объединений криволинейных цилиндров как по отношению к оси Oz ($D = D_z^1 \cup \cdots \cup D_z^n$), так и по отношению к осям Ox и Oy.

Теорема 9.6.1. *При выполнении условий*

1. D *— простое ориентированное множество в* $\mathbb{R}^3$*, ограниченное поверхностью* S.
2. $P, Q, R, P'_x, Q'_y, R'_z \in C(D)$.
3. $\vec{n}$ *- вектор внешней нормали,*

справедливо:

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint\limits_D (P'_x + Q'_y + R'_z)dxdydz.$$

Доказательство. Докажем справедливость равенства

$$\iiint\limits_{D_z} R'_z dxdydz = \iint\limits_{\Omega} dxdy \int\limits_{z_1}^{z_2} R'_z dz = \iint_{\Omega} R(x,y,z_2) - R(x,y,z_1)dxdy,$$

где $D = D_z$ криволинейный цилиндр по отношению к оси Oz.

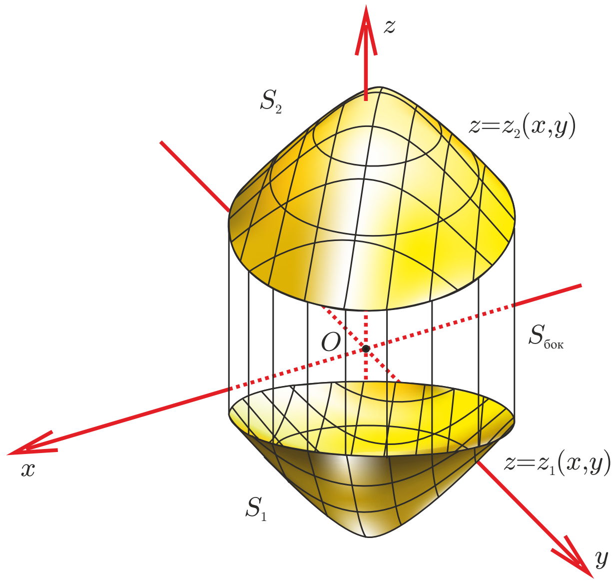


Рис. 9.41: Множество D^z

$$\iint\limits_{S_1\cup S_2\cup S_{бок}} Rdxdy = \iint\limits_{S_1\cup S_2\cup S_{бок}} R\cos\gamma\, dS = \iint\limits_{S_1} + \iint\limits_{S_2} + \iint\limits_{S_{бок}}$$

- На боковой поверхности цилиндра $S_{бок}$ имеем $\vec{n} \perp Oxy$ следовательно $\cos\gamma = 0 \iint\limits_{S_{бок}} = 0$.

- На "верхней шапке"цилиндра S_2 имеем $z = z_2(x,y)$ — явная параметризация поверхности. Поэтому $\cos\gamma = +\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ мы выбрали знак $+$ перед дробью, поскольку на "верхней шапке"цилиндра нормаль к поверхности $z = z_2(x,y)$ образует острый угол с осью Oz, а следовательно $\cos\gamma$ должен быть положителен, $dS = \sqrt{A^2+B^2+C^2}\, dxdy$. Поскольку $\vec{r} = (x, y, z_2(x,y))$, то $\cos\gamma\, dS = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} dxdy = dxdy$. Следовательно $\iint\limits_{S_2} R\cos\gamma\, dS = \iint\limits_{\Omega} R(x,y,z_2(x,y))\, dxdy$.

- На "нижней шапке"цилиндра S_1 имеем $z = z_1(x,y)$ — явная параметризация поверхности. Поэтому $\cos\gamma = -\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ мы выбрали знак $-$ перед дробью, поскольку на "нижней шапке"цилиндра нормаль к поверхности $z = z_1(x,y)$ образует тупой угол с осью Oz, а следовательно $\cos\gamma$ должен быть отрицателен, $dS = \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dxdy$. Поскольку $\vec{r} = (x,y,z_1(x,y))$, то $\cos\gamma\,dS = -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\,dxdy = -dxdy$. Следовательно $\iint\limits_{S_1} R\cos\gamma\,dS = -\iint\limits_{\Omega} R(x,y,z_1(x,y))\,dxdy$.

Таким образом равенство для $D = D_z$ доказано. Предположим, что множество D можно предстваить в виде конечного объединения криволинейных цилиндров по отношению к оси Oz, т.е.

$$D = D_z^1 \cup \cdots \cup D_z^n$$

$$\begin{array}{rrl} & \iint\limits_{S_z^1} Rdxdy & = \iiint\limits_{D_z^1} R'_z dxdydz \\ + & \dots & \\ & \iint\limits_{S_z^n} Rdxdy & = \iiint\limits_{D_z^n} R'_z dxdydz \\ \hline & \sum_{k=1}^n \iint\limits_{S_z^k} Rdxdy & = \iiint\limits_{D} R'_z dxdydz \\ & || & \\ & \iint\limits_{S} Rdxdy & \end{array}$$

$\square$

Следствие 9.6.1. Пусть D — простое ориентированное множество в $\mathbb{R}^3$, ограниченное поверхностью S, $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ — вектор внешней нормали к S. Тогда полагая по очереди $P = x, Q = R = 0$ затем $Q = y, P = R = 0$ и $R = z, P = Q = 0$, получаем:

$$V(D) = \iiint\limits_{D} dxdydz = \iint\limits_{S} x\cos\alpha\,dS = \iint\limits_{S} y\cos\beta\,dS = \iint\limits_{S} z\cos\gamma\,dS =$$
$$= \frac{1}{3}\iint\limits_{S}(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,dS = \frac{1}{3}\iint\limits_{S}\vec{r}\cdot\vec{n}\,dS.$$

Пусть (u,v) — локальные координаты поверхности S. Обозначим через $D_{u,v}$ прообраз поверхности S в локальных координатах (u,v). Поскольку $\vec{n} = \pm\frac{\vec{r}'_u\times\vec{r}'_v}{|\vec{r}'_u\times\vec{r}'_v|}$, а $dS = |\vec{r}'_u\times\vec{r}'_v|\,du\,dv$, то

$$V(D) = \frac{1}{3}\iint\limits_{S}\vec{r}\cdot\vec{n}\,dS = \pm\frac{1}{3}\iint\limits_{D_{u,v}}\vec{r}\cdot(\vec{r}_u{}'\times\vec{r}_v{}')\,du\,dv,$$

здесь знак пред интегралом выбирается из условия того, что $\vec{n}$ вектор внешней нормали к поверхности. Знак плюс будет, если вектора $\vec{n}$, $\vec{r}_u{}'$, $\vec{r}_v{}'$ образуют правую тройку. Поскольку в этом случае вектора $\vec{r}_u{}'\times\vec{r}_v{}'$ и $\vec{n}$ будут отличаться только на положительную константу. Иначе говоря, если смотреть с конца вектора $\vec{n}$ вектор $\vec{r}_u{}'$ переходит в вектор $\vec{r}_v{}'$ против часовой стрелки. Если вектора $\vec{n}$, $\vec{r}_u{}'$, $\vec{r}_v{}'$ образуют левую тройку, то ставим знак минус перед интегралом. Напомним, что выражение $\vec{r}\cdot(\vec{r}_u{}'\times\vec{r}_v{}')$ называется смешанным произведением и обозначается $(\vec{r}, \vec{r}_u{}', \vec{r}_v{}') = \vec{r}\cdot(\vec{r}_u{}'\times\vec{r}_v{}')$.

Если обозначить $\vec{r}_x = (x, 0, 0)$, $\vec{r}_y = (0, y, 0)$, $\vec{r}_z = (0, 0, z)$, то формулы на объём принимают вид:

$$V(D) = \pm \iint\limits_{D_{u,v}} (\vec{r}_x, \vec{r}_u{}', \vec{r}_v{}')\, du\, dv = \pm \iint\limits_{D_{u,v}} (\vec{r}_y, \vec{r}_u{}', \vec{r}_v{}')\, du\, dv =$$

$$= \pm \iint\limits_{D_{u,v}} (\vec{r}_z, \vec{r}_u{}', \vec{r}_v{}')\, du\, dv = \pm \frac{1}{3} \iint\limits_{D_{u,v}} \vec{r} \cdot (\vec{r}_u{}' \times \vec{r}_v{}')\, du\, dv.$$

П р и м е р 9.6.1. Вычислите объём тела, ограниченного эллипсоидом:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Доказательство. Объём можно считать разными способами, но здесь мы вычислим объём использую параметризацию эллипсоида:

$$\begin{cases} x = a \cos\varphi \cos\psi, \\ y = b \sin\varphi \cos\psi, \\ z = c \sin\psi, \end{cases}$$

где $\varphi \in [0; 2\pi]$, $\psi \in [-\pi/2; \pi/2]$. Векторное параметрическое уравнение эллипсоида имеет вид:

$$\vec{r} = (a \cos\varphi \cos\psi, b \sin\varphi \cos\psi, c \sin\psi).$$

Обозначим $\vec{r}_x = (x, 0, 0) = (a \cos\varphi \cos\psi, 0, 0)$. Нетрудно сообразить, что все точки эллипсоида взаимно однозначно отображаются на множество (квадрат без одной стороны) со сторонами $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\psi \in [-\pi/2, \pi/2]$. Легко видеть (см. рис. 9.43), что вектора $\vec{n}$, $\vec{r}_\varphi{}'$, $\vec{r}_\psi{}'$ образуют правую тройку (иначе говоря, если смотреть с конца вектора $\vec{n}$ вектор $\vec{r}_\varphi{}'$ переходит в вектор $\vec{r}_\psi{}'$ против часовой стрелки). Напомним, что здесь $\vec{n}$ — вектор внешней нормали к поверхности. Таким образом, объем ограниченный эллипсоидом выражается следующим двойным интегралом:

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\vec{r}_x\,, \vec{r}_\varphi{}', \vec{r}_\psi{}')\, d\psi$$

Вычислим входящее в двойной интеграл смешанное произведение.

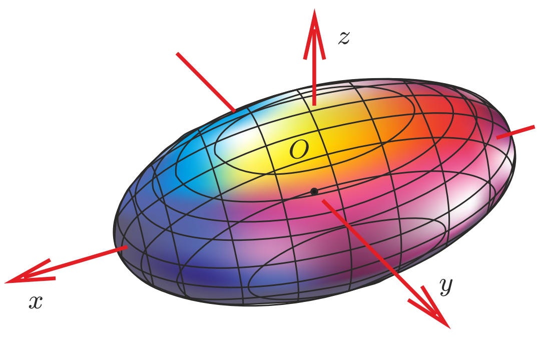


Рис. 9.42: Эллипсоид

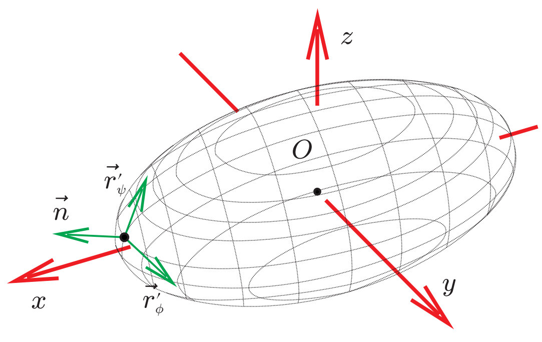


Рис. 9.43: Вектора $\vec{n}$, $\vec{r}_\varphi{}'$, $\vec{r}_\psi{}'$

$$(\vec{r}_x\,, \vec{r}_\varphi{}', \vec{r}_\psi{}') = \begin{vmatrix} a \cos\varphi \cos\psi & 0 & 0 \\ -a \sin\varphi \cos\psi & b \cos\varphi \cos\psi & 0 \\ -a \cos\varphi \sin\psi & -b \sin\varphi \sin\psi & c \cos\psi \end{vmatrix}.$$

Найдём определитель:

$$(\vec{r}_x\,, \vec{r}_\varphi{}', \vec{r}_\psi{}') = abc \cos^2\varphi \cos^3\psi = abc \left(\frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right) \cos^3\psi.$$

Вспоминая, что интеграл по периоду от $\cos 2\varphi$ равен нулю, окончательно находим:

$$V = \frac{abc}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3\psi\, d\psi = \pi\, abc \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1-\sin^2\psi)\, d\sin\psi =$$

$$= \pi\, abc\left(\sin\psi - \frac{\sin^3\psi}{3}\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi\, abc\left(2-\frac{2}{3}\right) = \frac{4\pi}{3}abc.$$

В частности, при $a=b=c$ получаем отсюда известную со школы формулу объема шара. □

П р и м е р 9.6.2. Вычислите объём тела, граница которого задана системой уравнений ($0<a\leqslant b$):

$$\begin{cases} x = (b+a\cos\psi)\cos\varphi,\\ y = (b+a\cos\psi)\sin\varphi,\\ z = a\sin\psi. \end{cases}$$

Система выписанных уравнений задаёт поверхность, называемую *тором*.

Доказательство. Отметим, что мы получим указанный тор, если будем вращать расположенную в плоскости (x,z) окружность радиуса a, с центром в точке $(x,y,z)=(b,0,0)$, вокруг оси z (см. рис. 9.44,9.45). При этом перемещению по окружности соответствует изменение угла ψ, а вращению самой окружности, изменение φ. Нетрудно сообразить также, что все точки тора взаимно однозначно отображаются на множество (квадрат без двух сторон) со сторонами $\varphi\in[0,2\pi)$, $\psi\in[0,2\pi)$. Легко видеть (см. рис. 9.45), что вектора $\vec n$, $\vec r_\varphi{}'$, $\vec r_\psi{}'$ образуют правую тройку (иначе говоря, если смотреть с конца вектора $\vec n$ вектор $\vec r_\varphi{}'$ переходит в вектор $\vec r_\psi{}'$ против часовой стрелки). Напомним, что здесь $\vec n$ — вектор внешней нормали к поверхности. Таким образом, объем ограниченный тором выражается следующим двойным интегралом:

$$V = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} (\vec r, \vec r_\varphi{}', \vec r_\psi{}')\, d\psi \tag{9.6.1}$$

Заметим, что вычисление объёма по формуле, например, $V=\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} (\vec r_z, \vec r_\varphi{}', \vec r_\psi{}')\, d\psi$ было бы вычислительно проще, но здесь для разнообразия мы всё-таки проведём вычисления по более громоздкой формуле (9.6.1). Вычислим входящее в двойной интеграл смешанное произведение. Векторное параметрическое урав-

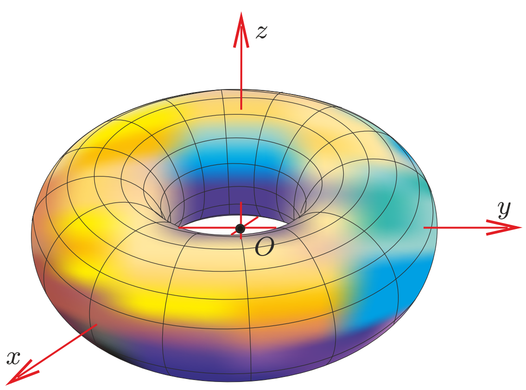


Рис. 9.44: Тор

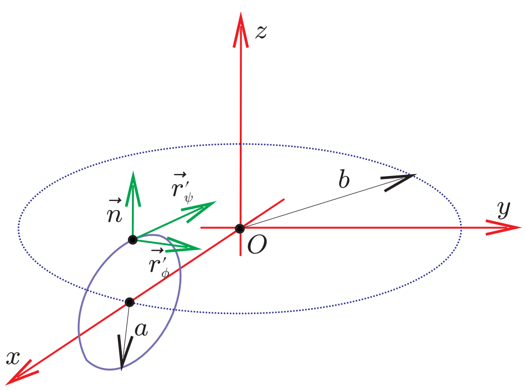


Рис. 9.45: Построение тора

нение тора имеет вид:

$$\vec r = ((b+a\cos\psi)\cos\varphi, (b+a\cos\psi)\sin\varphi, a\sin\psi).$$

Откуда

$$(\vec r, \vec r_\varphi{}', \vec r_\psi{}') = \begin{vmatrix} (b+a\cos\psi)\cos\varphi & (b+a\cos\psi)\sin\varphi & a\sin\psi\\ -(b+a\cos\psi)\sin\varphi & (b+a\cos\psi)\cos\varphi & 0\\ -a\sin\psi\cos\varphi & -a\sin\psi\sin\varphi & a\cos\psi \end{vmatrix}.$$

Вместо того, чтобы считать полученный достаточно громоздкий определитель, можно было бы упростить его, используя свойства симметрии поверхности. Из геометрических соображений ясно, что при фиксированном ψ и изменении угла φ, величина и взаимное расположение векторов $\vec{n}$, $\vec{r}_\varphi{}'$, $\vec{r}_\psi{}'$ меняться не будут. Соответственно, не будет зависеть от φ и искомое смешанное произведение. Поэтому можно было бы положить $\varphi = 0$ и найти определитель

$$(\vec{r}, \vec{r}_\varphi{}', \vec{r}_\psi{}') = \begin{vmatrix} (b + a\cos\psi) & 0 & a\sin\psi \\ 0 & (b + a\cos\psi) & 0 \\ -a\sin\psi & 0 & a\cos\psi \end{vmatrix}.$$

Но, мы посчитает исходный определитель, не упрощая его. Найдём определитель, используя разложения по второй строке:

$$(\vec{r}, \vec{r}_\varphi{}', \vec{r}_\psi{}') = (b + a\cos\psi)\sin\varphi \begin{vmatrix} (b + a\cos\psi)\sin\varphi & a\sin\psi \\ -a\sin\psi\sin\varphi & a\cos\psi \end{vmatrix} + (b + a\cos\psi)\cos\varphi \begin{vmatrix} (b + a\cos\psi)\cos\varphi & a\sin\psi \\ -a\sin\psi\cos\varphi & a\cos\psi \end{vmatrix} =$$
$$= (b + a\cos\psi)\sin\varphi(ab\sin\varphi\cos\psi + a^2\sin\varphi) + (b + a\cos\psi)\cos\varphi(ab\cos\varphi\cos\psi + a^2\cos\varphi) =$$
$$= (b + a\cos\psi)(ab\cos\psi + a^2) = a^2 b(\cos^2\psi + 1) + a(a^2 + b^2)\cos\psi.$$

Вспоминая, что интеграл по периоду от $\cos\psi$ равен нулю, окончательно находим:

$$V = \frac{1}{3}a^2 b\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} (1 + \cos^2\psi)\, d\psi = 2a^2 b\pi^2.$$

Также ответ можно записать в виде $(\pi a^2) \cdot (2b\pi)$ т.е. как произведение площади вращающейся окружности на длину окружности, вдоль которой происходит вращение (см. рис. 9.45). □

Контрольные вопросы.

1. Сформулируйте теорему Гаусса-Остроградского.

Упражнения к 9.6

Упражнение 9.6.1. *Вычислите*

$$\iint_S (2x + \sin y)dydz + (2\cos x + 3y + e^z)dzdx + (x^3 + 4z)dxdy,$$

где S внутренняя поверхность $|x + 2y + 3z| + |x + 4y - 2z| + |3x + 6y + 12| = a$ для $a > 0$.

Упражнение 9.6.2. *Вычислите*

$$\iint_S (x + e^y - 2z)dydz + (2y + z^5)dzdx + (x^3 + 2z)dxdy,$$

где S внутренняя поверхность $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^4/c^4 = 1$.

Упражнение 9.6.3. *Докажите, что если $G \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей S, $\vec{n}$ — нешняя нормаль к S, $u(x, y, z)$ и $v(x, y, z)$ — дважды непрерывно дифференцируемые функции в $\overline{D}$, то*

$$\iiint_D \begin{vmatrix} \triangle u & \triangle v \\ u & v \end{vmatrix} dxdydz = \iint_S \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} & \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} \\ u & v \end{vmatrix} dS.$$

Ответы: 9.6.1 $-2a^3$. **9.6.2** $-8\pi abc$.

9.7 Формула Стокса.

Определение 9.7.1. Если точка (u, v) была внутренней к D, то точка поверхности $\vec{r}(u; v)$ называется *внутренней* к поверхности S. А если точка (u, v) была граничной к D, то точка поверхности $\vec{r}(u; v)$ называется *краевой* к поверхности S. Множество краевых точек называется *краем поверхности* S и обозначается ∂S.

Теорема 9.7.1. *При выполнении условий*

1. *S — гладкая, причём функции задающие поверхность $x, y, z \in C^2(D_{u,v})$, $D_{u,v}$ — простое множество в $\mathbb{R}^2$, ∂S — край поверхности S.*
2. *$P, Q, R, P'_y, P'_z, Q'_x, Q'_z, R'_x, R'_y \in C(\overline{S})$.*
3. *Обход по правилу буравчика,*

справедливо:

$$\oint\limits_{\partial S} Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_{S} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS = \iint (R'_y - Q'_z)dydz + (P'_z - R'_x)dzdx + (Q'_x - P'_y)dxdy$$

Доказательство. Докажем справедливость равенства

$$\int\limits_{\partial S} Pdx \overset{?}{=} \iint\limits_{S} P'_z dzdx - P'_y dxdy.$$

Воспользуемся, доказанной ранее, формулой Грина в переменных (u, v)

$$\oint_{\partial S} Pdx = \oint_{\partial S} Px'_u du + Px'_v dv = \iint\limits_{D_{u,v}} (Px'_v)'_u - (Px'_u)'_v \, dudv =$$

$$= \iint_{D_{u,v}} Px''_{vu} + x'_v(P'_x x'_u + P'_y y'_u + P'_z z'_u) - Px''_{uv} - x'_u(P'_x x'_v + P'_y y'_v + P'_z z'_v) \, dudv =$$

$$= \iint\limits_{D_{u,v}} P'_y(y'_u x'_v - x'_u y'_v) + P'_z(z'_u x'_v - z'_v x'_u) \, dudv = \iint\limits_{D_{u,v}} P'_y \left(-\frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right) + P'_z \left(\frac{D(z,x)}{D(u,v)} \right) dudv =$$

$$= \iint\limits_{S} -P'_y dxdy + P'_z \, dzdx.$$

Аналогично доказываем соответствующие равенства для Q и R. ☐

П р и м е р 9.7.1. Вычислите при помощи формулы Стокса криволинейный интеграл второго рода

$$\oint_C (z^3 - x^3)dx + (x^3 + y^7)dy + (y^3 + z^4)dz,$$

где C — замкнутый контур, полученный как сечение куба $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x, y, z \in [0; 1]\}$ плоскостью $x+y+z = 1$. Обход контура C, как указана на рис. 9.46 (т.е. по ходу часовой стрелки, если смотреть из точки $(10, 0, 0)$).

Доказательство. Пусть S — часть плоскости $x + y + z = 1$, которая ограничивается контуром C. Тогда $dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dxdy = \sqrt{3}\, dxdy$. Найдём вектор нормали $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. По формуле для произвольной неявно заданной функции $F(x, y, z) = 0$ нормаль можно найти найти в виде (F_x, F_y, F_z), то $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Теперь нужно определить какой знак перед вектором нормали нам нужен. Поскольку, если вектор нормали направлен по голове человека, идущуго по краю поверхности, то обход должен совершаться таким образом, чтобы множество оставалось слева. Иными словами нам нужен

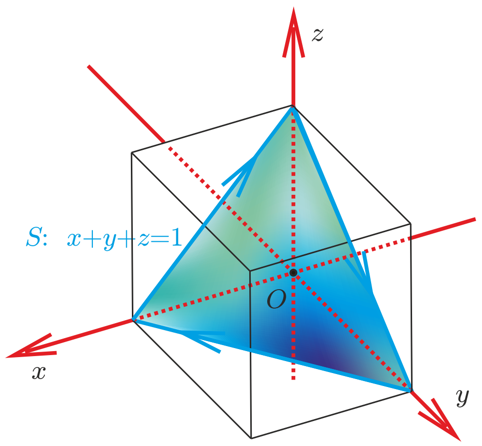


Рис. 9.46: Вычисление по формуле Стокса

знак минус, т.е. $\vec{n} = -\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Применим формулу Стокса:

$$\oint_C (z^3 - x^3)dx + (x^3 + y^7)dy + (y^3 + z^4)dz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS =$$

$$= \iint_S (R'_y - Q'_z)\cos\alpha + (P'_z - R'_x)\cos\beta + (Q'_x - P'_y)\cos\gamma\, dS = -\iint_{S_{x,y}} 3y^2 + 3z^2 + 3x^2\, dxdy =$$

$$= -3\int_0^1 dx \int_0^{1-x} x^2 + y^2 + (1-x-y)^2\, dy = -3\int_0^1 \left(x^2(1-x) + \frac{(1-x)^3}{3} + \frac{(1-x)^3}{3}\right) dx =$$

$$= -3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \left(\frac{2}{3\cdot 4}(1-x)^4\cdot(-1)\right)\Big|_0^1\right) = -3\left(\frac{1}{12} + \frac{2}{12}\right) = -\frac{3}{4}.$$

□

9.8 Векторный анализ.

Определение 9.8.1. Пусть функции $P, Q, R:\ \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^1$, $\vec{a} = (P, Q, R)$ — *векторное* поле в $\mathbb{R}^3$, функцию $u:\ \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^1$, где $u = u(x, y, z)$ будем называть *скалярным* полем.

Определение 9.8.2. Основные операторы векторного анализа:

- Напомним определение градиента функции $u(x, y, z)$:

$$\operatorname{grad} u = \bigtriangledown u = (u'_x, u'_y, u'_z),$$

здесь $\bigtriangledown$ оператор Набла.

- Определим следующий оператор:

$$(\bigtriangledown, \bigtriangledown)u = \Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u,$$

который будем называть *оператором Лапласа*.

- *Дивергенцией* векторного поля $\vec{a}$ назовём:

$$\operatorname{div}\vec{a} = P'_x + Q'_y + R'_z = (\bigtriangledown, \vec{a}).$$

- *Ротором* векторного поля $\vec{a}$ назовём:

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \bigtriangledown \times \vec{a} = [\bigtriangledown, \vec{a}] = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y).$$

Определение 9.8.3. Поле $\vec{a}$ — *потенциальное* в D, если существует скалярное поле $u = u(x, y, z)$ такое, что $\bigtriangledown u = \vec{a}$ в D.

Определение 9.8.4. Векторное поле $\vec{a}$ называется *соленоидальным* в D, если определены функции P'_x, Q'_y, R'_z и $\operatorname{div}\vec{a} = 0$ в D.

Определение 9.8.5. Векторное поле $\vec{a}$ называется *безвихревым*, если $\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{0}$.

Теорема 9.8.1 (Формула Гаусса-Остроградского). *При выполнении условий*

1. *D — простое ориентированное множество в $\mathbb{R}^3$, ограниченное поверхностью S.*
2. *$P, Q, R, P'_x, Q'_y, R'_z \in C(D)$.*
3. *$\vec{n}$ - вектор внешней нормали,*

справедливо:

$$\iint\limits_S \vec{a}\, d\vec{S} = \iint\limits_V \operatorname{div}\vec{a}\, dxdydz.$$

Следствие 9.8.1. Пусть $V_\epsilon = \{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leqslant \varepsilon^2\}$, $P'_x, Q'_y, R'_z, P, Q, R \in C(V_\varepsilon))$ и $S_\varepsilon = \partial V_\varepsilon = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \varepsilon^2\}$. Обозначим $\vec{n}$ — вектор внешней нормали. Тогда по формуле Гаусса-Остроградского получаем:

$$\iint\limits_{S_\varepsilon} \vec{a}\, d\vec{S} = \iiint\limits_{V_\varepsilon} \operatorname{div}\vec{a}\, dxdydz = \operatorname{div}\vec{a}\Big|_{(\xi,\eta,\zeta)} \iiint\limits_{V_\varepsilon} dxdydz$$

Из непрерывности векторного поля $\vec{a}$ вытекают равенства

$$\operatorname{div}\vec{a}|_{(x_0,y_0,z_0)} = \lim_{\epsilon\to 0} \operatorname{div}\vec{a}\Big|_{(\xi,\eta,\zeta)\in V_\varepsilon} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\iint\limits_{S_\epsilon} \vec{a}\, d\vec{S}}{\mu(V_\varepsilon)}.$$

Откуда следует независимость $\operatorname{div}\vec{a}$ от выбора системы координат.

Определение 9.8.6. *Поток векторного поля* $\vec{a}$ через поверхность S с выбранным вектором нормали — $\iint\limits_S \vec{a}\, d\vec{S}$.

Определение 9.8.7. Работа $\vec{a}$ вдоль контура L обозначаем $A = \int\limits_L \vec{a} d\vec{r}$. Если L — замкнутый контур, то интеграл $\oint\limits_L \vec{a}\, d\vec{r}$ называется *циркуляцией* векторного поля $\vec{a}$ вдоль контура L.

Теорема 9.8.2 (Формула Стокса)**.** *При выполнении условий*

1. *S — гладкая, причём функции задающие поверхность $x, y, z \in C^2(D_{u,v})$, $D_{u,v}$ — простое множество в $\mathbb{R}^2$, ∂S — край поверхности S.*
2. *$P, Q, R, P'_y, P'_z, Q'_x, Q'_z, R'_x, R'_y \in C(\overline{S})$.*
3. *Обход по правилу буравчика,*

справедливо:

$$\oint\limits_{\partial S} \vec{a}\, d\vec{r} = \iint\limits_S \operatorname{rot} \vec{a}\, d\vec{S},$$

где $d\vec{S} = \vec{n}\, dS$, $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, $\operatorname{rot}\vec{a}\,\vec{n} = (R'_y - Q'_z)\cos\alpha + (P'_z - R'_x)\cos\beta + (Q'_x - P'_y)\cos\gamma$.

Следствие 9.8.2. 1) $P, Q, R, P'_y, P'_z, Q'_x, Q'_z, R'_z, R'_y \in C(U(x_0, y_0, z_0))$
2) $\partial S_\varepsilon = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \varepsilon^2, \ z = z_0\}$, $S_\varepsilon^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \varepsilon^2, \ z \geqslant z_0\}$
3) для S_ε^+ выбираем вектор внешней нормали к шару, для C_ε выбираем обход против часовой стрелки, если смотреть с оси Oz. Согласно формуле Стокса

$$\oint\limits_{\partial S_\varepsilon} \vec{a}\, d\vec{r} = \iint\limits_{S_\varepsilon} \operatorname{rot} \vec{a}\, d\overrightarrow{S} = (\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{n})|_{(\xi,\eta,\zeta)}\mu(S_{\varepsilon^+}).$$

Следовательно

$$(\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{n})|_{x_0,y_0,z_0} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\oint\limits_{\partial S_\varepsilon} \vec{a}\, d\vec{r}}{\mu(S_{\varepsilon^+})}.$$

Откуда следует независимость $\operatorname{rot}\vec{a}$ от выбора системы координат.

Теорема 9.8.3. *$\vec{a}$ — непрерывно дифференцируемое векторное поле в $D \subset \mathbb{R}^3$, D — односвязное множество. Тогда следующие условия эквивалентны*

1. $\oint\limits_C \vec{a} d\vec{r} = 0$ *(по любому гладкому замкнутому контуру, который является краем некоторой гладкой поверхности класса C^2 в D).*

2. $\int\limits_{L_1} \vec{a} d\vec{r} = \int\limits_{L_2} \vec{a} d\vec{r}$ *(L_1 и L_2 - гладкие контуры, идут из A_1 в A_2).*

3. *векторное поле $\vec{a}$ - потенциально.*

4. $\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{0}$.

Доказательство. Переходы 1. $\Longrightarrow$ 2.; 2. $\Longrightarrow$ 3.; 3. $\Longrightarrow$ 4. доказываются по аналогии с теоремой 9.5.1 (полученной из формулы Грина). Переход 4. $\Longrightarrow$ 1. получен также по аналогии с теоремой 9.5.1, только вместо формулы Грина применяется формула Стокса.

□

Контрольные вопросы.

1. Сформулируйте теорему Стокса в векторном виде.

Упражнения к 9.8

Упражнение 9.8.1. *Пусть заданно векторное поле* $\vec{a}$ *такое, что* $\operatorname{div}\vec{a} = 0$, $\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{0}$ *в* $\mathbb{R}^3$. *Докажите, что поле потенциально и для потенциала и найдите* Δu. *Здесь* Δu *— оператор Лапласа, т.е.* $\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz}$.

Упражнение 9.8.2. *Найдите* $\operatorname{rot}(\vec{b}(\vec{r}\cdot\vec{a}))$, *где* $\vec{r} = (x, y, z)$, *вектора* $\vec{a}, \vec{b}$ *постоянны.*

Ответы: 9.8.1 $\Delta u = 0$. **9.8.2** $\vec{a}\times\vec{b}$.

Предметный указатель

Эйлера
  подстановки, 160
Гельдера
  неравенство, 88
Минковского
  неравенство, 88
Паскаля
  треугольник, 70
Шварца сапог, 224
Тейлор
  формула, 78
  остаток в форме Коши, 78
  остаток в форме Лагранжа, 79
  остаток в форме Шлемильха-Роша, 79
Тейлора
  формула, 120
Юнга
  неравенство, 87
аксиома
  отделимости, 15
биноминальный дифференциал, 159
биноминальный коэффициент, 69
числа
  Бернулли, 37
  действительные, 14
  иррациональные, 14
число сочетаний, 69
диаметр разбиение, 172
дифференциал, 63
дизъюнкция, 11
достаточные условия
  экстремум, 126
достаточные условия существования экстремума, 126
экстремум, 73
элемент множества, 9
элементарная функция, 57
факториал, 69
формула
  Тейлора, 78, 120
  Тейлора с остатоком в форме Коши, 78
  Тейлора с остатоком в форме Лагранжа, 79
  Тейлора с остатоком в форме Шлемильха-Роша, 79
функция
  бесконечно малая, 27
  дифференцируемая, 63
  элементарная, 57
  интегрируемая, 173
  монотонная, 55
    строго, 55
  непрерывная, 51
    слева, 51
    справа, 51
  неубывающая, 55
  невозрастающая, 55
  рациональная, 153
  убывающая, 55
  возрастающая, 55
гладкая поверхность, 225
грань
  нижняя, 16
  точная нижняя, 16
  точная верхняя, 16
  верхняя, 16
импликация, 11
интеграл
  неопределенный, 149
  несобственный, 199
  определённый, 173
  расходящийся, 199
  сходящийся, 199
интегральная сумма, 172
интегрирование
  иррациональных выражений, 158
  рациональных функций, 153
  тригонометрических функций, 168
интервал
  составляющий, 104
касательная, 68
  плоскость, 122
колебание
  функции в точке, 52
компакт, 106
конъюнкция, 11
константа
  Эйлера, 37
критерий
  Сильвестра, 125
критерий Сильвестра, 125
квадратичная
  форма, 125
квадратичная форма, 125

квадрируемая фигура, 172
локальный максимум, 124
локальный минимум, 124
максимум, 73
    локальный, 124
    строгий, 73
    строгий локальный, 124
метод математической индукции, 11
метод наименьших квадратов, 127
минимум, 73
    локальный, 124
    строгий, 73
    строгий локальный, 124
множества
    равные, 9
множество, 9
    дополнение, 10
    объединение, 9
    открытое, 103
    пересечение, 9
    пустое, 9
    разность, 10
    замкнутое, 103
наименьших квадратов
    метод, 127
неопределенный интеграл, 149
неотрицательная
    форма, 125
неотрицательно определенная форма, 125
неположительная
    форма, 125
неположительно определенная форма, 125
непрерывная функция, 51
    слева, 51
    справа, 51
неравенство
    Гельдера, 88
    Минковского, 88
    Юнга, 87
несобственный
    интеграл, 199
нижняя грань, 16
о неявной функции теорема, 115
образ, 12
окаймлённый
    гессиан, 136
окаймлённый гессиан, 136
окрестность, 18
    проколотая, 18
        левая, 31
        правая, 31
определенный интеграл, 172
определённый интеграл, 173
отображение, 12
отрицание, 11
отрицательная
    форма, 125
отрицательно определенная форма, 125
первый замечательный предел, 34
первообразная, 149
плоскость
    касательная, 122
площадь
    поверхности, 224
подмножество, 9
подстановки Эйлера, 160
положительная
    форма, 125
положительно определенная форма, 125
последовательность, 17
    бесконечно малая, 27
    ограниченная, 27
    расходящаяся, 37
    сходящаяся, 37
поверхность
    гладкая, 225
правило
    Бернулли(Лопиталя), 97
предел
    функции, 24
    последовательности, 23
    замечательный
        первый, 34
предельная точка, 18
производная
    функции, 63
прообраз, 12
пространство
    $PC[a, b]$, 182
    $PC^1[a, b]$, 182
    метрическое, 102
рациональная функция, 153
расходимость, 37
равномощность, 13
разбиение отрезка, 172
разрыв
    первого рода, 52
    устранимый, 52
    второго рода, 52
сходимость, 37
символы o, O, 50
строгий локальный максимум, 124
строгий локальный минимум, 124
шар, 102
    открытый, 102
    замкнутый, 102
теорема
    Ферма, 73
    Лагранж, 75
    Ролля, 74

о неявной функции, 115
точка
экстремума, 73
граничная, 103
предельная, 18, 103
разрыва, 52
внешняя, 103
внутренняя, 103
точная нижняя грань, 16
точная верхняя грань, 16
треугольник Паскаля, 70
верхняя грань, 16
выпуклость
вниз, 89
вверх, 89
высказывание
истинное, 11
логическое, 11
ложное, 11
вогнутость, 89
замыкание
множества, 103

Литература

[1] *В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Бл.Х. Сендов.* Математический анализ. В 2-х томах. // М.: Изд-во МГУ. Ч.1: 2-е изд., перераб., 1985. - 662с.; Ч.2 - 1987. - 358с.

[2] *И. А. Виноградова, С. Н. Олехник, В. А. Садовничий.* Задачи и упражнения по математическому анализу// М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. - 416с.

[3] *В. А. Зорич.* Математический анализ. В 2-х ч. // Москва: Фазис; Наука; Ч.I. — 1997, 568с.; Ч.II. — 1984, 640с.

[4] *Г.И. Архипов, В.А. Садовничий, В.Н.Чубариков.* Лекции по математическому анализу. 5-е изд., испр. // М.: 2004. — 640 с.

[5] *С. М. Никольский.* Курс математического анализа // М.: Физматлит, 2001. — 592 с.

[6] *Э.Т. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон.* Курс современного анализа. В 2-х ч. // М.: Физматлит, 1963; Ч.I — 343 с.; Ч.II — 500 с.

[7] *Hardy G. H.* Weierstrass's nondifferentiable function // Trans — Amer. Math. Soc, 17 (1916), p. 301—325.

[8] *Maligranda Lech* The AM-GM Inequality is Equivalent to the Bernoulli Inequality // The Mathematical Intelligencer, 2012, Volume 34, Number 1, Page 1–2. DOI 10.1007/s00283-011-9266-8

[9] *Козко А.И.* О некоторых признаках сходимости для знакопостоянных и знакочередующихся рядов // Чебышевский сб., 18:1 (2017), 123–133.

Глава 10

Приложение. Таблица интегралов

Таблица неопределенных интегралов

1) $$\int x^\alpha\, dx = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, & \alpha \neq -1 \\ \ln|x| + C, & \alpha = -1 \end{cases}$$

2) $$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

3) $$\int \cos x dx = \sin x + C$$

4) $$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

5) $$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$$

6) $$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

7) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

8) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \ln|x+\sqrt{x^2+\alpha}| + C$$

9) $$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

10) $$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

11) $$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$$

12) $$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$$

13) $$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$$

14) $$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$$

15) $$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$$

Ещё несколько специальных интегралов

$$\int \sqrt{x^2+\alpha}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+\alpha} + \frac{\alpha}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+\alpha}| + C$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int x^n \ln x\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C.$$